

CAHIER DU LAMSADE

Laboratoire d'Analyse et Modélisation de Systèmes pour l'Aide à la Décision

(Université de Paris-Dauphine)

Unité Associée au C.N.R.S. n° 825

DE BORDA ET CONDORCET

A L'AGREGATION MULTICRITERE

CAHIER N° 70
mai 1986

J.C. VANSNICK

TABLE DES MATIERES

	<u>Pages</u>
Abstract	I
Résumé	I
Introduction	1
Partie 1 : La méthode de Borda	2
Partie 2 : La méthode de Condorcet	5
Partie 3 : Le problème de l'agrégation multicritère	8
Partie 4 : De Borda à l'agrégation multicritère	10
Partie 5 : De Condorcet à l'agrégation multicritère	13
Références	24

FROM BORDA AND CONDORCET TO THE PROBLEM OF MULTICRITERIA AGGREGATION

Abstract

In this paper, we first study the ideas underlying the methods of Borda and Condorcet in the field of collective choice and try to understand their fundamental differences. As the aggregation problem in multicriteria analysis is formally similar to the aggregation problem in social choice theory, we then try to adapt the ideas of Borda and Condorcet to the problem of multicriteria aggregation.

DE BORDA ET CONDORCET A L'AGREGATION MULTICRITERE

Résumé

Le but de ce cahier est d'étudier les idées sous-jacentes aux travaux de Borda et de Condorcet, de bien comprendre leurs différences et de voir à quoi elles peuvent conduire lorsqu'on essaie de les adapter au problème de l'agrégation multicritère qui, sur le plan formel, est proche de celui de l'agrégation en théorie de la décision collective.

INTRODUCTION

En 1770, Jean-Charles de Borda présenta, devant l'Académie des Sciences de Paris, une méthode permettant de construire un avis collectif concernant un ensemble de candidats au départ de la connaissance de m classements individuels de ces candidats.

Quinze ans plus tard, Marie Jean Antoine Caritat, marquis de Condorcet, proposa à son tour une méthode poursuivant les mêmes objectifs, mais pourtant très différente de celle de Borda.

Ces deux méthodes, que l'on oppose très souvent, constituent les fondements de ce qui est maintenant connu sous le nom de théorie du choix social (ou de la décision collective).

Le but de cet article est d'étudier les idées sous-jacentes aux travaux de Borda et de Condorcet, de bien comprendre leurs différences et de voir à quoi elles peuvent conduire lorsqu'on essaie de les adapter au problème de l'agrégation multicritère qui, sur le plan formel, est proche de celui de l'agrégation en théorie de la décision collective.

L'article comporte cinq parties. Dans la première, nous rappelons et analysons la méthode de Borda. La deuxième est consacrée à la méthode de Condorcet. Dans la troisième, nous introduisons le problème de l'agrégation multicritère. Dans les parties quatre et cinq enfin, nous étudions comment adapter les idées de Borda, d'une part, et de Condorcet, d'autre part, au problème de l'agrégation multicritère.

PARTIE 1 : LA METHODE DE BORDA

Soit C un ensemble de n candidats et $\succ_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$) m ordres stricts totaux sur C (*) correspondant aux classements de ces candidats par m votants.

Pour construire une relation de préférence collective $\succ$ sur C (**), Borda propose de procéder de la manière suivante :

1°) $\forall c \in C$ et $\forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$, déterminer $r_i(c)$ = rang de c dans le classement du votant i et définir

$$M_i^{(k_1, k_2)}(c) = k_1 + (n - r_i(c)) \cdot k_2$$

où k_1 et k_2 désignent deux constantes réelles avec $k_2 > 0$,

2°) $\forall c', c'' \in C$,

déclarer que $c' \succ c''$

si et seulement si (ssi)

$$\sum_{i=1}^m M_i^{(k_1, k_2)}(c') > \sum_{i=1}^m M_i^{(k_1, k_2)}(c'').$$

(*) Une relation binaire R définie sur un ensemble E est un ordre strict total sur E ssi R est

- asymétrique ($\forall e_1, e_2 \in E : e_1 R e_2 \Rightarrow e_2 \not R e_1$)

- transitive ($\forall e_1, e_2, e_3 \in E : e_1 R e_2$ et $e_2 R e_3 \Rightarrow e_1 R e_3$)

et connexe ($\forall e_1, e_2 \in E$ avec $e_1 \neq e_2 : e_1 R e_2$ ou/et $e_2 R e_1$).

(**) On dit qu'une relation binaire R définie sur un ensemble E est une relation de préférence sur E ssi elle est asymétrique.

Il est clair que la relation de préférence collective $\succ$ ainsi obtenue est un "strict weak order" sur C (*), c'est-à-dire qu'elle fournit un classement des candidats avec possibilité d'ex aequo. Par ailleurs, il est immédiat que $\succ$ est indépendante du choix des constantes k_1 et k_2 .

Pour illustrer la méthode, nous prendrons $k_1 = k_2 = 1$ et nous adopterons les notations suivantes :

$$\forall c \in C \text{ et } \forall i \in \{1, 2, \dots, m\},$$

$$M_i(c) = M_i^{(1,1)}(c) = (n+1) - r_i(c)$$

$$M(c) = \sum_{i=1}^m M_i(c).$$

Exemple 1 : $C = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$, $m = 3$ (il y a donc 4 candidats et trois votants).

c_1	$\succ_1$	c_2	$\succ_1$	c_3	$\succ_1$	c_4
c_1	$\succ_2$	c_2	$\succ_2$	c_4	$\succ_2$	c_3
c_2	$\succ_3$	c_3	$\succ_3$	c_4	$\succ_3$	c_1

Il vient :

$$\left. \begin{array}{l} M_1(c_1) = 5 - 1 = 4 \\ M_2(c_1) = 5 - 1 = 4 \\ M_3(c_1) = 5 - 4 = 1 \end{array} \right\} \rightarrow M(c_1) = 4 + 4 + 1 = 9$$

(*) Une relation binaire R définie sur un ensemble E est un "strict weak order" sur E ssi R est asymétrique et négativement transitive ($\forall e_1, e_2, e_3 \in E : e_1 \not R e_2 \text{ et } e_2 \not R e_3 \Rightarrow e_1 \not R e_3$).

On peut démontrer que : $[R \text{ ordre strict total sur } E] \Rightarrow [R \text{ "strict weak order" sur } E]$.

La notion de "strict weak order" correspond à l'idée de classement avec possibilité d'ex aequo, tandis que celle d'ordre strict total correspond à l'idée de classement sans ex aequo.

$$\left. \begin{array}{l} M_1(c_2) = 5 - 2 = 3 \\ M_2(c_2) = 5 - 2 = 3 \\ M_3(c_2) = 5 - 1 = 4 \end{array} \right\} \rightarrow M(c_2) = 3 + 3 + 4 = 10$$

et de même,

$$M(c_3) = 2 + 1 + 3 = 6$$

$$M(c_4) = 1 + 2 + 2 = 5.$$

Par conséquent, l'application des idées de Borda conduit à déclarer dans ce cas que l'avis collectif est l'ordre strict total défini par $c_2 \succ c_1 \succ c_3 \succ c_4$.

Lorsque l'on examine les travaux de Borda (voir [1]), on constate que, pour construire une relation de préférence collective sur C , il associe d'abord, $\forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$, une cote $M_i^{(k_1, k_2)}(c)$ à chaque candidat c . Ces cotes sont telles que :

$$\forall c', c'' \in C, c' \succ_i c'' \text{ ssi } M_i^{(k_1, k_2)}(c') > M_i^{(k_1, k_2)}(c'')$$

mais Borda leur attribue une signification beaucoup plus forte que cette seule signification ordinale. En effet, il interprète $M_i^{(k_1, k_2)}(c)$ comme une quantification du mérite attribué au candidat c par le votant i , k_1 représentant le degré de mérite associé au candidat classé en dernière position dans le classement d'un votant quelconque et k_2 la différence entre les degrés de mérite de deux candidats successifs dans le classement de n'importe quel votant. Nous dirions actuellement, en utilisant la terminologie de la théorie du mesurage, que Borda considère que

$$M_i^{(k_1, k_2)} : C \rightarrow \mathbb{R} : c \rightarrow M_i^{(k_1, k_2)}(c)$$

est une échelle d'intervalle, c'est-à-dire que $M_i^{(k_1, k_2)}$ est définie à une transformation affine positive près ($\alpha M_i^{(k_1, k_2)} + \beta$ avec $\alpha > 0$) ; l'apparition des deux constantes k_1 et k_2 , avec $k_2 > 0$, dans la présentation de sa méthode est d'ailleurs tout à fait significative de ce point de vue.

Il apparaît assez clairement que, pour comparer collectivement deux candidats c' et c'' , l'idée de Borda est de comptabiliser, d'une part, les différences de mérite entre c' et c'' en faveur de c' et, d'autre part, les différences de mérite entre c' et c'' en faveur de c'' et de déclarer que

l'un de ces candidats est collectivement préféré à l'autre si et seulement si les différences qui lui sont favorables font plus que compenser celles favorables à l'autre.

Etant donné l'interprétation que Borda donne aux $M_i^{(k_1, k_2)}(c)$ et sa volonté de mettre tous les votants sur le même pied (par souci de démocratie), ceci conduit à la formulation mathématique :

$$\begin{aligned} & \text{déclarer que } c' \succ c'' \\ & \text{ssi} \\ & \sum_{i \in P(c', c'')} [M_i^{(k_1, k_2)}(c') - M_i^{(k_1, k_2)}(c'')] \\ & > \sum_{i \in P(c'', c')} [M_i^{(k_1, k_2)}(c'') - M_i^{(k_1, k_2)}(c')] \end{aligned}$$

où, $\forall c, \bar{c} \in C : P(c, \bar{c}) = \{i \in \{1, 2, \dots, m\} | c \succ_i \bar{c}\}$.

En regroupant dans le premier membre les termes relatifs à c' et dans le second ceux relatifs à c'' , on obtient :

$$\begin{aligned} & \text{déclarer que } c' \succ c'' \\ & \sum_{i=1}^m M_i^{(k_1, k_2)}(c') > \sum_{i=1}^m M_i^{(k_1, k_2)}(c''), \end{aligned}$$

ce qui constitue la présentation classique de la méthode de Borda.

PARTIE 2 : LA METHODE DE CONDORCET

Tout comme précédemment, soit C un ensemble de n candidats et $\succ_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$) m ordres stricts totaux sur C (*) correspondant aux classements de ces candidats par m votants.

(*) Signalons que la méthode de Condorcet peut être appliquée, telle que nous allons la présenter, dans le cas où les $\succ_i$ sont des "strict weak orders". En ce qui concerne la méthode de Borda, quelques aménagements sans importance pour notre propos sont nécessaires pour pouvoir l'appliquer dans le cas de "strict weak orders".

Pour construire une relation de préférence collective $\succ$ sur C , Condorcet propose de procéder de la manière suivante :

1°) $\forall c', c'' \in C$, déterminer

$$P(c', c'') = \{i \in \{1, 2, \dots, m\} \mid c' \succ_i c''\}$$

2°) $\forall c', c'' \in C$, déclarer que $c' \succ c''$ si et seulement si

$$\# P(c', c'') > \# P(c'', c')$$

où, pour tout ensemble fini E , $\# E$ représente le nombre d'éléments de E (cardinal de E).

Exemple 2 : l'application de la méthode de Condorcet aux données de l'exemple 1 conduit à :

$P(c_i, c_j)$	c_1	c_2	c_3	c_4
c_1	-	{1,2}	{1,2}	{1,2}
c_2	{3}	-	{1,2,3}	{1,2,3}
c_3	{3}	ϕ	-	{1,3}
c_4	{3}	ϕ	{2}	-

et par conséquent :

$$\begin{aligned} c_1 \succ c_2, \quad c_1 \succ c_3, \quad c_1 \succ c_4, \\ c_2 \succ c_3, \quad c_2 \succ c_4, \\ c_3 \succ c_4. \end{aligned}$$

L'application des idées de Condorcet conduit donc à déclarer dans ce cas que l'avis collectif est l'ordre strict total défini par

$$c_1 \succ c_2 \succ c_3 \succ c_4.$$

Comme Condorcet le faisait lui-même remarquer (voir [4]), la relation de préférence collective obtenue par sa méthode n'est pas nécessairement

transitive ; elle peut même présenter des circuits comme dans l'exemple ci-dessous.

Exemple_3 : $C = \{c_1, c_2, c_3\}$, $m = 5$ (il y a donc 3 candidats et 5 votants).

c_1	$\succ_1$	c_2	$\succ_1$	c_3
c_1	$\succ_2$	c_2	$\succ_2$	c_3
c_3	$\succ_3$	c_1	$\succ_3$	c_2
c_2	$\succ_4$	c_3	$\succ_4$	c_1
c_2	$\succ_5$	c_3	$\succ_5$	c_1

L'application de la méthode de Condorcet à ces données conduit à :

$P(c_i, c_j)$	c_1	c_2	c_3
c_1	-	$\{1,2,3\}$	$\{1,2\}$
c_2	$\{4,5\}$	-	$\{1,2,4,5\}$
c_3	$\{3,4,5\}$	$\{3\}$	-

et par conséquent :

$$c_1 \succ c_2, c_2 \succ c_3 \text{ et } c_3 \succ c_1 .$$

Ce résultat, à priori paradoxal, se comprend aisément si l'on se rappelle que la transitivité d'une relation est une notion qui fait intervenir trois éléments ; dès lors, bien que l'on parte de relations individuelles transitives, il n'y a rien d'étonnant à ce que l'on perde cette propriété de transitivité en utilisant une méthode d'agrégation où les candidats sont traités deux à deux, indépendamment des $(n-2)$ autres candidats.

En fait, pour comparer collectivement deux candidats c' et c'' , Condorcet comptabilise simplement, d'une part, les votants qui préfèrent c' à c'' et, d'autre part, les votants qui préfèrent c'' à c' et déclare que l'un des

candidats est collectivement préféré à l'autre si et seulement si le nombre de votants qui lui sont favorables est supérieur au nombre de votants favorables à l'autre. Que c' et c'' soient proches ou non dans les classements des différents votants n'intervient en aucune façon chez Condorcet. Sa méthode est telle que :

$$\forall c_1, c_2, c_3, c_4 \in C,$$

$$[P(c_1, c_2) = P(c_3, c_4) \text{ et } P(c_2, c_1) = P(c_4, c_3)]$$

$$\Rightarrow$$

$$[c_1 \succ c_2 \Rightarrow c_3 \succ c_4].$$

Signalons que, comme ceci traduit le fait que la préférence collective entre deux candidats c' et c'' dépend uniquement des sous-ensembles de votants qui préfèrent c' à c'' et c'' à c' , cette propriété a été prise comme définition de la non-compensation par P.C. Fishburn (voir [3]).

PARTIE 3 : LE PROBLEME DE L'AGREGATION MULTICRITERE

Soient $X_1, X_2, \dots, X_m$ m attributs relatifs à un problème de décision, ce qui signifie que, $\forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$, X_i est un ensemble (de cardinal supérieur ou égal à deux) dont les éléments représentent les niveaux (les états) associés à un point de vue (un axe de signification, une dimension) sous-jacent.

Nous supposerons que ces attributs sont tels que, $\forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$, le décideur puisse exprimer ses préférences vis-à-vis des niveaux de X_i indépendamment des $(m-1)$ autres attributs et que ces préférences peuvent être modélisées par un ordre strict total, que nous noterons P_i , sur X_i .

Exemple 4 : soit un problème d'achat de matériel pour lequel deux points de vue seulement intéressent le décideur : le coût d'achat et la qualité. Les deux attributs associés à ces deux points de vue pourraient être :

$$X_1 = \{s \times (1 \$) \mid s \in \{5.000, 5.001, 5.0002, \dots, 10.000\}\}$$

$$X_2 = \{N_1, N_2, N_3, N_4\}$$

où N_1 = qualité faible, ceci signifiant que le même type de matériel, livré chez d'autres personnes, est parfois tombé en panne dès la première année d'utilisation et que les ennuis sont en général assez fréquents ;

N_2 = qualité moyenne, ceci signifiant que les personnes possédant le même type de matériel ont de temps à autre des ennuis avec lui, mais estiment que cela reste dans des limites acceptables ;

N_3 = bonne qualité, ceci signifiant que les personnes possédant le même type de matériel ont très peu d'ennuis à cause de lui et peuvent le recommander sans crainte ;

N_4 = qualité exceptionnelle, à savoir que les personnes possédant le même type de matériel n'ont jamais aucun ennui à cause de lui et le recommandent très chaudement.

En ce qui concerne les ordres stricts totaux modélisant les préférences du décideur vis-à-vis des éléments de X_1 , d'une part, et de X_2 , d'autre part, il est normal de penser que

$P_1 = < \text{(strictement plus petit que)} \quad \text{et}$
 que P_2 est défini par : $\forall i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$,

$$N_i P_2 N_j \quad \text{ssi} \quad i > j.$$

La version la plus simple du problème de l'agrégation multicritère (*) consiste à construire une relation de préférence globale $\succ$ sur le produit cartésien $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_m$ au départ de la connaissance des m ordres stricts totaux P_i sur X_i ainsi que d'informations supplémentaires (concernant notamment l'importance des attributs) à recueillir auprès du décideur.

L'analogie avec le problème de l'agrégation en théorie de la décision collective apparaît immédiatement si l'on observe que chaque ordre strict total P_i sur X_i induit un "strict weak order" $\succ_i$ sur le produit cartésien $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_m$ en posant

$$\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_m), y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in X$$

$$x \succ_i y \quad \text{ssi} \quad x_i P_i y_i.$$

(*) Pour une présentation des différentes formes que peut revêtir le problème de l'agrégation multicritère, nous renvoyons au chapitre 10 du livre de B. ROY "Méthodologie multicritère d'aide à la décision" (Economica, Paris, 1985).

La différence essentielle entre les deux problèmes d'agrégation réside dans le fait que, par souci de démocratie, les différents votants doivent être mis sur le même pied alors qu'en analyse multicritère, il s'agit, au contraire, de bien différencier les attributs compte tenu du système de valeurs du décideur.

PARTIE 4 : DE BORDA A L'AGREGATION MULTICRITERE

Soient $x' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_m)$ et $x'' = (x''_1, x''_2, \dots, x''_m)$ deux éléments de $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_m$. Pour comparer globalement x' et x'' , il convient de comparer ce qui plaide en faveur de x' vis-à-vis de x'' et ce qui plaide en faveur de x'' vis-à-vis de x' . L'adaptation des idées de Borda à l'agrégation multicritère nous conduit à faire intervenir les différences de niveaux entre x'_i et x''_i pour "mesurer" ce qui plaide en faveur de l'un des éléments x' , x'' vis-à-vis de l'autre. Une façon assez naturelle d'opérationnaliser cette idée consiste à déterminer, sur chaque attribut X_i , une fonction de valeur mesurable F_i , c'est-à-dire une application de X_i dans $\mathbb{R}$ telle que

$$1^\circ) \forall x_i, y_i \in X_i, x_i P_i y_i \text{ ssi } F_i(x_i) > F_i(y_i)$$

$$2^\circ) \forall x_i, y_i, z_i, w_i \in X_i \text{ avec } x_i P_i y_i \text{ et } z_i P_i w_i,$$

$\frac{F_i(x_i) - F_i(y_i)}{F_i(z_i) - F_i(w_i)}$ mesure la différence de préférence entre x_i et y_i , la différence de préférence entre z_i et w_i étant prise comme unité (on dit aussi : mesure l'intensité de la préférence de x_i sur y_i par rapport à celle de z_i sur w_i).

Une telle fonction est définie à une transformation affine positive près ($\alpha F_i + \beta$ avec $\alpha > 0$), c'est-à-dire qu'elle constitue une échelle d'intervalle.

Nous sommes ainsi tout à fait dans l'optique Borda. Il convient cependant d'être plus prudent que lui pour ce qui est de l'obtention des échelles d'intervalle et d'éviter de construire les fonctions F_i sur X_i sans interroger le décideur ; en effet, les seules données dont on dispose sur les préférences du décideur vis-à-vis des niveaux de X_i (à savoir P_i) sont ordinales et le passage de l'ordinal au cardinal représente un saut important (et souvent périlleux !).

Ainsi, par exemple, nous pensons qu'il est sans fondement, lorsque X_i est un attribut quantitatif et que $P_i = >$ ou $<$ (comme dans le cas du premier attribut de l'exemple 4), de considérer que

$$F_i : X_i \rightarrow \mathbb{R} : x_i \rightarrow F_i(x_i) = \begin{cases} x_i & \text{si } P_i = > \\ -x_i & \text{si } P_i = < \end{cases}$$

est une fonction de valeur mesurable sur X_i ; de même, il nous paraît dangereux, lorsque X_i est un attribut qualitatif dont les niveaux sont bien définis (comme dans le cas du deuxième attribut de l'exemple 4), de considérer que les différences de préférence entre deux niveaux successifs quelconques de cet attribut sont toutes égales.

Nous ne nous étendrons pas davantage ici sur le problème des fonctions de valeur mesurables, qui peut faire l'objet à lui seul d'un article entier (voir [7]), mais nous tenons à signaler qu'il s'agit, à notre sens, de l'un des problèmes les plus importants de l'analyse multicritère.

Lorsque l'on dispose, $\forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$, d'une fonction de valeur mesurable F_i sur X_i , il suffit, pour comparer globalement x' et x'' dans l'optique Borda, d'adopter la règle d'agrégation suivante :

déclarer que x' est globalement préféré à x'' (notation $x' \succ x''$)
si et seulement si

les différences de préférence entre x'_i et x''_i , $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ en faveur de x' font plus que compenser les différences de préférence entre x'_i et x''_i , $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, en faveur de x'' .

Si, $\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_m$, nous notons $P(x, y) = \{i \in \{1, 2, \dots, m\} \mid x_i P_i y_i\}$, ceci peut s'écrire :

déclarer que $x' \succ x''$

ssi

l'"importance" de $\{F_i(x'_i) - F_i(x''_i) \mid i \in P(x', x'')\}$

est plus grande que

l'"importance" de $\{F_i(x''_i) - F_i(x'_i) \mid i \in P(x'', x')\}$

Ainsi apparaît-il que, dans l'optique Borda, le problème de l'importance des attributs se pose dans les termes suivants : comment mesurer l'importance d'un ensemble de différences de préférence relatives à des attributs différents sachant que, sur chaque attribut X_i , ces différences sont mesurées sur une échelle d'intervalle F_i traduisant l'idée d'intensité de la préférence ?

La réponse à ce problème est conceptuellement très simple : comme on dispose sur chaque attribut d'une échelle d'intervalle traduisant l'idée d'intensité de la préférence, on peut parler, pour chaque attribut X_i , d'une unité " $u_i(F_i)$ " d'intensité de préférence et il suffit de relier entre elles ces différentes unités afin de pouvoir les sommer.

Sur le plan pratique, ceci conduit à déterminer m constantes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ telles que, $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$, le décideur considère qu'une différence de préférence égale à " $\lambda_i \cdot u_j(F_j)$ " sur l'attribut X_j est équivalente à une différence de préférence égale à " $\lambda_j \cdot u_i(F_i)$ " sur l'attribut X_i . En effet, dès que l'on dispose de ces constantes, on peut convertir chaque unité d'intensité de préférence " $u_j(F_j)$ ", $j \in \{1, 2, \dots, m\}$, en l'une quelconque mais fixée d'entre elles (par exemple en " $u_1(F_1)$ "); on a alors :

$$u_j(F_j) = \frac{\lambda_j}{\lambda_1} \cdot u_1(F_1) \quad \text{et dès lors mesurer l'importance de } \{F_i(x'_i) - F_i(x''_i) \mid i \in P(x', x'')\} \quad \text{par} \quad \sum_{i \in P(x', x'')} (F_i(x'_i) - F_i(x''_i)) \cdot \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \cdot u_1(F_1).$$

On en arrive ainsi à l'énoncé suivant de la règle d'agrégation :
déclarer que $x' \succ x''$

$$\text{ssi} \quad \sum_{i \in P(x', x'')} \lambda_i \cdot (F_i(x'_i) - F_i(x''_i)) > \sum_{i \in P(x'', x')} \lambda_i \cdot (F_i(x''_i) - F_i(x'_i)) \quad (1)$$

$$\text{Comme (1) ssi} \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot F_i(x'_i) > \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot F_i(x''_i),$$

on peut encore, en posant,

$$\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in X, \quad F(x) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot F_i(x_i),$$

énoncer cette règle :

$$\text{déclarer que } x' \succ x'' \quad \text{ssi} \quad F(x') > F(x'').$$

Ceci montre que la relation de préférence globale $\succ$ obtenue dans l'optique Borda est un "strict weak order".

Les coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ qui apparaissent dans les formules précédentes sont souvent appelés "poids" des attributs 1, 2, ... m. Notons que ces "poids" sont des "constantes d'échelle" en ce sens qu'ils dépendent des échelles d'intervalle F_i : si la fonction F_i était remplacée par la fonction $F'_i = \alpha F_i + \beta$ (avec $\alpha > 0$), le "poids" λ_i serait remplacé par $\lambda'_i = \frac{1}{\alpha} \cdot \lambda_i$.

Une question intéressante est celle de savoir s'il peut exister un quelconque lien entre les "poids" que peut attribuer assez spontanément un décideur aux divers attributs (c'est-à-dire sans qu'on lui ait expliqué de façon précise de quoi il s'agit) et les constantes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ associées à un jeu de fonctions de valeur mesurables particulières.

Nous conjecturons que, si lien il y a, il doit exister dans le cas où les λ_i correspondent à des fonctions de valeur mesurables telles que, $\forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $F_i(x_i) = 0$ lorsque x_i est un niveau de X_i qui n'est jugé ni attractif ni répulsif par le décideur et $F_i(x_i) = 1$ lorsque x_i est un niveau de X_i considéré par le décideur comme tout à fait attractif. Cette conjecture correspond à l'idée que, lorsqu'un décideur déclare qu'un attribut i est plus important qu'un attribut j , cela signifie que la différence de préférence entre un niveau "moyen" (ni attractif ni répulsif) et un niveau "excellent" (tout à fait attractif) est plus grande sur l'attribut i que sur l'attribut j .

PARTIE 5 : DE CONDORCET A L'AGREGATION MULTICRITERE

Soient $x' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_m)$ et $x'' = (x''_1, x''_2, \dots, x''_m)$ deux éléments de $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_m$. Comme nous l'avons déjà signalé au début de la quatrième partie, il faut, pour comparer globalement x' et x'' , comparer ce qui plaide en faveur de x' vis-à-vis de x'' et ce qui plaide en faveur de x'' vis-à-vis de x' . Toutefois, on peut mettre dans les "plateaux" "ce qui plaide en faveur d'un élément vis-à-vis d'un autre" des choses bien différentes et c'est en fait ce que l'on est amené à faire lorsque l'on adapte les idées de Borda et de Condorcet à l'agrégation multicritère. En effet, alors que Borda nous a conduit à mettre dans chacun des "plateaux" des "différences de niveaux", les idées de Condorcet nous incitent à n'y mettre que des attributs, la règle d'agrégation étant alors la suivante :

déclarer que x' est globalement préféré à x'' (notation $x' \succ x''$)

si et seulement si

l'"importance" de l'ensemble des attributs plaidant en faveur de x' sur x'' est plus grande que l'"importance" de l'ensemble des attributs plaidant en faveur de x'' sur x' .

Cette façon de procéder suscite évidemment deux questions :

1) étant donné deux éléments x et y de X et un attribut $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, quand va-t-on considérer que cet attribut plaide en faveur de x sur y ? ;

2) étant donné deux ensembles disjoints d'attributs, quand va-t-on considérer que l'"importance" de l'un est plus grande que l'"importance" de l'autre, ce que nous énoncerons plus simplement ci-dessous en disant : quand va-t-on considérer que l'un est "plus important que" l'autre ?

Examinons d'abord la première question. L'idée qui vient immédiatement à l'esprit pour répondre à cette interrogation consiste à dire que, dans la comparaison de $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ et $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$, l'attribut i plaide en faveur de x sur y si et seulement si $x_i P_i y_i$. Cette idée ne peut cependant pas être retenue de manière générale. En effet, dans l'approche Condorcet de l'agrégation multicritère, les attributs interviennent dans la comparaison de x et y de toute leur masse ou n'interviennent pas du tout ; or il se pourrait que, bien que $x_i P_i y_i$, la préférence de x_i sur y_i soit insignifiante et ne justifie nullement que l'attribut i joue pleinement en faveur de x contre y .

Exemple 5 : dans le cas du problème de décision de l'exemple 4, il semble peu raisonnable, pour comparer globalement les éléments $x = (9.999 \$, N_1)$ et $y = (10.000 \$, N_4)$, de considérer que l'attribut 1 plaide en faveur de x sur y simplement parce que $9.999 \$ P_1 10.000 \$$; en effet, si tel était le cas, la règle d'agrégation conduirait à conclure que $(9.999 \$, N_1)$ est globalement préféré à $(10.000 \$, N_4)$ si le décideur disait que pour lui, l'attribut "prix" est plus important que l'attribut "qualité".

Cette observation nous amène assez naturellement à introduire, $\forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$, une relation P_i^S sur X_i telle que, $\forall z_i, w_i \in X_i$, $z_i P_i^S w_i$ ssi $[z_i P_i w_i$ et la préférence de z_i sur w_i n'est pas négligeable]

et à considérer que, dans la comparaison de $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ et $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$, l'attribut i plaide en faveur de x sur y si et seulement si $x_i P_i^S y_i$.

Examinons maintenant la deuxième question. Celle-ci, qui pose en fait le problème de l'importance des attributs dans l'optique Condorcet, est beaucoup plus délicate que la première. En effet, pour pouvoir considérer qu'un ensemble d'attributs est plus important qu'un autre, il faudrait, pour bien faire, demander au décideur s'il en est bien ainsi à ses yeux, après lui avoir clairement expliqué la portée de la question ; or cela paraît difficilement concevable car la signification opérationnelle de "plus important que" dans le contexte Condorcet n'est pas facile à assimiler ; en effet, il résulte de ce qui précède que cette signification est la suivante : $\forall A_1, A_2 \in \mathcal{P}\{1, 2, \dots, m\}$ avec $A_1 \cap A_2 = \emptyset$,

A_1 "plus important que" A_2 (ce que nous noterons $A_1 \gg A_2$)

ssi

$[\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_m), y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in X \text{ tels que}$

$\{i \in \{1, 2, \dots, m\} | x_i P_i^S y_i\} = A_1 \text{ et } \{i \in \{1, 2, \dots, m\} | y_i P_i^S x_i\} = A_2,$

$x \text{ est préféré à } y]$

Pour faire face à cette difficulté, on pourrait songer à demander au décideur des informations sur l'importance des attributs sans lui expliquer ce que cela signifie dans le contexte Condorcet. Nous pensons cependant qu'il s'agit là d'une attitude dangereuse et peu défendable car aucune étude n'a jamais montré qu'il y avait coïncidence entre la signification opérationnelle bien précise de $\gg$ et l'interprétation intuitive que tout un chacun peut donner à l'expression "plus important que".

Une autre façon de procéder consiste à se baser sur l'hypothèse $\mathcal{H}_1$ ci-dessous, dans laquelle on utilise la convention suivante :

$\forall z = (z_1, z_2, \dots, z_m), w = (w_1, w_2, \dots, w_m) \in X,$

$P^S(z, w) = \{i \in \{1, 2, \dots, m\} | z_i P_i^S w_i\}.$

Hypothèse $\mathcal{R}_1$

Si $\exists x, y \in X$ tels que le décideur préfère x à y
 Alors $\forall z, w \in X$ tels que $P^S(z, w) = P^S(x, y)$ et

$P^S(w, z) = P^S(y, x)$, z est préféré à w ,
 c'est-à-dire que $P^S(x, y) \gg P^S(y, x)$.

Cette hypothèse de non-compensation entre les attributs est extrêmement commode puisqu'elle permet d'obtenir des informations sur $\gg$ sans introduire explicitement cette relation (il suffit de demander au décideur de comparer des éléments de X). Cependant, on peut s'interroger sur son acceptabilité. Afin de l'illustrer et de bien comprendre sa portée, reprenons le problème de décision de l'exemple 4 en supposant que P_1^S et P_2^S ont été définis comme suit :

$$- \forall x_1, y_1 \in X_1, x_1 P_1^S y_1 \text{ ssi } y_1 > (1, 1) \cdot x_1$$

$$- P_2^S = P_2$$

Dans ces conditions, si le décideur déclarait qu'il préfère (6.000 \$, N_3) à (10.000 \$, N_4), l'hypothèse $\mathcal{R}_1$ permettrait notamment d'affirmer que (9.000 \$, N_1) est préféré à (10.000 \$, N_4), ce qui est probablement excessif. Ceci nous montre qu'il faut affaiblir l'hypothèse $\mathcal{R}_1$. Une façon commode de le faire consiste à introduire, $\forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$, une relation P_i^V sur X_i telle que $P_i^V \subsetneq P_i^S$ et à supposer que :

Hypothèse $\mathcal{R}_2$

Si $\exists x = (x_1, x_2, \dots, x_m), y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in X$ tels que le décideur préfère x à y et $\{i \in \{1, 2, \dots, m\} \mid x_i P_i^V y_i\} = \emptyset$

Alors $\forall z = (z_1, z_2, \dots, z_m), w = (w_1, w_2, \dots, w_m) \in X$ tels que

$P^S(z, w) = P^S(x, y)$, $P^S(w, z) = P^S(y, x)$ et

$\{i \in \{1, 2, \dots, m\} \mid w_i P_i^V z_i\} = \emptyset$, z est préféré à w .

Il est clair que $\mathcal{R}_2$ ne présente véritablement d'intérêt que si, $\forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$, la relation P_i^V correspond à l'idée de "nettement préféré à" et que, d'après ce que l'on considère comme "nettement" préféré, $\mathcal{R}_2$

est une hypothèse plus ou moins forte. En fait, plus les relations P_i^V sont pauvres, plus $\mathcal{R}_2$ est une hypothèse forte, celle-ci coïncidant avec $\mathcal{R}_1$ dans le cas limite où toutes les relations P_i^V sont vides.

Lorsque les P_i^V ne sont pas des relations vides, l'hypothèse $\mathcal{R}_2$ ne permet pas de déduire de la comparaison de deux éléments de X de l'information sur la relation $\gg$; elle en fournit par contre sur une relation légèrement différente (que nous appellerons encore "plus important que" par abus de langage, mais que nous noterons $\gg^V$ pour la différencier de $\gg$), dont la signification opérationnelle est la suivante : $\forall A_1, A_2 \in \mathcal{P}\{1, 2, \dots, m\}$, avec $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.

$$A_1 \gg^V A_2$$

ssi

[$\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_m), y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in X$ tels que
 $P^S(x, y) = A_1, P^S(y, x) = A_2$ et $\{i \in \{1, 2, \dots, m\} | y_i P_i^V x_i\} = \emptyset$,
 x est préféré à y]

En effet, compte tenu de cette définition, l'hypothèse $\mathcal{R}_2$ peut s'énoncer :

Si $\exists x = (x_1, x_2, \dots, x_m), y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in X$ tels que
 le décideur préfère x à y et $\{i \in \{1, 2, \dots, m\} | x_i P_i^V y_i\} = \emptyset$
 Alors $P^S(x, y) \gg^V P^S(y, x)$.

Ceci implique que la règle d'agrégation multicritère liée à l'hypothèse $\mathcal{R}_2$ ne sera plus exactement celle issue directement des idées de Condorcet, à savoir :

Règle I : déclarer que $x' \succ x''$ ssi $P^S(x', x'') \gg P^S(x'', x')$

mais une règle quelque peu modifiée, à savoir :

Règle II
 déclarer que $x' \succ x''$ ssi $\left\{ \begin{array}{l} P^S(x', x'') \gg^V P^S(x'', x') \\ \text{et} \\ \{i \in \{1, 2, \dots, m\} | x''_i P_i^V x'_i\} = \emptyset. \end{array} \right.$

La relation de préférence globale obtenue par la règle I vérifie le principe de non-compensation " $\forall x, y, z, w \in X, [P^S(x, y) = P^S(z, w) \text{ et } P^S(y, x) = P^S(w, z)] \Rightarrow [x \succ y \Rightarrow z \succ w]$ "; celle obtenue par la règle II vérifie le principe "dit" de non-compensation généralisée " $\forall x, y, z, w \in X, [P^S(x, y) = P^S(z, w) \text{ et } P^S(y, x) = P^S(w, z)] \Rightarrow [x \succ y \Rightarrow \text{non}(w \succ z)]$ " (voir [2]). On dit aussi que l'introduction des relations P_i^V fait passer du "non compensatoire" au "non compensatoire avec veto".

Si l'hypothèse $\mathcal{R}_2$ et la règle d'agrégation II qui lui est associée constituent une réponse intéressante à l'une des questions que pose le problème de l'importance des attributs dans l'optique Condorcet, il n'empêche que ce problème soulève une autre difficulté inhérente au nombre de questions à poser au décideur. En effet, indépendamment de la façon d'obtenir l'information concernant le fait qu'un ensemble d'attributs est plus important qu'un autre, il faudrait, pour bien cerner l'attitude du décideur vis-à-vis du problème de l'importance des attributs, savoir, $\forall A_1, A_2 \in \mathcal{G}\{1, 2, \dots, m\}$ tels que $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, si [A_1 est plus important que A_2] ou [A_2 est plus important que A_1] ou [A_1 n'est pas plus important que A_2 et A_2 n'est pas plus important que A_1], ce qui conduirait vite, avec m croissant, à poser énormément de questions au décideur. Pour faire face à cette difficulté, on pourrait songer à introduire l'hypothèse H_1 ci-dessous permettant de déterminer la relation "plus important que" au départ d'un nombre très limité de questions.

Hypothèse H_1

"plus important que" est une relation de type "lexicographique", ce qui signifie qu'il existe une permutation σ de $\{1, 2, \dots, m\}$ telle que,
 $\forall A_1, A_2 \in \mathcal{G}\{1, 2, \dots, m\}$ avec $A_1 \cap A_2 = \emptyset$,

A_1 "plus important que" A_2

ssi

$$\max \{ \sigma(i) \mid i \in A_1 \} > \max \{ \sigma(i) \mid i \in A_2 \}.$$

Lorsque l'on fait cette hypothèse, il suffit de connaître le classement des attributs par ordre d'importance (croissante ou décroissante) pour pouvoir en déduire l'importance relative de deux ensembles quelconques d'attributs ; il s'agit donc d'une hypothèse très intéressante sur le plan pratique. Malheureusement, cette hypothèse est extrêmement forte et donc très sujette

à caution si bien qu'il convient d'envisager autre chose. Une idée intéressante consiste alors à ramener, moyennant l'introduction d'une hypothèse ad hoc, le problème de la détermination de la relation "plus important que" à celui de la détermination d'un certain nombre de constantes. De multiples hypothèses sont envisageables dans cette optique. Nous en présentons deux ci-dessous : la première (H_2) est semblable à celle sous-jacente de la méthode Electre II (voir [5]), la seconde (H_3), pour laquelle on dispose d'une axiomatique nécessaire et suffisante (voir [2]), est à la base de la méthode Tactic (voir [6]).

Hypothèse H_2

"plus important que" est une relation de type "Electre II", ce qui signifie qu'il existe $(m + 1)$ constantes $p_1, p_2, \dots, p_m, c \in \mathbb{R}_0^+$ telles que, $\forall A_1, A_2 \in \mathcal{G}\{1, 2, \dots, m\}$ avec $A_1 \cap A_2 = \emptyset$,

$$\begin{aligned} A_1 \text{ "plus important que" } A_2 \\ \text{ssi} \\ \min \left\{ \sum_{i \in A_1} p_i, c \right\} > \sum_{j \in A_2} p_j. \end{aligned}$$

Hypothèse H_3

"plus important que" est une relation de concordance, ce qui signifie qu'il existe $(m + 1)$ constantes $p_1, p_2, \dots, p_m, \rho \in \mathbb{R}_0^+$ avec $\rho \geq 1$ telles que, $\forall A_1, A_2 \in \mathcal{G}\{1, 2, \dots, m\}$ avec $A_1 \cap A_2 = \emptyset$,

$$\begin{aligned} A_1 \text{ "plus important que" } A_2 \\ \text{ssi} \\ \sum_{i \in A_1} p_i > \rho \cdot \sum_{j \in A_2} p_j. \end{aligned}$$

Il est intéressant, à propos de ces deux hypothèses, de noter les choses suivantes :

1°) si "plus important que" est une relation de type "lexicographique", alors "plus important que" est à la fois une relation de type "Electre II"

(prendre par exemple $p_i = 2^{\sigma(i)}$ et $c = \sum_{i=1}^m p_i + 1$) et une relation de concordance (prendre par exemple $p_i = 2^{\sigma(i)}$ et $\rho = 1$) ; les hypothèses H_2 et H_3 constituent donc toutes deux des affaiblissements de l'hypothèse H_1 ;

2°) ["plus important que" relation de concordance] ~~X~~ ["plus important que" relation de type Electre II] ; en effet, si nous prenons $m = 4$, on vérifie sans peine que la relation de concordance définie par $p_1 = 1$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 40$ et $\rho = 4$ n'est pas une relation de type Electre II ;

3°) ["plus important que" relation de type Electre II] ~~X~~ ["plus important que" relation de concordance] ; en effet, si nous prenons $m = 4$, on vérifie aisément que la relation de type Electre II définie par $p_1 = 3$, $p_2 = 4$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$ et $c = 6$ n'est pas une relation de concordance ;

4°) sous l'hypothèse H_2 comme sous l'hypothèse H_3 , la détermination de la relation "plus important que" se ramène à la détermination de $(m + 1)$ constantes parmi lesquelles m correspondent aux attributs ; il est tentant d'appeler ces m constantes "poids" des attributs, mais il faut bien se rendre compte que, d'une part, ces "poids" n'ont de sens que s'ils sont accompagnés de la $(m + 1)^{\text{ème}}$ constante et que, d'autre part, les "poids" de l'hypothèse H_2 n'ont rien à voir avec ceux de l'hypothèse H_3 (nous venons d'ailleurs de voir que les uns pouvaient exister et les autres non) ;

5°) la présence, dans les hypothèses H_2 et H_3 , d'une $(m + 1)^{\text{ème}}$ constante à côté des m "poids" est particulièrement intéressante du point de vue de l'aide à la décision. Nous allons brièvement justifier cette affirmation et illustrerons ensuite cette justification à l'aide de deux exemples.

Sur le plan pratique, on est amené, pour résoudre le problème de l'importance des attributs, à demander au décideur de comparer certains éléments de X (choisis avec clairvoyance). La comparaison de ces éléments conduit, par le truchement des hypothèses $\mathcal{H}_2$ et H_2 (resp. $\mathcal{H}_3$ et H_3) à un système d'inéquations en les $(m + 1)$ inconnues $p_1, p_2, \dots, p_m, c$ (resp. $p_1, p_2, \dots, p_m, \rho$). Généralement, ce système comporte assez peu d'inéquations (car on n'a pas souvent la possibilité de poser beaucoup de questions au décideur) et admet une infinité de solutions. Aussi, pour un jeu de poids particulier $(\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_m)$ auquel on aurait de bonnes raisons de

s'intéresser, il existe pratiquement toujours une infinité de valeurs $\bar{c}$ (resp. $\bar{\rho}$) telles que $(\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_m, \bar{c})$ (resp. $(\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_m, \bar{\rho})$) constitue une solution du système. On peut dès lors, en jouant sur $\bar{c}$ (resp. sur $\bar{\rho}$), engendrer toute une série de relations "plus important que" puisque cette relation, de par l'hypothèse H_2 (resp. H_3), s'obtient comme suit :

$$\forall A_1, A_2 \in \mathcal{O}\{1, 2, \dots, m\} \text{ avec } A_1 \cap A_2 = \emptyset, A_1 \text{ "plus important que" } A_2$$

$$\text{ssi } \min \left\{ \sum_{i \in A_1} \bar{p}_i, \bar{c} \right\} > \sum_{j \in A_2} \bar{p}_j \quad (\text{resp. ssi } \sum_{i \in A_1} \bar{p}_i > \bar{\rho} \cdot \sum_{j \in A_2} \bar{p}_j).$$

Cette possibilité, due à la présence de la $(m+1)^{\text{ème}}$ constante, de moduler la relation "plus important que" (et donc de maîtriser quelque peu sa "richesse" et sa fiabilité) est extrêmement importante du point de vue de l'aide à la décision car cette relation conditionne la relation de préférence globale que l'on obtient en appliquant la règle d'agrégation. Ceci constitue, à notre sens, un avantage décisif en faveur de H_2 ou H_3 vis-à-vis d'hypothèses ne faisant intervenir que m constantes comme par exemple : "plus important que" est une relation aux poids additifs, ce qui signifie qu'il existe m constantes $p_1, p_2, \dots, p_m \in \mathbb{R}_0^+$ telles que,

$$\forall A_1, A_2 \in \mathcal{O}\{1, 2, \dots, m\} \text{ avec } A_1 \cap A_2 = \emptyset, [A_1 \text{ "plus important que" } A_2]$$

si et seulement si $[\sum_{i \in A_1} p_i > \sum_{j \in A_2} p_j]$.

Exemple 6 : soit un problème de décision avec cinq attributs et supposons que, après avoir interrogé le décideur, nous disposons des informations suivantes (traduites en termes de "plus important que" grâce à $\mathcal{R}_2$) :

- {5} "plus important que" {4}
- {4} "plus important que" {3}
- {3} "plus important que" {2}
- {2} "plus important que" {1}
- {5} "plus important que" {1, 2} .

Si nous travaillons avec l'hypothèse H_2 , ces informations conduisent au système d'inéquations suivant (en $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, c$) :

$$\begin{array}{lll}
 \text{Système I} & p_5 > p_4 & \text{et } c > p_4 \\
 \text{.....} & p_4 > p_3 & \text{et } c > p_3 \\
 & p_3 > p_2 & \text{et } c > p_2 \\
 & p_2 > p_1 & \text{et } c > p_1 \\
 & p_5 > p_1 + p_2 & \text{et } c > p_1 + p_2 \\
 & p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, c > 0.
 \end{array}$$

Si l'on considérait qu'il n'y a aucune raison de "différencier" les informations "plus important que" que le décideur a données, on serait amené, compte tenu de la formulation de H_2 , à imposer les conditions supplémentaires :

$$p_5 - p_4 = p_4 - p_3 = p_3 - p_2 = p_2 - p_1 = p_5 - (p_1 + p_2).$$

Ceci pourrait conduire à s'intéresser tout particulièrement au jeu de poids $\bar{p}_1 = 100$, $\bar{p}_2 = 150$, $\bar{p}_3 = 200$, $\bar{p}_4 = 250$, $\bar{p}_5 = 300$. On vérifie immédiatement que, $\forall \bar{c} > 250$,

$$(100, 150, 200, 250, 300, \bar{c})$$

est solution du système I.

Pour $\bar{c} = 750$, la relation "plus important que" associée à ce jeu de constantes est plus riche, mais moins fiable, que pour $\bar{c} = 251$.

Exemple 7 : soit un problème de décision avec 7 attributs et supposons que, après avoir interrogé le décideur, nous disposons des informations suivantes (traduites en termes de "plus important que" grâce à $\mathcal{R}_2$) :

- {7} "plus important que" {6}
- {6} "plus important que" {5} et que {4}
- {5} pas "plus important que" {4} et {4} pas "plus important que" {5}
- {5} ainsi que {4} "plus important que" {3}
- {3} "plus important que" {2} et que {1}
- {2} pas "plus important que" {1} et {1} pas "plus important que" {2}
- {1, 2, 3, 4} "plus important que" {7}.

Sous l'hypothèse H_3 , ces informations conduisent au système d'inéquations suivant (en $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7, \rho$) :

Système II
.....

$$\begin{aligned}
 & p_7 > \rho \cdot p_6 \\
 & p_6 > \rho \cdot p_5 \text{ et } p_6 > \rho \cdot p_4 \\
 & p_5 \leq \rho \cdot p_4 \text{ et } p_4 \leq \rho \cdot p_5 \\
 & p_5 > \rho \cdot p_3 \text{ et } p_4 > \rho \cdot p_3 \\
 & p_3 > \rho \cdot p_2 \text{ et } p_3 > \rho \cdot p_1 \\
 & p_2 \leq \rho \cdot p_1 \text{ et } p_1 \leq \rho \cdot p_2 \\
 & p_1 + p_2 + p_3 + p_4 > \rho \cdot p_7 \\
 & p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7 > 0 \\
 & \rho \geq 1.
 \end{aligned}$$

Si l'on considérait qu'il n'y a aucune raison de "différencier" les informations "plus important que" que le décideur a données, on serait amené, compte tenu de la formulation de H_3 , à imposer les conditions supplémentaires :

$$\frac{p_7}{p_6} = \frac{p_6}{p_5} = \frac{p_5}{p_3} = \frac{p_3}{p_2} = \frac{p_1 + p_2 + p_3 + p_4}{p_7}$$

$$p_4 = p_5 \text{ et } p_1 = p_2.$$

Ceci pourrait conduire à s'intéresser tout particulièrement au jeu de poids $\bar{p}_1 = 100$, $\bar{p}_2 = 100$, $\bar{p}_3 = 140$, $\bar{p}_4 = 196$, $\bar{p}_5 = 196$, $\bar{p}_6 = 274$, $\bar{p}_7 = 383$. On vérifie sans peine que, $\forall 1 \leq \bar{\rho} \leq 1,39$,

$$(100, 100, 140, 196, 274, 383, \bar{\rho})$$

est solution du système II.

Plus $\bar{\rho}$ est petit, plus la relation "plus important que" associée à ce jeu de constantes est "riche", mais plus souvent aussi on considère qu'un ensemble d'attributs est "plus important qu'" un autre alors que cette information n'a pas été donnée par le décideur.

Pour terminer cette note, il est intéressant de signaler que :

1) lorsque la règle d'agrégation conduit à la fois à ne pas déclarer que $x' \succ x''$ et à ne pas déclarer que $x'' \succ x'$, il n'y a aucune raison de considérer que x' est indifférent à x'' ;

2) pour des raisons analogues à celles pour lesquelles la relation de préférence collective obtenue par la méthode de Condorcet peut contenir des circuits, la relation de préférence globale obtenue avec l'une des règles d'agrégation I ou II n'est pas nécessairement transitive.

REFERENCES

- [1] BLACK, D., The Theory of Committees and Elections , Cambridge University Press, 1971 (First published 1958).
- [2] BOUYSSOU, D., VANSNICK, J.-C., "Noncompensatory and Generalized Noncompensatory Preference Structures", Cahiers du Lamsade, n° 59, avril 1985.
- [3] FISHBURN, P.C., "Noncompensatory Preferences", Synthèse, vol. 33, 1976, pp. 393-403.
- [4] GUILBAUD, G.T., "Les théories de l'intérêt général et le problème logique de l'agrégation", Economie appliquée, tome V, n° 4, 1952, pp. 501-584.
- [5] ROY, B., BERTIER, P., "La méthode Electre II", dans M. Ross (éd.), OR'72, Proceedings of the IFORS Conference in Dublin, North-Holland, Amsterdam, 1972, pp. 291-302.
- [6] VANSNICK, J.-C., "On the problem of weights in multiple criteria decision making (the noncompensatory approach)", European Journal of Operational Research, 24, 1986, pp. 228-294.
- [7] VANSNICK, J.-C., "Fonction de valeur mesurable et agrégation multicritère", note en préparation.