

CAHIER DU LAMSADE

Laboratoire d'Analyse et Modélisation de Systèmes pour l'Aide à la Décision
(Université de Paris-Dauphine)
Unité Associée au C.N.R.S. n° 825

LA NOTION DE SEUILS DE DISCRIMINATION
EN ANALYSE MULTICRITERE

CAHIER N° 64
juillet 1985

D. BOUYSSOU
B. ROY

TABLE DES MATIERES

	<u>Pages</u>
ABSTRACT	I
RESUME	I
Introduction	1
I - Conséquences et critères	2
II - Rappel de quelques résultats théoriques sur les pseudo-critères	5
III - L'interprétation des seuils de discrimination	7
IV - Pourquoi <u>deux</u> seuils ?	13
V - L'évaluation des seuils de discrimination	16
a) Seuils de dispersion et seuils de discrimination	17
b) Evaluations distributionnelles et seuils de discrimination	20
Conclusion	21
Références	22

THE MEANING AND THE USE OF DISCRIMINATION THRESHOLDS IN MULTICRITERIA ANALYSIS

ABSTRACT

An adequate preference modelling on each criterion is a crucial prerequisite for multicriteria analysis. The use of criteria surrounded by discrimination thresholds allows a great flexibility and realism in preference modelling. After having recalled the theoretical foundations of the notion of discrimination thresholds, we show that they allow to build a convincing preference structure on each criterion in spite of the imprecision and/or uncertainty of the "data". We then justify the use of two thresholds in practice and review a number of techniques allowing to evaluate them in a number of common situations.

Key-words : Discrimination thresholds, pseudo-criterion, preference modelling, multicriteria analysis.

LA NOTION DE SEUILS DE DISCRIMINATION EN ANALYSE MULTICRITERE

RESUME

L'utilisation de deux seuils de discrimination, entourant chaque critère, permet d'accroître le réalisme de la modélisation des préférences en analyse multicritère. Les fondements théoriques de cette notion sont rappelés brièvement. On analyse ensuite l'interprétation qu'il convient de donner à ces seuils. On montre que leur rôle est de donner une certaine probance aux comparaisons effectuées selon chaque critère, en dépit de la part d'imprécision, d'arbitraire et/ou d'incertitude entourant les "données" qui ont servi à évaluer les actions sur ces critères. L'utilisation, dans la pratique, de deux seuils est justifiée. Quelques techniques permettant d'évaluer ces seuils seront enfin abordées.

Mots-clés : Seuil de discrimination, pseudo-critère, modélisation des préférences, analyse multicritère.

Introduction

L'analyse multicritère vise à déterminer une relation de préférence entre des actions évaluées sur plusieurs critères, attributs ou conséquences. Le problème de l'évaluation des actions sur ces différentes "dimensions" est généralement (cf. par exemple [8] ou [31]) supposé, implicitement, résolu.

Ce préalable à la mise en oeuvre de méthodes d'agrégation a rarement fait l'objet d'études approfondies (voir cependant [6]). Il a pourtant une importance considérable tant du point de vue théorique que pratique.

Roy ([17] et [19]) a proposé une méthodologie d'analyse de ces problèmes aboutissant à l'utilisation de critères munis de deux "seuils de discrimination" (SD). L'objet de cet article est d'analyser en détail les fondements et l'intérêt pratique de cette notion.

Après avoir rappelé, dans un premier temps, quelques concepts aboutissant à la définition des SD, nous passerons ensuite en revue un certain nombre de résultats théoriques fondamentaux associés à cette notion. La troisième section abordera le problème de l'interprétation de ces seuils. Après avoir justifié l'utilisation de deux seuils, nous concluerons par quelques remarques sur l'évaluation des SD dans la pratique.

I) Conséquences et critères

Cette section rappellera brièvement les grandes lignes de la méthodologie de construction de critères proposée par Roy ([19], chap. 8 et 9).

Les actions potentielles d'une étude d'aide à la décision se traduisent généralement, lors de leur mise à exécution, par une multitude de conséquences de nature fort variée.

L'évaluation des actions sur ces conséquences comporte de nombreux éléments d'imprécision, d'incertitude et d'indétermination. Elle se présente, le plus souvent, sous la forme d'une distribution de vraisemblance (n'ayant pas forcément les propriétés d'une distribution de probabilité) sur l'échelle des différentes conséquences.

Compte tenu du nombre des conséquences et de la complexité des évaluations des actions sur celles-ci, il apparaît irréaliste de vouloir fonder, dans tous les cas, les procédures d'agrégation sur ces données. Pour rendre cette information plus opérationnelle, on a alors recours à la définition de critères. Ceux-ci visent à résumer, à l'aide d'une fonction, les évaluations des actions sur diverses conséquences pouvant se rattacher à un même "axe de signification" concret. Par exemple, on pourra chercher à définir un critère "dommages causés à l'environnement" en regroupant les conséquences "impacts sur la faune", "impacts sur la flore", "impacts sur la qualité de l'air", etc. Formellement, un critère g est une fonction à valeurs réelles définie sur l'ensemble des actions potentielles A , telle que l'homme d'étude comparant deux actions a et b relativement aux seules conséquences prises

en compte dans la définition du critère (on dira par la suite les conséquences entrant dans le "support" du critère), reconnaisse fondée la proposition:

$$g(b) \geq g(a) \Rightarrow b S_g a$$

où S_g est une relation binaire sur A au contenu sémantique "au moins aussi bon que, relativement aux évaluations sur les seules conséquences entrant dans le support de g "^(*).

En raison du contenu sémantique de S_g , $b S_g a$ recouvre des situations allant de la reconnaissance d'éléments justifiant l'indifférence entre b et a au vu des évaluations sur les conséquences du support ($b I_g a$), à celle d'éléments justifiant une préférence stricte en faveur de b ($b P_g a$).

Pour séparer ces différentes situations (ce qui peut-être nécessaire pour pouvoir utiliser par la suite des méthodes d'agrégation), Roy [19] préconise d'utiliser deux seuils de discrimination, ce qui donne naissance au concept de pseudo-critère.

Définition 1: Un pseudo critère est un critère auquel est associé deux fonctions, dites seuils de discrimination: un seuil d'indifférence q et un seuil de préférence p , de manière à ce que l'homme d'étude admette pour deux actions a et b :

(*) Définir une telle relation S_g sous-entend, bien sur, une idée d'indépendance" des préférences. Sur ces problèmes nous renvoyons à [1], chap. 1 et [19] chap. 10.

$$g(b) \geq g(a) \Rightarrow b I_g a \text{ si } g(b) - g(a) \leq q(g(a))$$

$$b Q_g a \text{ si } q(g(a)) < g(b) - g(a) \leq p(g(a))$$

$$b P_g a \text{ si } p(g(a)) < g(b) - g(a),$$

Les fonctions q et p vérifiant:

$$0 \leq q(g(a)) \leq p(g(a)) , \quad \forall a \in A$$

$$\frac{q(g(b)) - q(g(a))}{g(b) - g(a)} \geq -1, \quad \forall a, b \in A$$

$$\frac{p(g(b)) - p(g(a))}{g(b) - g(a)} \geq -1, \quad \forall a, b \in A .$$

La figure 1 donne une interprétation graphique de cette définition.

L'utilisation d'un pseudo-critère fait apparaître une relation binaire Q_g que nous interpréterons comme indiquant une "préférence faible". Nous reviendrons dans les sections suivantes sur l'intérêt d'introduire une telle relation.

Les deux dernières conditions de la définition 1 permettent de s'assurer que les fonctions $g + q$ et $g + p$ sont monotones non décroissantes. Ceci permet d'éviter des situations pathologiques du type: $[g(b) > g(a)]$ et $[g(a) + p(q(a)) > g(b) + p(q(b))]$.

Il est clair que la définition 1 généralise l'idée classique de critère (on parle alors de "vrai-critère") où toute différence strictement positive $g(b) - g(a)$ implique $b P_g a$.

Les méthodes ELECTRE III ([18] et [28]) et IV ([21]) supposent, toutes deux, que l'on a pu résumer les conséquences des actions potentielles par une famille de pseudo-critères. Ces méthodes ont été appliquées à diverses reprises et on pourra consulter par exemple [20], [22] et [25]

II) Rappel de quelques résultats théoriques sur les pseudo-critères

La définition 1 fait apparaître le pseudo-critère comme une généralisation naturelle de la représentation numérique des quasi-ordres ([4]). Dans cet ordre d'idée un certain nombre de résultats théoriques ont été obtenus que nous résumons ici brièvement.

Théorème 1 ([23], [30]) : Une structure de préférence (I, Q, P) sur un ensemble fini A peut se représenter numériquement à l'aide d'un pseudo-critère conformément à la définition 1 si et seulement si (I, Q, P) est un pseudo-ordre sur A , c'est-à-dire si :

$(I, Q \cup P)$ est un quasi-ordre

$(Q^{-1} \cup I \cup Q, P)$ est un quasi-ordre

$PIQ \subset P$

$QIP \subset P$

$PQI \subset P$

$IQP \subset P$

Cette structure de pseudo-ordre possède un certain nombre de propriétés remarquables.

Comme pour les quasi-ordres, tout pseudo-ordre possède un pré-ordre sous-jacent. Roubens et Vincke [15] ont montré que cette constatation permet de simplifier grandement l'axiomatique des pseudo-ordres. Ils prouvent de plus que la représentation matricielle d'un pseudo-ordre est en escalier lorsque les lignes et les colonnes de la matrice sont arrangées selon le pré-ordre sous-jacent. Ce résultat généralise un résultat similaire pour les quasi-ordres. Vincke [30] montre que, moyennant un choix approprié de g , il est toujours possible de représenter numériquement un pseudo-ordre à l'aide d'un seuil constant (p ou q) et d'un seuil variable. Il fournit également la condition nécessaire et suffisante pour que les deux seuils puissent être choisis constants (voir aussi [15]).

Bouyssou [1] donne les conditions nécessaires et suffisantes pour pouvoir construire un pseudo-critère avec une fonction g linéaire (c'est-à-dire $g(\alpha a + (1 - \alpha) b) = \alpha g(a) + (1 - \alpha) g(b)$) et définie à une transformation linéaire près lorsque A a une structure d'"ensemble de mélanges" (sur cette notion voir [5])

La plupart de ces résultats se généralise dans le cas de structures plus complexes faisant intervenir un nombre arbitraire de seuils comme le montrent Roubens et Vincke dans [15].

III) L'interprétation des seuils de discrimination

L'évaluation des actions entrant dans la définition des critères peut faire appel soit à une mesure physique (cas d'une conséquence "niveau de bruit") soit encore à des jugements d'experts (cas d'une conséquence évaluée sur une échelle qualitative). Dans ces conditions, il est tentant de chercher à associer les SD à des seuils d'imprécision (cf. sur le calcul classique des erreurs en physique [11] et [13]) ou à des seuils de perception (au sens de la "différence minimale perceptible" des psychologues [12]). C'est ce qui a été fait dans un certain nombre d'études ([9] et [27]).

Cependant, dans bien des situations, le rôle joué par les SD est autrement plus complexe et ce serait considérablement amoindrir leur intérêt que de s'en tenir à cette position. En effet, ils doivent également refléter la part d'arbitraire inhérente à la définition même des fonctions

critères, ce qui va bien au delà de la simple prise en compte des problèmes d'imprécision et/ou de perception de l'évaluation des actions sur les diverses conséquences.

Deux arguments principaux ont été souvent avancés pour critiquer l'introduction des SD:

- Aucune hypothèse n'étant faite sur la nature de l'incertitude et/ou de l'imprécision attachée à l'évaluation des actions, on ne peut prétendre que le modèle du pseudo-critère soit en mesure de rendre compte, dans tous les cas, de cette information.
- Il existe de nombreuses techniques qui, moyennant certaines hypothèses^(*), permettent de justifier l'utilisation de "vrais-critères" (voir par exemple les techniques utilisées en théorie de l'utilité [10]).

Dans la suite de cette section, nous nous efforcerons de montrer que ces critiques reposent sur une vision erronée de la notion de S.D.

Nous reprenons ci-après les trois raisons principales avancées dans Roy [19] pour argumenter l'introduction des SD et les complétons par quelques commentaires:

(*) Pour justifier le recours à ces hypothèses, ces techniques prévoient généralement de les confronter aux "données" du problème. Il est cependant important de remarquer que ces "données" sont le plus souvent des "construits", fruits d'une communication entre l'homme d'étude et la "réalité". Par conséquent, ces hypothèses ne sauraient être "testées", et doivent être avant tout considérées comme introduites de façon volontariste comme moyen de simplifier le problème.

- i) L'évaluation des actions potentielles sur les diverses conséquences entrant dans le support d'un critère comporte une part d'imprécision, d'incertitude, voire d'arbitraire telle qu'il est illusoire de vouloir résumer cette information par un nombre unique. De plus, dans un grand nombre de cas, la définition même de ce qui devrait être "appréhendé" est sujette à caution. En matière d'aide à la décision, on constate, en effet, bien souvent qu'un problème crucial réside dans le "Flou conceptuel" entourant les axes de signification. Comme il est souligné dans [22], s'il est clair que la notion de "trafic sur quai" est importante pour décider d'un ordre de rénovation de stations de métro, sa définition reste fortement problématique: quels sont les jours à prendre en compte ? les heures ? Quelle est la fiabilité des méthodes de comptage utilisées ? S'agit-il de prendre en compte des trafics moyens ou "instantanés" ? etc... Parler ici de "vraie valeur" que l'on cherche à mesurer, n'a plus de sens, dans la mesure où c'est la notion même de ce qui devrait être appréhendé qui pose problème. Dans l'exemple du "trafic", il faut admettre que l'on ne dispose que d'un "ordre de grandeur" de ce que l'on cherche à cerner. Notons enfin qu'un axe de signification "coût d'un projet" peut également poser problème dans sa définition, contrairement à ce que l'on admet le plus souvent:

s'agit-il de coûts "privés" ou "sociaux" ? Faut-il distinguer les coûts d'équipements des coûts de fonctionnement ? Sur quelle période actualiser ? Avec quel taux ? etc.

- ii) Même lorsque les conséquences échappent au flou conceptuel dont il vient d'être question, la définition d'un critère implique une perte inévitable d'informations.

A titre d'exemple, examinons un cas où l'on cherche à définir un critère associé à une conséquence unique, vis-à-vis de laquelle les actions sont caractérisées par une distribution de probabilité. Une technique classique consiste à utiliser comme critère l'espérance de l'utilité de ces distributions, après avoir défini une fonction d'utilité sur la conséquence (prendre la valeur espérée des conséquences revient à supposer une fonction d'utilité linéaire). Même dans un cas aussi simple, de nombreuses études laissent à penser ([3], [7]) que la précision donnée à ces calculs d'espérance d'utilité est parfois illusoire, du fait des difficultés rencontrées lorsque l'on cherche à "encoder" de façon précise une fonction d'utilité. De plus, les distributions de probabilité qui sont utilisées ne s'imposent que rarement. Il est bien souvent possible en substituant à la distribution utilisée une autre distribution tout aussi plausible d'obtenir une valeur de l'utilité espérée sensiblement différente ([20]).

iii) Les actions à comparer étant souvent complexes, il est prudent d'estimer que leur comparaison pourra faire intervenir des éléments difficilement modélisables explicitement. Or, la définition des critères (par le biais de l'encodage d'une fonction d'utilité par exemple) est, en général, fondée sur des "actions idéales", c'est-à-dire exemptes de tout élément mal défini, imprécis ou arbitraire. Il servent en fait à juger et à comparer des actions réelles, moins bien connues mais susceptibles d'être mises en oeuvre. Il y a là une part irréductible d'arbitraire qu'il est prudent de chercher à gérer explicitement dans la modélisation des préférences.

En résumé, l'argument principal en faveur de l'introduction des SD tient aux outrances engendrées par le modèle du vrai-critère où toute différence positive ($g(b) - g(a)$) est considérée comme révélatrice d'une situation de préférence stricte de b sur a . Au contraire, comme le fait remarquer Roy [19]:

"le modèle du pseudo-critère a pour objet d'établir des situations d'indifférence et de préférence aussi peu discutables que possible".

Les SD doivent donc avant tout être considérés comme permettant de donner une certaine probance aux comparaisons effectuées sur un axe de signification. Dans une démarche constructive (sur cette notion voir [20]) cette probance des comparaisons est essentielle. C'est, en effet, sur la base des axes de signification que sera élaborée une structure de préférence globale et il importe que les

raisonnements effectués sur ceux-ci ne soulèvent pas de contestation importante parmi les acteurs du processus de décision ([19, Chap. 10]).

En accord avec cette interprétation, le raisonnement pragmatique (proposé dans [17] lors de l'introduction de l'idée de SD) consistant à partir d'une différence ($g(b) - g(a)$) révélatrice sous ambiguïté d'une préférence stricte (resp. d'une indifférence) et à la réduire (resp. à l'augmenter) jusqu'au point où elle ne semble plus révélatrice d'une situation préférentielle claire, peut suffire, en dehors de toute technique sophistiquée, à donner un ordre de grandeur de la valeur des seuils. En effet, compte tenu de ce qui précède, le bien-fondé de l'existence des SD tient au fait qu'il est généralement plus réaliste de donner une valeur raisonnable non nulle plutôt que de poser $p = q = 0$ (ce que l'on fait inconsciemment en n'introduisant pas de tels SD). On verra en V qu'il est cependant possible, dans certains cas, d'argumenter la valeur à donner aux seuils en fonction de la nature des évaluations des actions sur les conséquences entrant dans le support du critère considéré. Conformément à l'interprétation des SD comme seuils de probance, il n'en demeure pas moins que leur évaluation ne peut, le plus souvent, être exempte d'hypothèses volontaristes. Les SD sont introduits pour tenir compte à la fois de la complexité du problème et de la méfiance que l'homme d'étude se doit de garder vis-à-vis de sa méthode d'agrégation. A ce titre, il convient de noter que l'interprétation des SD n'est pas fondamentalement

différente de celles des divers paramètres "techniques" intervenant dans les méthodes d'agrégation de la "famille ELECTRE" (seuil de concordance, seuil de veto etc.). De même que dans ELECTRE I [16], le seuil de concordance vise à s'assurer que les critères concordants sont "suffisamment" importants, ici les SD permettent l'établissement sur chaque axe de signification d'une structure de préférence "suffisamment" probante.

Dans une démarche constructive, l'évaluation des SD ne saurait dépendre de la seule observation de propriétés de la structure de préférence des acteurs en présence. C'est dire que cette évaluation fera appel pour une large part au "bon sens" de l'homme d'étude. Ce "bon sens" doit amener l'homme d'étude à inciter les acteurs en présence à questionner la précision et l'exactitude des données utilisées. Une fois cela réalisé, il importe toutefois que l'évaluation des SD ne rentre pas en conflit avec l'appréciation subjective que portent ces acteurs sur la probance des évaluations des actions, faute de quoi les axes de signification mis à jour pourraient perdre leur rôle de base de dialogue pour la construction des préférences globales.

IV) Pourquoi deux seuils ?

Les considérations précédentes montrent la nécessité de renoncer à l'utilisation abusive de vrais critères. Le choix d'un modèle à deux seuils mérite maintenant d'être justifié.

Il pourrait sembler naturel si l'on cherche à séparer une zone d'indifférence d'une zone de préférence de ne recourir qu'à un seuil unique. Cependant, la manipulation dans la pratique du raisonnement pragmatique évoqué en III, conduit bien souvent à deux seuils plutôt qu'à un seul. La multiplicité des acteurs en présence lors d'une étude d'aide à la décision et un légitime principe de prudence viennent de plus renforcer l'idée qu'il est peu réaliste de chercher à séparer de façon probante par un seul seuil, les zones d'indifférence et de préférence stricte. La zone de préférence faible que le modèle du pseudo-critère introduit entre les deux seuils, doit donc être considérée comme une "zone-tampon" traduisant une hésitation entre la préférence stricte et l'indifférence, autrement dit, l'impossibilité de dégager de l'information disponible des éléments factuels clairs susceptibles d'emporter la conviction en faveur d'une situation préférentielle.

Les SD n'ont pas d'autre objectif que de séparer de façon probante l'indifférence de la préférence stricte. C'est dire qu'ils ne peuvent pas s'interpréter en termes de différents niveaux d'intensité de préférence. En particulier, la préférence faible n'est pas une préférence moins "marquée" qu'une préférence stricte, mais une préférence que l'on ne peut établir avec suffisamment de sécurité dans le cadre de l'étude. Recourir

à l'idée d'intensité de préférence impliquerait d'utiliser plus de deux seuils pour chercher à séparer des situations du type: "b est considérablement préféré à a", "b est fortement préféré à a" etc.. (Sur l'exploitation de cette idée voir [24]). Sans rentrer dans la discussion concernant l'idée même de l'existence d'une intensité de préférence entre des actions, mentionnons que celle-ci nous semble plus susceptible d'être modélisée à l'aide d'une fonction (cf. [29]) qu'en distinguant, de façon assez arbitraire, différents niveaux d'intensité à l'aide de seuils.

En tant que tel, le modèle du pseudo-critère est particulièrement bien adapté aux méthodes d'agrégation de type ELECTRE dans lesquelles il a été utilisé jusqu'à présent. Celles-ci ont en effet pour objectif de construire une relation de surclassement entre les actions potentielles sur la base d'un principe de type non compensatoire (sur cette notion nous renvoyons à [2]).

Dans une telle logique, il importe avant tout de pouvoir cerner les axes de signification où les comparaisons s'effectuent en faveur de l'une ou de l'autre des actions en présence, sans qu'il soit besoin de distinguer différents niveaux d'intensité de préférence. La zone de préférence faible permet de plus d'éviter avec ces méthodes des phénomènes d'instabilité, dus au passage "brutal" de l'indifférence à la préférence stricte, qu'il serait difficile de justifier intuitivement.

Mentionnons en dernier lieu que l'on pourrait fort bien imaginer un modèle à deux seuils plus riche que le modèle du pseudo-critère, dans la mesure où les seuils ne dépendraient pas de la position des actions sur l'échelle du critère mais, plus généralement, de l'évaluation des deux actions à comparer sur l'ensemble des conséquences prises en compte dans l'axe de signification du critère. D'un point de vue technique, rien ne s'oppose à l'utilisation d'un tel modèle. Cependant la complexité de l'évaluation des seuils qui s'en suivrait reviendrait à manipuler un volume d'information très important dont on peut se demander s'il serait véritablement significatif dans une démarche constructive.

V) L'évaluation des seuils de discrimination

La section III a montré le rôle complexe des SD. dans la modélisation des préférences. Leur évaluation dépend pour une bonne part de l'"art" et de l'expérience de l'homme d'étude. Comme nous l'avons déjà mentionné, le raisonnement pragmatique évoqué en III pourra parfois être suffisant pour avoir un ordre d'idée de la valeur à donner aux SD. Dans certaines situations se produisant fréquemment, il est cependant utile de structurer plus avant ce raisonnement. Nous passerons rapidement en revue deux cas simples se produisant lorsque l'axe de signification d'un critère ne comprend qu'une seule conséquence. Pour plus de détails nous renvoyons à [19], chap. 9.

a) Seuils de dispersion et seuils de discrimination

Dans de nombreuses situations, il n'est pas possible de résumer l'évaluation qu'une action a sur une conséquence par un seul nombre $x(a)$. Grâce à un calcul d'erreur, à une estimation de marges de tolérance ou de fluctuation, on peut souvent évaluer une action en ayant recours à :

- son évaluation $x(a)$,
- une approximation par excès de valeur : $x(a) + n^+(a)$,
- une approximation par défaut de cette valeur : $x(a) - n^-(a)$

où $n^+(a)$ et $n^-(a)$ peuvent fort bien être différents (marge d'erreur sur un devis de construction par exemple). Une telle évaluation constitue ce que nous appellerons une "évaluation ponctuelle entourée d'un seuil de dispersion".

Dans une telle situation, il est naturel de poser $g(a) = x(a)$. Cependant, compte-tenu de l'imprécision entourant le nombre $x(a)$, on ne peut regarder la différence $(g(a) - g(b))$ comme probante d'une situation de préférence stricte dès lors qu'elle est positive.

Il est facile de montrer que, lorsque les seuils de dispersion n^+ et n^- sont intrinsèques, c'est-à-dire qu'ils ne dépendent que de l'évaluation de l'action et non de l'action elle-même, on peut faire du critère $g(a)$ un pseudo-critère (on trouvera dans [27] certaines techniques permettant de traiter le cas où n^+ et n^- ne sont pas intrinsèques).

Les seuils de dispersion étant intrinsèques, on peut poser:

$$n^+(a) = u(g(a))$$

$$n^-(a) = u'(g(a)).$$

Il est alors raisonnable de considérer que b est strictement préféré à a lorsque:

$$g(b) - u'[g(b)] > g(a) + u[g(a)],$$

c'est-à-dire lorsque les deux intervalles d'imprécision sont disjoints.

Si l'on fait décroître $g(b)$, les deux intervalles d'imprécision vont se chevaucher progressivement. On peut admettre que ce chevauchement ne traduira une situation d'indifférence entre b et a que lorsque:

$$g(a) \in [g(b) - u'(g(b)) ; g(b) + u(g(b))]$$

$$\text{et } g(b) \in [g(a) - u'(g(a)) ; g(a) + u(g(a))],$$

situation où l'évaluation de chaque action est comprise dans l'intervalle d'imprécision de l'autre action.

La situation intermédiaire correspond alors à un domaine d'hésitation entre indifférence et préférence stricte que l'on a interprétée comme une préférence faible de b par rapport à a .

On trouvera dans [19, chap. 9] une justification détaillée de ces conventions que des considérations de bon sens nous ont permis de comprendre. On montre qu'il est toujours possible de rendre compte de ces conventions à l'aide d'un pseudo-critère,

c'est-à-dire qu'il existe deux fonctions $p(g(a))$ et $q(g(a))$ telles que:

$$g(b) > g(a) + p(g(a)) \Leftrightarrow g(b) - u'(g(b)) > g(a) + u(g(a))$$

$$\text{et } g(b) > g(a) + q(g(a)) \Leftrightarrow \begin{cases} g(b) > g(a) + u(g(a)) \\ \text{ou} \\ g(a) < g(b) - u'(g(b)) \end{cases}$$

sous réserve que u et u' vérifient une condition de cohérence simple qui est toujours satisfaite pour des seuils variant linéairement avec l'évaluation. Dans ce dernier cas, un calcul direct permet d'en déduire les seuils de discrimination associés: Avec $u'(g(a)) = \alpha' + \beta' g(a)$ et $u(g(a)) = \alpha + \beta g(a)$ ^(*), on a:

$$p(g(a)) = \frac{\alpha + \alpha' + (\beta + \beta') g(a)}{1 - \beta'}$$

et

$$q(g(a)) = \text{Min}(\alpha + \beta g(a), \frac{\alpha' + \beta' g(a)}{1 - \beta'}).$$

Ces conventions ne sont cependant pas les seules envisageables. Dans [26] face à des évaluations du même type, les auteurs ont choisi de considérer qu'il y avait préférence stricte dès lors que les deux intervalles d'imprécision étaient disjoints et préférence faible dans tous les autres cas sauf lorsque $g(a) = g(b)$, ce qui revient à garder le même seuil de préférence que précédemment avec un seuil d'indifférence égal à 0.

(*) Pour éviter certaines incohérences, il est naturel d'imposer : $\beta' \leq 1$ et $\beta \geq -1$

b) Evaluations distributionnelles et seuils de discrimination

Comme nous l'avons mentionné au I, il arrive fréquemment qu'il soit impossible de connaître avec précision les conséquences de la mise à exécution d'une action potentielle mais que l'on puisse apprécier qualitativement la vraisemblance des différentes conséquences possibles. C'est ce qu'on appelle une évaluation "distributionnelle". Rappelons que la modulation de la vraisemblance entre les diverses valeurs possibles n'a pas forcément ici la signification d'une probabilité. Lorsque la distribution de vraisemblance ne présente pas de singularités trop importantes (et qu'en particulier elle est unimodale), il est tentant de chercher à opérer une troncature de cette distribution pour arriver à un "intervalle de confiance" et ainsi se ramener au cas précédent. Cependant, il serait nettement plus probant non pas d'effectuer une troncature a priori mais de pouvoir apprécier la vraisemblance de l'intervalle où les évaluations distributionnelles se chevauchent et de tenter de tirer des conclusions selon que l'importance de cet intervalle est ou non négligeable. Cette technique n'est cependant pas exempte de difficultés dans le cas général, rien ne garantissant l'existence de seuils conformes à la définition des SD.

Recourir à une troncature implique souvent de renoncer à s'intéresser aux valeurs extrêmes des conséquences de la mise à exécution d'une action et ne permet donc pas (avec un seul critère) de rendre compte des phénomènes liés à la présence d'aversion ou de goût pour le risque. Dans ces cas, lorsque la vraisemblance est de type probabiliste, il peut être utile de recourir à un critère d'espérance mathématique d'utilité entouré de seuils [20].

Conclusion

Les techniques que nous venons d'évoquer ne conduisent évidemment pas, dans tous les cas, à cerner sur des bases solides les valeurs à donner aux SD. Des recherches restent à faire pour mieux asseoir les valeurs des SD. Comme il est écrit dans [22] : "Fixer les seuils relève autant d'une appréciation subjective que d'un calcul d'erreur au sens de la physique. Ces seuils ne sont pas des grandeurs expérimentales qu'il faudrait approcher au plus juste. Ce sont au contraire des grandeurs d'opportunité qu'il est commode, voire nécessaire, d'introduire pour refléter ce qu'il y a d'approximatif ou d'arbitraire dans les données".

L'introduction de seuils de discrimination, d'interprétation complexe et d'évaluation difficile doit, bien sûr, s'accompagner d'une analyse de robustesse importante du modèle. Ces difficultés d'estimation et d'interprétation sont communes à de nombreux paramètres intervenant dans une étude d'aide à la décision fondée sur une démarche constructive. Elles sont cependant, dans ce cadre, plus le reflet d'une volonté d'honnêteté et de rigueur de la part de l'homme d'étude que d'une faiblesse de sa méthodologie.

Références

- [1] Bouyssou, D., (1984), Approches constructives et descriptives d'aide à la décision. Fondements et comparaison, Thèse de 3^{ème} cycle, Université de Paris Dauphine.
- [2] Bouyssou, D., Vansnick, J.C., (1985), Non compensatory and generalized noncompensatory preference structures , Cahier du Lamsade n° 59, Université de Paris-Dauphine.
- [3] McCord, M., De Neufville, R., (1983), Empirical demonstration that expected utility decision analysis is not operational, in Stigum B., Wenstøp F. (Eds), Foundations of utility and Risk Theory, D. Reidel.
- [4] Cozzens, M., Roberts, F., (1982), Double semi-orders and double indifference graphs, SIAM journal on algebraic discrete methods, Vol. 3, pp. 466-83.
- [5] Fishburn, P.C., (1970), Utility theory for decision making, Wiley, N.Y.
- [6] Fishburn, P.C., (1978), A survey of multiattribute/multicriteria evaluation theories, in Zionts S., (Ed) Multicriteria Problem Solving, Springer Verlag.
- [7] Hershey, J.C., Kunreuther, H., Schoemaker, P., (1982), Sources of bias in assessment procedures for utility functions, Management Science, Vol. 28, pp. 936-54.

- [8] Goicochea, A., Hansen, D.R., Duckstein, L., (1982), Multiobjective decision analysis with engineering and business applications, Wiley, N.Y.
- [9] Jacquet-Lagrèze, E., (1975), How we can use the notion of semi-orders to build outranking relations in multicriteria decision making, in Wendt, D., Vled, C., (Eds), Utility, Probability and human decision making, D. Reidel.
- [10] Keeney, R.L., Raiffa, H., (1976), Decisions with multiple objectives : Preferences and value trade-offs, Wiley, N.Y.
- [11] Le François, A., (1959), Approximations expérimentales et numériques, Editions de la revue d'optique, Paris.
- [12] Luce, R.D., (1956), Semiorders and a theory of utility discrimination, Econometrica, Vol. 24, pp. 178-91.
- [13] Ney, G., (1968), Travaux de laboratoire de mesures électriques. Théorie et pratique des erreurs expérimentales, Polycopié, Ecole Supérieure d'électricité, Paris.
- [14] Roubens, M., Vincke, Ph. (1983), Linear Fuzzy graphs, Fuzzy sets and and systems, Vol. 10, pp. 79-86.
- [15] Roubens, M., Vincke, Ph. (1984), Preference modelling, livre à paraître.
- [16] Roy, B., (1968), Classement et choix en présence de points de vue multiples: la méthode Electre, RIRO, No. 8, pp. 57-75.

- [17] Roy, B., (1975), Vers une méthodologie générale d'aide à la décision, Revue Metra, Vol. XIV, pp. 459-97.
- [18] Roy, B., (1978), Electre III: un algorithme de classement fondé sur une représentation floue des préférences en présence de critères multiples, cahiers du CERO, Vol. 20, pp. 3-24.
- [19] Roy, B., (1985), Méthodologie Multicritère d'Aide à la Décision, Economica.
- [20] Roy, B., Bouyssou, D., (1983), Comparaison sur un exemple précis de deux modèles concurrents d'aide à la décision, Document du Lamsade No. 22, Université de Paris Dauphine, (version anglaise à paraître dans EJOR, 1986).
- [21] Roy, B., Hugonnard, J.C., (1982), Classement des prolongements de lignes de métro en banlieue parisienne, Cahiers du CERO, Vol., 24, pp. 153-71.
- [22] Roy, B., Present, M., Silhol, D., (1983), Programmation de la rénovation des stations du métro parisien: un cas d'application de la méthode Electre III, Document du Lamsade, No. 24, Université de Paris Dauphine, (version anglaise à paraître dans EJOR).
- [23] Roy, B., Vincke, Ph., (1984), Relational systems of preference with one several pseudo-criteria: new concepts and new results, Management Science, Vol. 30, pp. 1323-35.

- [24] Saaty, T.L., (1980), The analytical hierarchy process, McGraw Hill, N.Y.
- [25] Schnabele, P., (1984), Le choix d'un aménagement aquacole, Cahier du Lamsade à paraître, Université de Paris Dauphine.
- [26] Siskos, J., Lochard, J., Lombard, J., (1983), A Multicriteria decision making methodology under fuzziness, in Zimmerman H.J. Zadeh, L.A., Gaines, B.R., (Eds), Decision analysis and fuzzy sets, TIMS studies in management science, North Holland.
- [27] Siskos, J., Hubert, Ph., (1983), Multicriteria analysis of the impacts of energy alternatives: a survey and a new comparative approach, EJOR, Vol., 13, pp. 278-99.
- [28] Skalka, J.M., Bouyssou, D., Bernabeu, Y.A , (1983), Electre III et IV Aspects méthodologiques et guide d'utilisation, Document du Lamsade, No. 25, Université de Paris Dauphine.
- [29] Vansnick, J.C., (1984), Strength of preference. Theoretical and Practical aspects in J.P. Brans (Ed), O.R.'84, North Holland.
- [30] Vincke, Ph., (1980), Vrai, quasi, pseudo et précritère dans un ensemble fini: propriétés et algorithmes, cahiers du Lamsade No. 27, Université de Paris Dauphine.
- [31] Zeleny, M., (1982), Multiple criteria decision making, McGraw-Hill.