CAHIER DU LAMSADE

Laboratoire d'Analyse et Modélisation de Systèmes pour l'Aide à la Décision
(Université de Paris-Dauphine)
Unité Associée au C.N.R.S. n° 825

STRUCTURES {P, Q, I} DE PREFERENCES

CAHIER N° 72
juin 1986

Ph. VINCKE

TABLE DES MATIERES

	Pages
Abstract	I
Résumé	I
1. Introduction	1
2. Rappel : Ordres d'intervalles et quasi-ordres	3
3. Propriétés de transitivité	5
4. Représentation numérique	7
4a Remarques préliminaires	7
4b Définitions	7
4c Théorèmes	8
5. Démonstrations	12
6. Commentaires	17
7. Représentation par des couples d'intervalles	19
8. Représentation par des intervalles : Problème ouvert	21
Bibliographie	23

{P, Q, I} PREFERENCE STRUCTURES

ABSTRACT

Two criticisms essentially are made about the complete preorder as preference model : the transitivity of indifference and the absence of intermediary relation between indifference and strict preference. The concepts of semiorder and interval order on one hand, and of "weak preference" on the other hand, try to answer to these criticisms. The purpose of this paper is to study various properties of models which combine both aspects.

STRUCTURES {P, Q, I} DE PREFERENCES

RESUME

Les critiques du préordre complet en tant que modèle de préférence ont conduit ces dernières années à l'étude de modèles permettant la non-transitivité de l'indifférence (quasi-ordres, ordres d'intervalles) et à l'introduction du concept de préférence faible. Dans ce travail, nous étudions les différentes propriétés que peuvent avoir des modèles incluant ces deux aspects simultanément.

1. INTRODUCTION

Des travaux de plus en plus nombreux ont été consacrés, ces dernières années, à la recherche de modèles de préférence moins restrictifs que le traditionnel préordre complet. La transitivité de l'indifférence, l'absence d'incomparabilité, l'exclusion de toute situation autre que la préférence et l'indifférence ont été successivement remises en cause et ont conduit aux structures de quasi-ordre, d'ordre d'intervalle, de relations partielles, de pseudo-ordre, de surclassement, ... (cf. [2], [3]).

Ce travail a été motivé par une communication faite par L. VALADARES TAVARES, aux 22e journées du Groupe de Travail Européen sur l'Aide à la Décision Multicritère ([4]). Il concerne l'étude des modèles de préférence faisant intervenir trois relations ; la préférence stricte, la préférence faible et l'indifférence. La situation d'incomparabilité n'est pas envisagée ici : les structures présentées se rapportent donc plutôt, dans un processus d'aide à la décision, à la phase de modélisation des préférences suivant chaque point de vue pris isolément.

Nous supposons donc que, confronté à la comparaison de deux actions a et b (pour un point de vue donné), le décideur opte pour une des trois attitudes suivantes :

. a strictement préférée à b (ou b strictement préférée à a), ce que nous noterons a P b (b P a);

. a faiblement préférée à b (ou b faiblement préférée à a), ce que nous noterons a Q b (b Q a);

. a indifférent à b (équivalent à "b indifférent à a"), ce que nous noterons a I b.

Rappelons que la préférence faible peut traduire une hésitation entre l'indifférence et la préférence stricte : pour plus de détails et pour la justification de l'introduction de la relation Q, nous renvoyons le lecteur à [2].

Nous convenons également que les relations P, Q et I possèdent les propriétés naturelles reprises dans la définition suivante.

Définition 1.1. : une structure {P, Q, I} de préférence sur un ensemble A est un triplet de relations P, Q et I, définies dans A et telles que

$$\begin{cases} . \ \forall\, a,b \in A : a\ P\ b \text{ ou } b\ P\ a \text{ ou } a\ Q\ b \text{ ou } b\ Q\ a \text{ ou } a\ I\ b \text{ (ou exclusifs);} \\ . \ \forall\, a \in A : a\ I\ a \text{ (I est réflexive);} \\ . \ \forall\, a,b \in A : a\ I\ b \Rightarrow b\ I\ a \text{ (I est symétrique);} \\ . \ \forall\, a,b \in A : a\ P\ b \Rightarrow b\ \not{P}\ a \text{ (P est asymétrique);} \\ . \ \forall\, a,b \in A : a\ Q\ b \Rightarrow b\ \not{Q}\ a \text{ (Q est asymétrique).} \end{cases}$$

L'ensemble A, dans ce travail, est un ensemble <u>fini</u>.

D'autre part, S_i (i = 1,2,3, ...) étant des relations quelconques sur A, nous noterons

$a\ S_i^{-1}\ b$ ssi $b\ S_i\ a$,

$S_i \subset S_j$ ssi $a\ S_i\ b \Rightarrow a\ S_j\ b,\ \forall\, a,b$,

$a\ S_i\ .\ S_j\ b$ ssi $\exists\, c \in A : a\ S_i\ c$ et $c\ S_j\ b$,

$a\ S_i^2\ b$ ssi $a\ S_i\ .\ S_i\ b$,

$a\ (S_i \cup S_j) b$ ssi $a\ S_i\ b$ ou $a\ S_j\ b$ (ou non exclusif),

$a\ (S_i \cap S_j) b$ ssi $a\ S_i\ b$ et $a\ S_j\ b$,

$S_i = \emptyset$ ssi $\nexists\, a,b : a\ S_i\ b$.

2. RAPPEL : ORDRES D'INTERVALLES ET QUASI-ORDRES

Dans le cas où on se limite à l'indifférence I et la préférence stricte P, il existe deux structures de préférence fondamentales et bien connues autorisant la non-transitivité de l'indifférence. Nous en rappelons ici quelques caractérisations et propriétés qui nous seront utiles dans la suite (pour une présentation plus détaillée, voir [3]).

Définition 2.1. : une structure $\{P,I\}$ de préférence sur un ensemble A est un ordre d'intervalle

ssi $P.\ I.\ P \subset P$,

ssi il existe deux fonctions g et p, définies sur A et à valeurs réelles, telles que, $\forall\ a,b \in A$:

$$\begin{cases} a\ P\ b \iff g(a) > g(b) + p(b) \ , \\ a\ I\ b \iff \begin{cases} g(a) + p(a) > g(b) \ , \\ g(b) + p(b) > g(a) \ , \end{cases} \end{cases}$$

ssi $T_1 = P.\ I \cup P^2$ est asymétrique et négativement transitive ("weak order"),

ssi $T_2 = I.\ P \cup P^2$ est asymétrique et négativement transitive,

ssi on peut associer, à tout élément a de A, un intervalle $I_a =]x_a, y_a[$ de la droite réelle de telle sorte que

$$\begin{cases} a\ P\ b \text{ ssi } I_a > I_b \ , \\ a\ I\ b \text{ ssi } I_a \cap I_b \neq \emptyset \ , \end{cases}$$

où $I_a > I_b$ signifie que l'intervalle I_a est situé entièrement à droite de l'intervalle I_b .

Propriété 2.1. : les relations T_c et T_L définies par

$$a\ T_c\ b \text{ ssi } a\ T_1\ b \text{ ou } (a\ \not T_1\ b,\ b\ \not T_1\ a \text{ et } a\ T_2\ b)$$

$$a\ T_L\ b \text{ ssi } a\ T_2\ b \text{ ou } (a\ \not T_2\ b,\ b\ T_2\ a \text{ et } a\ T_1\ b)$$

sont des ordres stricts totaux (relations asymétriques, transitives et complètes) dans A/E, où E est la relation d'équivalence définie par

$$a\ E\ b \text{ ssi } \begin{cases} a\ P\ c \iff b\ P\ c \ , \forall\ c \ , \\ c\ P\ a \iff c\ P\ b \ , \forall\ c \ , \\ a\ I\ c \iff b\ I\ c \ , \forall\ c \ . \end{cases}$$

Ces relations sont liées à la représentation numérique précédente par

$$\begin{cases} a\ T_C\ b \text{ ssi } g(a) > g(b) , \\ a\ T_L\ b \text{ ssi } g(a) + p(a) > g(b) + p(b) . \end{cases}$$

<u>Définition 2.2.</u> : une structure $\{P,I\}$ de préférence sur un ensemble A est un <u>quasi-ordre</u>

ssi $\begin{cases} P.\ I.\ P \subset P , \\ P^2 \cap I^2 = \emptyset , \end{cases}$

ssi il existe deux fonctions g et p, définies sur A et à valeurs réelles, telles que, $\forall\ a,b \in A$:

$$\begin{cases} a\ P\ b \iff g(a) > g(b) + p(b) , \\ a\ I\ b \iff \begin{cases} g(a) + p(a) > g(b) , \\ g(b) + p(b) > g(a) , \end{cases} \\ g(a) > g(b) \Rightarrow g(a) + p(a) > g(b) + p(b) , \end{cases}$$

ssi il existe une fonction g et une constante p telles que :

$$\begin{cases} a\ P\ b \iff g(a) > g(b) + p , \\ a\ I\ b \iff |g(a) - g(b)| < p , \end{cases}$$

ssi $T = P.I \cup I.P \cup P^2$ est asymétrique et négativement transitive ("weak order").

<u>Propriété 2.2.</u>

La relation T est un ordre strict total dans A/E, où E est définie comme dans la propriété 2.1.

<u>Remarque</u>

De la réflexivité de I, il résulte que la fonction p de la définition 2.1 et la constante p de la définition 2.2 sont positives.

3. PROPRIETES DE TRANSITIVITE

Pour généraliser aux structures {P, Q, I} de préférence la notion de transitivité d'une relation, il est utile de considérer ce que donnent des situations tu type

$$a\ S_1\ b \text{ et } b\ S_2\ c\ ,$$

où S_1 et S_2 sont des éléments de $\{P, Q, I, Q^{-1}, P^{-1}\}$.
L'étude de ces situations nous conduit à proposer les 4 définitions suivantes (il existe évidemment une multitude de possibilités mais ces quatre-là nous semblent les plus raisonnables ou ont déjà été proposées précédemment).

Définition 3.1. : une structure {P, Q, I} de préférence est faiblement transitive ssi

$$\begin{cases} P.\ P \subset P\ , \\ P.\ Q \subset P\ , \\ Q.\ P \subset P\ , \\ Q.\ Q \subset P \cup Q\ . \end{cases}$$

Définition 3.2. : une structure {P, Q, I} de préférence est Q^2-transitive ssi elle est faiblement transitive et que

$$Q.\ Q \subset P\ .$$

Définition 3.3. : une structure {P, Q, I} de préférence est P.I-transitive ssi elle est faiblement transitive et que

$$P.\ I \subset P \cup Q$$

N.B. : la condition $P.\ I \subset P \cup Q$ peut encore s'écrire $I.\ P \subset P \cup Q$ ou $I^2 \cap P = \emptyset$.

Définition 3.4. : une structure {P, Q, I} de préférence est fortement transitive ssi elle est Q^2-transitive et P.I-transitive, ssi

$$\begin{cases} P.\ P \subset P\ , \\ P.\ Q \subset P\ , \\ Q.\ P \subset P\ , \\ Q.\ Q \subset P\ , \\ P.\ I \subset Q \cup P\ . \end{cases}$$

N.B. : la notion de transitivité forte coïncide avec ce que L. VALADARES TAVARES appelle la transitivité généralisée ([4]).

Dans le tableau ci-dessous, on a résumé ce que donne la composition de S_1 avec S_2 pour leurs différentes valeurs possibles et ce, pour des structures {P, Q, I} de préférence vérifiant respectivement la transitivité faible (colonne ①), la Q^2-transitivité (colonne ②), la P.I-transitivité (colonne ③) et la transitivité forte (colonne ④). Dans ce tableau, la lettre Z désigne $P \cup Q \cup I \cup Q^{-1} \cup P^{-1}$.

S_1	S_2	$S_1 \cdot S_2$			
		①	②	③	④
P	P	P	P	P	P
P	Q	P	P	P	P
P	I	$P \cup Q \cup I$	$P \cup Q \cup I$	$P \cup Q$	$P \cup Q$
P	Q^{-1}	$P \cup Q \cup I$	$P \cup Q \cup I$	$P \cup Q \cup I$	$P \cup Q \cup I$
P	P^{-1}	Z	Z	Z	Z
Q	P	P	P	P	P
Q	Q	$P \cup Q$	P	$P \cup Q$	P
Q	I	$P \cup Q \cup I$	$P \cup Q \cup I$	$P \cup Q \cup I$	$P \cup Q \cup I$
Q	Q^{-1}	$Q \cup I \cup Q^{-1}$	I	$Q \cup I \cup Q^{-1}$	I
Q	P^{-1}	$I \cup Q^{-1} \cup P^{-1}$	$I \cup Q^{-1} \cup P^{-1}$	$I \cup Q^{-1} \cup P^{-1}$	$I \cup Q^{-1} \cup P^{-1}$
I	P	$P \cup Q \cup I$	$P \cup Q \cup I$	$P \cup Q$	$P \cup Q$
I	Q	$P \cup Q \cup I$	$P \cup Q \cup I$	$P \cup Q \cup I$	$P \cup Q \cup I$
I	I	Z	Z	$Q \cup I \cup Q^{-1}$	$Q \cup I \cup Q^{-1}$

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier les propriétés reprises dans ce tableau et d'en déduire les propriétés équivalentes que l'on obtient en remplaçant P par P^{-1}, Q par Q^{-1} et vice versa.

4. REPRESENTATION NUMERIQUE

4a. Remarques préliminaires

Toutes les représentations numériques considérées ici ne comportent que des inégalités strictes. Cela permet de simplifier les démonstrations mais ne constitue nullement une restriction. En effet, dans le cas où A est fini, les conditions qui assurent l'existence de fonctions telles que (par exemple)

$$a\ Q\ b \iff g(b) + p(b) \geq g(a) > g(b) + q(b)$$

sont les mêmes que celles qui assurent l'existence de fonctions telles que

$$a\ Q\ b \iff g(b) + p(b) > g(a) > g(b) + q(b)\ .$$

Cette remarque vaut également pour les définitions 2.1 et 2.2 où certains signes $\geq$ et $\leq$ ont été remplacés par > et <, par rapport aux modèles habituellement présentés dans la littérature.

D'autre part, à toute structure de préférence on peut associer une relation d'équivalence E telle que a E b ssi a et b se comparent de façon identique à toutes les autres actions (cf. par exemple la relation E définie dans la propriété 2.1). Nous supposons dans la suite de ce travail que $a \neq b \Rightarrow a \not{E}\, b$ (ce qui revient à considérer l'ensemble A/E au lieu de A).

4b. Définitions

En vue de rendre opérationnels les modèles de préférence qu'il construit, l'homme d'étude essaie en général d'obtenir des modèles numériques, c'est-à-dire d'associer à chaque élément de A un ou plusieurs nombres de telle sorte que leurs comparaisons traduisent au mieux les préférences du décideur. Le modèle le plus courant est le "critère à 2 seuils" qui généralise naturellement le concept de "quasi-critère" (obtenu lorsque Q n'existe pas). Suivant que l'on impose aux fonctions seuils l'une ou l'autre propriété de cohérence, on obtient différentes représentations parmi lesquelles nous retenons les suivantes.

Définition 4.1. : une structure {P, Q, I} de préférence est une structure à 2 seuils ss'il existe trois fonctions g, q et p telles que, $\forall$ a,b $\in$ A :

$$\begin{cases} a\ P\ b \iff g(a) > g(b) + p(b)\ , \\ a\ Q\ b \iff g(b) + p(b) > g(a) > g(b) + q(b)\ , \\ a\ I\ b \iff \begin{cases} g(b) + q(b) > g(a)\ , \\ g(a) + q(a) > g(b)\ , \end{cases} \\ \quad q(a) < p(a)\ . \end{cases}$$

Remarque : de la réflexivité de I, il résulte que la fonction q est positive (et donc la fonction p aussi); l'inégalité $q(a) < p(a)$ ne résulte des inégalités précédentes que pour les éléments a pour lesquels il existe b tel que b Q a. Il faut donc l'ajouter pour qu'elle soit satisfaite $\forall$ a.

Définition 4.2. : une structure à 2 seuils est

(i) q-cohérente,
(ii) p-cohérente ,
(iii) (p-q)-cohérente ,
(iv) (q,p,+)-cohérente ,
(v) (q,p,-)-cohérente ,
(vi) (q,p)-cohérente ,

ssi les fonctions g, q et p peuvent être choisies de telle sorte que l'on ait respectivement : $\forall\ a,b \in A$:

(i) $g(a) > g(b) \iff g(a) + q(a) > g(b) + q(b)$,
(ii) $g(a) > g(b) \iff g(a) + p(a) > g(b) + p(b)$,
(iii) $g(a) + q(a) > g(b) + q(b) \iff g(a) + p(a) > g(b) + p(b)$,
(iv) $g(a) > g(b) + q(b) \Rightarrow g(a) + q(a) > g(b) + p(b)$,
(v) $g(a) + q(a) > g(b) + p(b) \Rightarrow g(a) > g(b) + q(b)$,
(vi) $g(a) > g(b) + q(b) \iff g(a) + q(a) > g(b) + p(b)$.

Parmi les structures qui possèdent simultanément plusieurs propriétés de cohérence, nous retiendrons celle de pseudo-ordre (cf [5]).

Définition 4.3. : une structure à 2 seuils est un pseudo-ordre ssi les fonctions g, q, p peuvent être choisies de telle sorte que, $\forall\ a,b \in A$:

$$g(a) > g(b) \iff g(a) + q(a) > g(b) + q(b) \iff g(a) + p(a) > g(b) + p(b)\ .$$

4c. Théorèmes

Dans les théorèmes suivants (dont on trouvera les démonstrations dans la section 5), nous donnons les conditions nécessaires et suffisantes pour avoir les différentes représentations numériques définies dans le paragraphe précédent.

Théorème 4.1. : une structure $\{P, Q, I\}$ de préférence est une structure à 2 seuils ssi

$$\begin{cases} Q.\ I.\ Q \subset Q \cup P\ , \\ Q.\ I.\ P \subset P\ , \\ P.\ I.\ P \subset P\ , \\ P.\ Q^{-1}.\ P \subset P\ . \end{cases}$$

Théorème 4.2. : une structure à 2 seuils est q-cohérente ssi

$$\begin{cases} (P \cup Q)^2 \cap I^2 = \emptyset\ , \\ P^2 \cap I.\ Q = \emptyset\ , \\ Q.\ P \cap I.\ Q = \emptyset\ . \end{cases}$$

Théorème 4.3. : une structure à 2 seuils est p-cohérente ssi

$$\begin{cases} P^2 \cap (I \cup Q)^2 = \emptyset\ , \\ P.\ Q \cap I^2 = \emptyset\ , \\ P.\ Q \cap Q.\ I = \emptyset\ . \end{cases}$$

Theorème 4.4. : une structure à 2 seuils est (p-q)-cohérente ssi

$$P.\ I.\ Q \subset P\ .$$

Théorème 4.5. : une structure à 2 seuils est (q, p, +)-cohérente ssi elle est Q^2-transitive.

Théorème 4.6. : une structure à 2 seuils est (q, p, -)-cohérente ssi elle est P.I-transitive.

Théorème 4.7. : une structure à 2 seuils est (q,p)-cohérente ssi elle est fortement transitive.

Théorème 4.8. : une structure à 2 seuils est un pseudo-ordre ssi

$$\begin{cases} \text{elle est q-cohérente,} \\ \text{elle est p-cohérente,} \\ \text{elle est (p-q), cohérente.} \end{cases}$$

D'autre part, il nous semble intéressant de mentionner les résultats suivants.

Théorème 4.9. : une structure $\{P, Q, I\}$ de préférence fortement transitive est une structure à 2 seuils ssi

$$\begin{cases} Q.\ I.\ Q \subset Q \cup P\ , \\ P.\ Q^{-1}.\ P \subset P\ . \end{cases}$$

Théorème 4.10. : une structure à 2 seuils fortement transitive est q-cohérente ssi $Q.\ P \cap I.\ Q = \emptyset$.

Théorème 4.11. : une structure à 2 seuils fortement transitive est p-cohérente ssi

$$\begin{cases} P^2 \cap Q^2 = \emptyset\ , \\ P.\ Q \cap Q.\ I = \emptyset\ . \end{cases}$$

Théorème 4.12. : une structure à 2 seuils fortement transitive est toujours (p-q)-cohérente et (q,p)-cohérente.

Théorème 4.13. : une structure à 2 seuils fortement transitive est un pseudo-ordre ssi

$$\begin{cases} Q.\ P \cap I.\ Q = \emptyset\ , \\ P.\ Q \cap Q.\ I = \emptyset\ , \\ P^2 \cap Q^2 = \emptyset\ . \end{cases}$$

Appelons cette structure un pseudo-ordre fortement transitif.

Théorème 4.14. : une structure à 2 seuils est un pseudo-ordre fortement transitif ssi

$$\begin{cases} \text{elle est q-cohérente,} \\ \text{elle est p-cohérente ,} \\ \text{elle est (p-q)-cohérente ,} \\ \text{elle est (q,p)-cohérente,} \end{cases}$$

ssi c'est une structure à 2 seuils telle que

$$p = 2q = \text{constante.}$$

Le tableau suivant résume les résultats de ce paragraphe.

	Structures à 2 seuils	Conditions	Théorèmes
Quelconques	$a\,P\,b \iff g(a) > g(b) + p(b)$ $a\,Q\,b \iff g(b) + p(b) > g(a) > g(b) + q(b)$ $a\,I\,b \iff \begin{cases} g(a) < g(b) + p(b) \\ g(b) < g(a) + p(a) \end{cases}$ $0 < q(a) < p(a)$	$Q\,I\,Q \subset Q \cup P$ $Q\,I\,P \subset P$ $P\,I\,P \subset P$ $P\,Q^{-1}\,P \subset P$	4.1.
q-cohérentes	$g(a) > g(b) \iff g(a) + q(a) > g(b) + q(b)$	$(P \cup Q)^2 \cap I^2 = \emptyset$ $P^2 \cap I\,Q = \emptyset$ $Q\,P \cap I\,Q = \emptyset$	4.2
p-cohérentes	$g(a) > g(b) \iff g(a) + p(a) > g(b) + p(b)$	$P^2 \cap (I \cup Q)^2 = \emptyset$ $P\,Q \cap I^2 = \emptyset$ $P\,Q \cap Q\,I = \emptyset$	4.3
(p-q)-cohérentes	$g(a) + q(a) > g(b) + q(b) \iff g(a) + p(a) > g(b)+p(b)$	$P\,I\,Q \subset P$	4.4
(q,p,+)-cohérentes	$g(a) > g(b) + q(b) \Rightarrow g(a) + q(a) > g(b) + p(b)$	Q^2-transitivité	4.5
(q,p,-)-cohérentes	$g(a) + q(a) > g(b) + p(b) \Rightarrow g(a) > g(b) + q(b)$	PI-transitivité	4.6
(q,p)-cohérentes	$g(a) > g(b) + q(b) \iff g(a) + q(a) > g(b) + p(b)$	Transitivité forte	4.7
Pseudo-ordres	$g(a) > g(b) \iff g(a) + q(a) > g(b) + q(b)$ $\iff g(a) + p(a) > g(b) + p(b)$	q-cohérence p-cohérence (p-q)-cohérence	4.8
	Structures fortement transitives		
	A deux seuils	$Q\,I\,Q \subset Q \cup P$ $P\,Q^{-1}\,P \subset P$	4.9
	q-cohérentes	$Q\,P \cap I\,Q = \emptyset$	4.10
	p-cohérentes	$P^2 \cap Q^2 = \emptyset$ $P\,Q \cap Q\,I = \emptyset$	4.11
	(p-q)-cohérentes	-	4.12
	(q,p,+)-cohérentes	-	
	(q,p,-)-cohérentes	-	
	(q,p)-cohérentes	-	
	Pseudo-ordres fortement transitifs (toutes les conditions de cohérence réunies) ($p = 2\,q$ = constante)	$Q\,P \cap I\,Q = \emptyset$ $P\,Q \cap Q\,I = \emptyset$ $P^2 \cap Q^2 = \emptyset$	4.13

5. DEMONSTRATIONS

Théorème 4.1.

La nécessité des conditions se vérifie aisément.

Pour démontrer que les conditions sont suffisantes, on introduit la relation S_1 définie comme suit : $\forall\, a,b \in A$:

$$a\ S_1\ b \text{ ssi } \exists\, c : a\ P\ c \text{ et } b\ \not P\ c\ ,$$
$$\text{ou} \ : a\ Q\ c \text{ et } c(P \cup Q \cup I)b\ .$$

Le lecteur vérifiera que les conditions du théorème 4.1 impliquent que S_1 satisfait :

$$\begin{cases} a\ S_1\ b \Rightarrow b\ \not S_1\ a\ , & \text{(asymétrie)} \\ a\ \not S_1\ b \text{ et } b\ \not S_1\ c \Rightarrow a\ \not S_1\ c & \text{(transitivité négative)} \end{cases}$$

c'est-à-dire qu'il s'agit d'un "ordre faible" (weak order).

On sait qu'il existe alors une fonction g telle que :

$$a\ S_1\ b \Leftrightarrow g(a) > g(b)\ .$$

On définit $g(a) + q(a)$ de telle sorte que :

$$\begin{cases} g(a) + q(a) < g(c),\ \forall\, c : c\ (Q \cup P)a, \\ g(a) + q(a) > g(d),\ \forall\, d : d\ I\ a\ , \end{cases}$$

ce qui est toujours possible puisque

$$c(Q \cup P)a \text{ et } d\ I\ a \Rightarrow c\ S_1\ d \Rightarrow g(c) > g(d)\ .$$

D'autre part, on définit $g(a) + p(a)$ de telle sorte que

$$\begin{cases} g(a) + p(a) < g(c),\ \forall\, c : c\ P\ a\ , \\ g(a) + p(a) > g(d),\ \forall\, d : d\ \not P\ a\ , \end{cases}$$

ce qui est également toujours possible puisque

$$c\ P\ a \text{ et } d\ \not P\ a \Rightarrow c\ S_1\ d \Rightarrow g(c) > g(d)\ .$$

Les fonctions g, q et p ainsi obtenues vérifient les propriétés voulues.

Théorème 4.2.

La nécessité des conditions se vérifie aisément.
Pour démontrer que les conditions sont suffisantes, on introduit la relation S_2 définie comme suit : $\forall$ a,b $\in$ A :

$$a \; S_2 \; b \text{ ssi } a \; S_1 \; b \text{ (cf. démonstration du théorème 4.1)}$$
$$\text{ou } a \; \not S_1 \; b \quad b \; \not S_1 \; a \text{ et } a \; I.\,(Q \cup P) b \; .$$

Le lecteur vérifiera que si {P, Q, I} est une structure à 2 seuils (i.e. si elle vérifie les conditions du théorème 4.1), alors S_2 est un ordre faible. Il existe donc une fonction g telle que

$$a \; S_2 \; b \iff g(a) > g(b) \; .$$

Les fonctions g+q et g+p sont définies comme dans le théorème 4.1.
Démontrons que la q-cohérence est vérifiée.
Si $g(a) > g(b)$, alors a S_2 b et trois cas sont à considérer.

<u>1^e cas</u> : $\exists$ c : a P c et b $\not P$ c ; alors $\nexists$ d : d(Q $\cup$ P)a et d I b car cela impliquerait soit d $(Q.\,P \cup P^2)$c et d $(I.\,Q \cup I^2)$c, soit d $(Q.\,P \cup P^2)$c et c (Q $\cup$ P)b, ce qui est impossible. Par conséquent, $\nexists$ d : $g(b) + q(b) > g(d) > g(a) + q(a)$ et il est donc possible de définir q de telle sorte que $g(a) + q(a) > g(b) + q(b)$.

<u>2^e cas</u> : $\exists$ c : a Q c et c (P $\cup$ Q $\cup$ I)b; alors $\nexists$ d : d (Q $\cup$ P)a et d I b car cela impliquerait soit d $(Q^2 \cup P.\,Q)$c et d I^2 c, soit d $(Q^2 \cup P.\,Q)$c et c (Q $\cup$ P)b, ce qui est impossible.
La conclusion se fait comme dans le premier cas.

<u>3^e cas</u> : $\exists$ c : a I c et c (Q $\cup$ P)b; alors $g(a) + q(a) > g(c)$ et $g(c) > g(b)+q(b)$.

Si $g(a) = g(b)$, alors a $\not S_2$ b et b $\not S_2$ a; par conséquent, $\nexists$ c : a I c et c(Q $\cup$ P)b et $\nexists$ d : b I d et d (Q $\cup$ P)a, ce qui permet de définir q de telle sorte que $g(a) + q(a) = g(b) + q(b)$.
Il résulte évidemment de ce qui précède que

$$g(a) + q(a) > g(b) + q(b) \Rightarrow g(a) > g(b) \; .$$

Théorème 4.3.

La nécessité des conditions se vérifie aisément.
Pour démontrer que les conditions sont suffisantes, on introduit la relation S_3 définie comme suit : $\forall$ a,b $\in$ A :

$$a\ S_3\ b \text{ ssi } a\ S_1\ b \text{ (cf. démonstration du théorème 4.1)}$$

$$\text{ou } a\ \not S_1\ b,\ b\ \not S_1\ a \text{ et } \exists\ c : c\ \not P\ a \text{ et } c\ P\ b\ .$$

Le lecteur vérifiera que si {P, Q, I} est une structure à 2 seuils, alors S_3 est un ordre faible. Il existe donc une fonction g telle que

$$a\ S_3\ b \iff g(a) > g(b)\ .$$

Les fonctions g+q et g+p sont définies comme dans le théorème 4.1.
Démontrons que la p-cohérence est vérifiée.
Si $g(a) > g(b)$, alors a S_3 b et trois cas sont à considérer.

1e cas : $\exists$ c : a P c et b $\not P$ c; alors $\not\exists$ d : d P a et d $\not P$ b car cela impliquerait soit d P^2 c et d $(I \cup Q)^2$ c, soit d P^2 c et c $(Q \cup P)$b, ce qui est impossible.
Par conséquent, $\not\exists$ d : $g(b) + p(b) > g(d) > g(a) + p(a)$ et il est donc possible de définir p de telle sorte que $g(a) + p(a) > g(b) + p(b)$.

2e cas : $\exists$ c : a Q c et c $(P \cup Q \cup I)$b; alors $\not\exists$ d : d P a et d $\not P$ b car cela impliquerait soit d P. Q c et d $(Q.\ I \cup I^2)$c, soit d P. Q c et c $(Q \cup P)$b, ce qui est impossible.
La conclusion se fait comme dans le premier cas.

3e cas : $\exists$ c : c $\not P$ a et c P b; alors $g(a) + p(a) > g(c) > g(b) + p(b)$

Si $g(a) = g(b)$, alors a $\not S_3$ b et b $\not S_3$ a; par conséquent $\not\exists$ c : c $\not P$ a et c P b et $\not\exists$ d : d $\not P$ b et d P a, ce qui permet de définir p de telle sorte que $g(a) + p(a) = g(b) + p(b)$.

Théorème 4.4.

Une structure à 2 seuils (p-q)-cohérente est un cas particulier de ce qui, dans [3], a été appelé "a homogeneous family of interval orders". Le théorème 4.4. est un corollaire des résultats des pages 76 et 78 de cette référence.

Théorème 4.5.

La nécessité de la condition se vérifie aisément.
Pour démontrer que la condition est suffisante, reprenons les fonctions construites dans la démonstration du théorème 4.1. et vérifions qu'elles peuvent être choisies de manière à satisfaire la (q, p, +)-cohérence.
Si $g(a) > g(b) + q(b)$, alors $a\ (Q \cup P) b$.
Si a P b, on a immédiatement $g(a) + q(a) > g(a) > g(b) + p(b)$.
Si a Q b, alors $\nexists$ c : c Q a et c $\not P$ b car cela impliquerait $Q^2 \not\subset P$; donc $\nexists$ c : $g(a) + q(a) < g(c) < g(b) + p(b)$ et il est donc possible de définir q et p de telle sorte que $g(a) + q(a) > g(b) + p(b)$.

Théorème 4.6.

La nécessité de la condition se vérifie aisément.
Pour démontrer que la condition est suffisante, reprenons les fonctions construites dans la démonstration du théorème 4.1. et vérifions qu'elles peuvent être choisies de manière à satisfaire la (q, p, -)-cohérence.
Si $g(a) < g(b) + q(b)$, alors $b\ (P \cup Q \cup I) a$.
Si $b\ (P \cup Q) a$, on a immédiatement $g(b) + p(b) > g(b) > g(a) + q(a)$.
Si b I a, alors $\nexists$ c : a I c et c P b, sinon $I^2 \cap P \neq \emptyset$; donc $\nexists$ c : $g(a) + q(a) > g(c) > g(b) + p(b)$ et il est donc possible de définir q et p de telle sorte que $g(a) + q(a) < g(b) + p(b)$.

Théorème 4.7.

Corollaire des théorèmes 4.5 et 4.6.

Théorème 4.8.

La réunion des conditions des théorèmes 4.1, 4.2, 4.3 et 4.4 coïncide exactement avec les conditions habituelles qui caractérisent un pseudo-ordre (voir par exemple [5], page 11).

Théorème 4.9.

Le lecteur vérifiera aisément que la transitivité forte implique $Q.\ I.\ P \subset P$ et $P.\ I.\ P \subset P$; il ne manque donc que les 2 conditions du théorème 4.9 pour avoir une structure à 2 seuils, d'après le théorème 4.1.

Théorème 4.10.

Vérifions qu'une structure à 2 seuils fortement transitive vérifie les 2 premières conditions données dans le théorème 4.2.
La 1ère condition est une conséquence immédiate de $(P \cup Q)^2 \subset P$ et $I^2 \cap P = \emptyset$.
La 2ème condition résulte du fait que $I.\ P.\ P \subset (P \cup Q).P \subset P$.

Théorème 4.11.

De $I.\ P.\ P \subset P$, il résulte que $P^2 \cap I^2 = \emptyset$, $P^2 \cap I.\ Q = \emptyset$ et $P^2 \cap Q.\ I = \emptyset$: il reste donc la propriété $P^2 \cap Q^2 = \emptyset$ à satisfaire pour vérifier la 1ère condition du théorème 4.3.
La 2ème condition du théorème 4.3 provient de ce que $I.\ P.\ Q \subset (Q \cup P)\ .\ Q \subset P$.

Théorème 4.12.

La condition du théorème 4.4 est satisfaite puisque $P.\ I.\ Q \subset (Q \cup P).Q \subset P$; la (q,p)-cohérence résulte du théorème 4.7.

Théorème 4.13.

Corollaire des théorèmes 4.8, 4.10, 4.11 et 4.12.

Théorème 4.14.

La première partie du théorème est un corollaire des théorèmes 4.7 et 4.8. La deuxième est démontrée dans [5], page 41.

6. COMMENTAIRES

Il est clair que les structures de préférence présentées ici ne constituent pas une liste exhaustive de tout ce que l'on peut obtenir à partir de modèles à 3 relations P, Q, I : nous nous sommes essentiellement limités aux structures donnant lieu à la représentation numérique habituellement utilisée en aide à la décision. Les structures obtenues sont, pour la plupart, moins exigeantes que le pseudo-ordre, seule structure de ce type étudiée en détails jusqu'ici. Dans les sections 7 et 8, nous considérerons le problème de la représentation par des intervalles.

Contrairement à ce que l'on pourrait croire a priori en se basant sur la représentation numérique des ordres d'intervalles, il ne suffit pas que $\{P, Q \cup I \cup Q^{-1}\}$ et $\{P \cup Q, I\}$ soient des ordres d'intervalles pour avoir automatiquement une structure à 2 seuils : il est nécessaire d'ajouter la condition

$$Q\,I\,P \subset P\ ,$$

de manière à avoir la même fonction g pour les 2 ordres d'intervalles; c'est toute la différence entre une "family of interval orders" et une "row-homogeneous family of interval orders" (cf [3]). Le théorème 4.1 est d'ailleurs un cas particulier du résultat obtenu dans [3] sur la représentation numérique des "row-homogeneous families of interval orders".

Si $\{P \cup Q, I\}$ est un ordre d'intervalle, il suffit d'ajouter la condition

$$(P \cup Q)^2 \cap I^2 = \emptyset$$

pour en faire un quasi-ordre (cf. section 2) et pour pouvoir le représenter au moyen de fonctions g et q satisfaisant la q-cohérence. Néanmoins, la présence de l'ordre d'intervalle $\{P, Q \cup I \cup Q^{-1}\}$ et la volonté d'avoir la même fonction g pour les deux structures exigent deux propriétés supplémentaires, comme le montre le théorème 4.2.

Le théorème 4.3 est l'analogue du théorème 4.2 pour le cas où c'est $\{P, Q \cup I \cup Q^{-1}\}$ qui est le quasi-ordre et $\{P \cup Q, I\}$ qui est l'ordre d'intervalle.

Le théorème 4.4 est un cas particulier du résultat obtenu dans [3] sur la représentation numérique des "homogeneous families of interval orders". On demande non seulement que la fonction g soit la même pour les deux ordres d'intervalles mais aussi que g+p soit une fonction croissante de g+q.

Les théorèmes 4.5 à 4.7 montrent ce que devient la représentation numérique d'une structure à 2 seuils lorsqu'on lui donne les différentes propriétés de transitivité définies dans la section 3.

Il ne suffit pas qu'une structure soit q-cohérente et p-cohérente pour qu'elle soit automatiquement (p-q)-cohérente (comme on serait tenté de le déduire trop rapidement de la définition 4.2). En fait, en se référant au chapitre 5 de [3], une structure à la fois q-cohérente et p-cohérente est une "famille de deux quasi-ordres"; une structure à la fois q-cohérente et (p-q)-cohérente ou à la fois p-cohérente et (p-q)-cohérente est une "famille homogène de deux ordres d'intervalles dont l'un est un quasi-ordre"; une structure à la fois q-cohérente, p-cohérente et (p-q)-cohérente est une "famille homogène de deux quasi-ordres", c'est-à-dire un pseudo-ordre (théorème 4.8).

Le théorème 4.9 montre ce qu'il faut ajouter à la transitivité forte pour obtenir une structure à 2 seuils, alors que les théorèmes suivants étudient les conditions pour qu'une structure à 2 seuils fortement transitive possède les diverses propriétés de cohérence.

La structure la plus forte est le pseudo-ordre fortement transitif, qui réunit toutes les propriétés de cohérence et qui donne lieu à une représentation numérique à 2 seuils constants, où "le seuil de préférence" p est le double du "seuil d'indifférence" (q) (théorème 4.14).

Le lecteur trouvera dans [5] la caractérisation de pseudo-ordres donnant lieu à une représentation numérique à 2 seuils constants, sans que l'on ait nécessairement p = 2q.

De façon plus générale, le problème de la représentation avec un ou plusieurs seuils constants a été étudié en détails par J-P. DOIGNON ([1]).

7. REPRESENTATION PAR DES COUPLES D'INTERVALLES

Les théorèmes présentés dans la section 4, sur la représentation numérique des structures $\{P, Q, I\}$, peuvent également être interprétés en termes de représentation par des couples d'intervalles. Les structures $\{P \cup Q, I\}$ et $\{P, Q \cup I \cup Q^{-1}\}$ étant des ordres d'intervalles, on peut associer (cf. section 2), à tout élément a de A, deux intervalles $I_a =]x_a, y_a[$ et $J_a =]z_a, t_a[$ de telle sorte que :

$$\begin{cases} a(P \cup Q)b & \text{ssi} \quad I_a > I_b , \\ a\ I\ b & \text{ssi} \quad I_a \cap I_b \neq \emptyset , \\ a\ P\ b & \text{ssi} \quad J_a > J_b , \\ a(Q \cup I \cup Q^{-1})b & \text{ssi} \quad J_a \cap J_b \neq \emptyset , \end{cases}$$

autrement dit,

$$\begin{cases} a\ P\ b & \text{ssi} \quad I_a > I_b \text{ et } J_a > J_b , \\ a\ Q\ b & \text{ssi} \quad I_a > I_b \text{ et } J_a \cap J_b \neq \emptyset , \\ a\ I\ b & \text{ssi} \quad I_a \cap I_b \neq \emptyset \text{ et } J_a \cap J_b \neq \emptyset . \end{cases}$$

Néanmoins, les deux ordres d'intervalles n'étant pas indépendants, il existe des liens entre les deux intervalles associés à un même élément de A. Ainsi, par exemple,

$$a\ P\ b \Rightarrow a(P \cup Q)b ,$$

d'où

$$J_a > J_b \Rightarrow I_a > I_b .$$

Une structure à 2 seuils impose de plus que $x_a = z_a$ (= $g(a)$) et y_a (= $g(a) + q(a)$) < t_a (= $g(a) + p(a)$), et donc

$$I_a \subset J_a, \forall a .$$

On obtient alors

$$\begin{cases} a\ P\ b & \text{ssi} \quad I_a > J_b , \\ a\ Q\ b & \text{ssi} \quad I_a > I_b \text{ et } J_a \cap J_b \neq \emptyset , \\ a\ I\ b & \text{ssi} \quad I_a \cap I_b \neq \emptyset . \end{cases}$$

Cette structure est q-cohérente si

$$x_a > x_b \Leftrightarrow y_a > y_b$$

c'est-à-dire si

$$I_a \not\subset I_b \ , \ \forall\ a,b \ .$$

Elle est p-cohérente si

$$x_a > x_b \iff t_a > t_b, \ \forall\ a,b \ ,$$

c'est-à-dire si

$$J_a \not\subset J_b \ , \ \forall\ a,b \ .$$

Elle est (p-q)-cohérente si

$$y_a > y_b \iff t_a > t_b, \ \forall\ a,b \ ,$$

c'est-à-dire si

$$(J_a \setminus I_a) \not\subset (J_b \setminus I_b) \ , \ \forall\ a,b \ .$$

Elle est (q,p)-cohérente si

$$x_a > y_b \iff y_a > z_b \ , \ \forall\ a,b \ ,$$

c'est-à-dire si

$$I_a \not\subset J_b \ , \ \forall\ a,b \ .$$

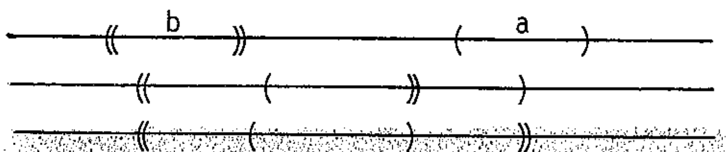
Les représentations à seuils constants (cf. [1] et théorème 4.14) donnent évidemment lieu à des représentations par des intervalles de mêmes longueurs.

8. REPRESENTATION PAR DES INTERVALLES : PROBLEME OUVERT

Si l'on désire associer un seul intervalle I_a à chaque élément de A, on obtient une structure {P, Q, I} en définissant, $\forall$ a,b :

$$\begin{cases} a \; P \; b \quad \text{ssi} \quad I_a > I_b \;, \\ a \; Q \; b \quad \text{ssi} \quad I_a \cap I_b \neq \emptyset \text{ et } I_a \setminus I_b > I_b \;, \\ a \; I \; b \quad \text{ssi} \quad I_a \subset I_b \text{ ou } I_b \subset I_a \;. \;, \end{cases}$$

comme illustré sur la figure ci-dessous



a P b

a Q b

a I b .

En termes de représentation par des fonctions, on a, en posant $I_a =]g(a), g(a) + \sigma(a)[$:

$$\begin{cases} a \; P \; b \quad \text{ssi} \quad g(a) > g(b) + \sigma(b) \;, \\ a \; Q \; b \; \text{ssi} \quad g(a) + \sigma(a) > g(b) + \sigma(b) > g(a) > g(b) \;, \\ a \; I \; b \quad \text{ssi} \quad \begin{cases} g(b) + \sigma(b) > g(a) + \sigma(a) > g(a) > g(b) \;, \\ \text{ou} \\ g(a) + \sigma(a) > g(b) + \sigma(b) > g(b) > g(a) \;. \end{cases} \end{cases}$$

A notre connaissance, les conditions nécessaires et suffisantes pour avoir une telle représentation numérique n'ont pas encore été établies. Nous donnons ci-dessous une liste de conditions nécessaires.

Théorème 8.1. : si la structure {P, Q, I} est représentable par des fonctions g et σ comme indiqué ci-dessus, alors

(i) {$P \cup Q$, I} est un ordre partiel de dimension 2,

(ii) {P, $\hat{I}$} est un ordre d'intervalle, où $\hat{I} = Q \cup I \cup Q^{-1}$,

(iii) {P, Q, I} est faiblement transitive,

(iv) $P.\hat{I} \cap \hat{I}.P \subset P \cup Q$,

(v) $(P.\hat{I} \cap I)^2 \cap Q = \emptyset$ et $(\hat{I}.P \cap I)^2 \cap Q = \emptyset$.

Démonstration

(i) Résulte du célèbre théorème de DUSHNIK et MILLER(*).

(ii) cf. définition 2.1.

(iii) démonstration immédiate.

(iv) Soit $a \; P \; c \; \hat{I} \; b$ et $a \; \hat{I} \; d \; P \; b$.

Il vient

(*) B. DUSHNIK et E. MILLER : "Partially Ordered Sets", American Journal of Mathematics, Vol.63, 1941.

$$g(a) > g(c) + \sigma(c) > g(b)$$

et

$$g(a) + \sigma(a) > g(d) > g(b) + \sigma(b) \ ,$$

d'où

$$a(P \cup Q)b \ .$$

(v) Soit $a \; P \; b \; \hat{I} \; c \; P \; d \; \hat{I} \; e$, $a \; I \; c \; I \; e$ et $a \; Q \; e$.

Les deux dernières hypothèses impliquent soit

$$g(e) < g(a) < g(c) < g(c) + \sigma(c) < g(e) + \sigma(e) < g(a) + \sigma(a) \ ,$$

mais alors

$$a \; P \; b \Rightarrow g(a) > g(b) + \sigma(b) \Rightarrow g(c) > g(b) + \sigma(b) \Rightarrow c \; P \; b \ ,$$

soit

$$g(c) < g(e) < g(a) < g(e) + \sigma(e) < g(a) + \sigma(a) < g(c) + \sigma(c) \ ,$$

mais alors

$$c \; P \; d \Rightarrow g(c) > g(d) + \sigma(d) \Rightarrow g(e) > g(d) + \sigma(d) \Rightarrow e \; P \; d \ .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] J-P. DOIGNON : "Threshold representations of multiple semiorders", SIAM Journal on Algebraic and Discrete Mathematics, à paraître.

[2] B. ROY : *Méthodologie Multicritère d'Aide à la Décision*, Economica, 1985.

[3] M. ROUBENS et Ph. VINCKE : *Preference Modelling*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Springer Verlag, n°250, 1985.

[4] L. VALADARES TAVARES : "Proposition d'un système relationnel de préférences et développement d'une méthode interactive utilisant le modèle TRIDENT", communication présentée aux 22èmes Journées Européennes sur l'Aide à la Décision Multicritère, Chania (CRETE), Octobre 1985.

[5] Ph. VINCKE : "Vrais, quasi, pseudo et précritères dans un ensemble fini : propriétés et algorithmes", Cahiers du LAMSADE, n°27, 1980.