CAHIER DU LAMSADE

Laboratoire d'Analyse et Modélisation de Systèmes pour l'Aide à la Décision
(Université de Paris-Dauphine)
Unité de Recherche Associée au CNRS n° 267

ANALYSE CANONIQUE DE DEUX CONES POLYEDRIQUES CONVEXES

CAHIER N° 87

novembre 1988

A. AGHA

TABLE DES MATIERES

CANONICAL ANALYSIS OF TWO CONVEX POLYHEDRAL CONES

ABSTRACT

This paper presents the canonical analysis of two convex polyhedral cones,which is the general theory of the "Least Squares"view in the field of qualitative regression.

In the setting-up of the method which is derived from it,as in many other problems tackled geometrically (ordinal variable's scaling,etc.), the determination of a vector's projection into a convex polyhedral cone is required.We present PAV and NNLS algorithms and propose an improvement of the latter thanks to the SWEEP operator.

(Key-words: Qualitative regression,scaling,convex polyhedral cone,ordinal variable).

ANALYSE CANONIQUE DE DEUX CONES POLYEDRIQUES CONVEXES

RESUME

Ce cahier présente l'analyse canonique de deux cônes polyédriques convexes,théorie générale de l'approche "moindres carrés" en régression qualitative.

Dans la mise en oeuvre de la méthode qui en découle ainsi que dans bien d'autres problèmes abordés géométriquement,la détermination de la projection d'un vecteur sur un cône polyédrique convexe est requise. Nous présentons l'algorithme "Non Negative Least Squares" de Lawson & Hanson et en proposons une amélioration à l'aide de l'opérateur SWEEP.

(Mot-clés: Régression qualitative,codage,cône polyédrique convexe,variable ordinale).

1-INTRODUCTION

Problème vaste de l'Analyse des Données,la régression linéaire a suscité de nombreux travaux;nous en faisons ci-après une brève énumération.

On peut aborder ce problème,limité à son aspect ajustement d'un modèle à des données,d'un point de vue "moindres carrés" ou bien "moindres écarts".Dans cette dernière approche,Wagner(1959) a proposé d'utiliser la programmation linéaire. En régression ordinale , dans cette même approche,Jacquet-Lagrèze et Siskos (1978) ont proposé la méthode UTA permettant d'expliquer un préordre total par des variables qualitatives ou quantitatives monotones;cette première version a été améliorée par Siskos et Yannacopoulos(1983).

Dans le cadre de l'approche "moindres carrés"du problème de la régression qualitative,un certain nombre de méthodes ont été mises au point :MONANOVA de J.B.Kruskal(1965) traitant le cas de variables explicatives nominales et d'une variable à expliquer ordinale ,utilise une méthode de programmation non linéaire pour minimiser une fonction d'erreurs :le STRESS.F.W.Young,J.de Leeuw et Y.Takane(1976) proposent deux méthodes basées sur le principe des "moindres carrés alternés" (Alternating Least Squares);ce sont: ADDALS qui résout le cas de variables explicatives nominales ou ordinales et d'une variable à expliquer quelconque et MORALS adaptée à tous les types de variables.Tenenhaus (1979) a montré que toutes ces méthodes sont équivalentes à une analyse canonique (sous contrainte sur le signe de certains coefficients) et en a élaboré une théorie générale(1986).

Nous avons mis au point un programme informatique (1986), REGALS (Regression Analysis by Alternating Least Squares),qui en permet la mise en oeuvre.Nous présentons en sections 3 et 4 la méthode et un traitement d'exemples numériques.La détermination de la projection d'un vecteur sur un cône polyédrique convexe est une condition préalable à la mise en oeuvre de l'analyse canonique de deux cônes comme dans toute recherche de codage optimal de variable ordinale.Nous commençons donc par la présentation d'un algorithme de projection, NNLS (Non Negative Least Squares) de Lawson et Hanson(1974);nous en proposons une amélioration à l'aide de l'opérateur SWEEP de A.E.Beaton (1964) décrit par R.I.Jennrich(1977) .

2-PROJECTION D'UN VECTEUR SUR UN CONE

2-1 Cône polyédrique convexe: Etant donné $Z_1,..,Z_m$,m vecteurs de R^n,$C = a_1Z_1+..+a_mZ_m$ avec a_i non négatifs , est un cône polyédrique convexe.

2-2 Notion de codage: Soit E un ensemble de n individus sur lequel est observée une variable X prenant ses valeurs dans M,ensemble des m premiers nombres entiers naturels;toute application A de M sur R,l'ensemble des réels,est appelée codage des modalités de X; AoX est appelée codage de X.Dans le cas d'une variable ordinale , on munit M d'une structure d'ordre a priori,identique à l'ordre naturel: 1,..,m;on appelle codage A toute application satisfaisant à la contrainte :

$$k < j \text{ équivalent à } A(k) <= A(j) .$$

Notons X_j la variable indicatrice :

$$X_j(i)= 1 \text{ si } X(i)= j \text{ et } X_j(i)= 0 \text{ sinon ;}$$

on peut écrire : $AoX = A(1)X_1+A(2)X_2+..+A(m)X_m$.

La contrainte sur l'ordre des valeurs prises par A nous permet d'écrire :

$$A(j) = a_1+a_2+..+a_j \text{ , avec } a_2,a_3,..,a_m \text{ non négatifs.}$$

Finalement on obtient : $AoX = a_1Z_1+..+a_mZ_m$ avec

$$Z_j = X_1+X_2+..+ X_j .$$

L'ensemble C des codages d'une variable ordinale est donc un cône polyédrique convexe.

2-3 Algorithmes de projection sur un cône : La projection d'un vecteur sur un cône C(S), S ensemble des générateurs , coïncide avec sa projection Y* sur l'espace vectoriel engendré par une partie R de S .Ce résultat constitue le fondement des algorithmes que nous présentons.

En régression monotone,on se pose le problème de la recherche du codage d'une variable ordinale "approchant" le mieux une variable numérique Y.Le codage optimal,au sens des moindres carrés,est obtenu en projetant Y sur le cône des codages de X. Parfaitement adapté à ce cas,l'algorithme P.A.V (Pool Adjacent Violators)de Barlow & al.(1973) est basé sur la structure particulière,décrite ci-dessus,du cône engendré par une variable ordinale.Tenenhaus donne une interprétation géométrique de P.A.V qui équivaut à la mise en oeuvre d'une régression multiple itérative descendante de la variable Y sur les variables indépendantes $Z_2,..,Z_m$.

L'algorithme N.N.L.S de Lawson & Hanson est de portée plus générale,Tenenhaus en donne aussi une interprétation géométrique.
Nous dirons qu'une partie R est admissible si les coordonnées de la projection sur L(R) par rapport à la base $\{Z_1,Z_2,..,Z_m\}$ sont strictement positives; cette partie sera dite optimale si la projection Y* coïncide avec celle de Y sur C(S),la condition d'optimalité étant :

le produit scalaire $(Y-Y^*,Z_i)$ est négatif ou nul,pour tout i;

L'algorithme est basé sur le fait que, étant donné une partie admissible non optimale R de S,on sait "construire" une partie admissible Q telle que la distance de Y à cette partie soit strictement moindre que celle de Y à R ;comme l'existence et l'unicité de la projection sont assurées ,l'algorithme est convergent.

La procédure de construction est la suivante:R n'étant pas optimale,soit Z_r tel que :

$(Y-Y^*,Z_r)$ strictement positif

et Y_1,la projection de Y sur $L(R+Z_r)$;si elle est admissible, la construction est achevée ; sinon , soit X_1 un vecteur choisi sur le segment $[Y^*\ ,\ Y_1]$,tel que ses coordonnées(par rapport à la base des Z_i) soient positives ou nulles.Soit N_1 l'ensemble des vecteurs Z_i de R tels que $L(N_1)$ soit le plus petit espace contenant X_1;X_1 est tel que

$$d(Y,Y_1) < d(Y,X_1) < d(Y,Y^*)$$

Si $(R+Z_r)-N_1$ est admissible ,on pose $R'=(R+Z_r)-N_1$ et la construction est achevée;sinon,on refait la même procédure avec le segment $[X_1, Y_2]$ Y_2 étant la projection de Y sur$(R+Z_r)-N_1$; on aboutit à un élément X_2 appartenant à C tel que

$$d(Y,Y_2) < d(Y,X_2) < d(Y,X_1)$$

On construit ainsi une suite d'éléments $X_1,X_2,X_3\dots$ dans C tels que leurs distances respectives à Y soient de plus en plus courtes; le processus doit forcément s'arrêter à un X_k tel que la partie

$(R+Z_r)-N_1-N_2-\dots-N_k$ soit admissible ,

car on aura l'alternative : $X_k= Y_{k+1}$ ou $X_k < Y_{k+1}$ dans C.

On a obtenu une partie admissible

$$R'= (R+Z_r)-N_1-N_2-\dots-N_k$$

vérifiant la condition requise : si elle est optimale,l'algorithme s'arrête;sinon,on réitère la procédure de construction.

Le processus est initialisé avec $R_o = \emptyset$ et Y le vecteur nul ; remarquons que, à la fin de l'étape k du processus,la partie admissible s'écrit :

$$R_k=(R_{k-1}+Z_{rk})-N_1-N_2-\dots N_{hk};$$

cette étape aura requis h_k+1 utilisations de la procédure de projection d'un vecteur sur un espace vectoriel et , en tout,un nombre de fois égal à $(h_1+h_2+\ldots+h_k)+1$ si R_k est optimale,ce qui peut coûter très cher en temps de calcul,chaque appel s'accompagnant d'une inversion matricielle.

Mais remarquons aussi que :

-De l'étape k-1 à l'étape k,la matrice à inverser "enfle " d'une ligne et d'une colonne,les autres éléments restant identiques.

-Lors de l'étape k,le passage de l'itération j-1 du processus à l'itération j se traduit,pour la matrice à inverser, par une diminution d'un nombre de lignes (et de colonnes) égal au cardinal de N_j.Comme les inverses des matrices correspondant respectivement à la fin de l'étape k-1 et de l'itération j-1 sont déterminées , il devient aisé de déterminer les inverses des matrices suivantes par application de l'opérateur SWEEP (procédures P_2 et P_3 décrites en annexe 1).

Nous présentons en annexe 2 le programme informatique(en langage Turbo pascal),basé sur NNLS,intégrant SWEEP et les procédures qu'il appelle : PrépaVecMat,Sweep,SweepInv,DimOrd.

2-4 <u>Etude d'un exemple</u> :Nous reprenons le problème de Walpole et Myers(1972) étudié par R.D Armstrong et E.L Frome(1976)en application de l'algorithme Branch-and-Bound de projection d'un vecteur sur un cône polyédrique convexe .

Trois substances sont utilisées à différentes concentrations dans le but d'augmenter le taux de survie d'un certain type de semence animale.Nous traitons ce problème comme une régression multiple avec contraintes de positivité sur les coefficients.Nous présentons dans le tableau 1 les résultats de treize expériences , à trois niveaux de concentration (en %), des substances étudiées.

La variable Y à expliquer est le taux de survie et les variables explicatives sont $X_0=(1,1,\ldots,1)^t$ et X_i taux de substance $i(i=1,2,3)$. Nous concluons que le taux de survie dépend du taux de concentration de la substance 1.

Equation de la régression:

$$\% \text{ estimé} = 23.398 + 1.234\ X_1 + 0.000\ X_2 + 0.000\ X_3$$

%SURVIE	*% estimé*	*X0*	*X1*	*X2*	*X3*
25.50	25.54	1	1.74	5.30	10.80
31.20	31.20	1	6.32	5.42	9.40
25.90	31.07	1	6.22	8.41	7.20
38.40	36.38	1	10.52	4.63	8.50
18.40	24.87	1	1.19	11.60	9.40
26.70	24.90	1	1.22	5.85	9.90
26.40	28.46	1	4.10	6.62	8.00
25.90	31.20	1	6.32	8.72	9.10
32.00	28.43	1	4.08	4.42	8.70
25.20	28.52	1	4.15	7.60	9.20
39.70	35.92	1	10.15	4.83	9.40
35.70	25.52	1	1.72	3.12	7.60
26.50	25.50	1	1.70	5.30	8.20

Tableau 1

3-ANALYSE CANONIQUE DE DEUX CONES

3-1 Position du Problème: Soit C et D deux cônes polyédriques convexes engendrés, respectivement, par deux familles S et T de vecteurs de R^n. L'analyse canonique de ces deux cônes est la recherche d'un couple de vecteurs normés (X,Y) tels que

$$\max(\cos^2(U,V)) = \cos^2(X,Y) \text{ , pour tout } (U,V) \text{ dans } C\times D.$$

3-2 Caractérisation d'une solution stationnaire: (X,Y) étant un couple stationnaire, on pose $a = \cos^2(X,Y)$; alors:

$$P_C P_D(X) = aX \text{ , } P_D P_C(Y) = aY$$

en notant P_C et P_D respectivement les opérateurs de projection sur C et D.

La solution optimale du problème est une des solutions stationnaires. Un résultat important est contenu dans la proposition suivante

Proposition 1: il existe deux sous-ensembles P et Q de, respectivement, S et T tels que la solution optimale (X,Y) coïncide avec le premier couple canonique de l'analyse canonique des espaces vectoriels engendrés par P et Q.

3-3 Algorithme "Alternating Least Squares": c'est un algorithme de recherche d'une solution stationnaire au problème ; on construit la suite (X_t, Y_t) définie par

$$X_t = P_{C\cap S}(Y_{t-1}) \text{ , } Y_t = P_{D\cap S}(X_t);$$

S est la sphère de R^n de centre 0 et de rayon égal à un; on peut commencer le processus par n'importe quel vecteur de D n'appartenant pas à C^p, le cône polaire de C, qui comprend tous les vecteurs de R^n faisant un angle obtus avec n'importe quel vecteur de C.

Nous avons écrit un programme informatique ,REGALS , mettant en oeuvre l'algorithme A.L.S et intégrant NNLS et l'opérateur Sweep.

3-4 Applications :

3-4-1 Analyse des mesures conjointes: Issue de la psychologie mathématique, cette méthode sert "à mesurer l'effet conjoint de plusieurs variables indépendantes sur l'effet des valeurs prises par une variable à expliquer,cette liaison pouvant être sous forme additive ou polynômiale".

Nous empruntons cette définition à Y.Evrard et P.Lemaire(1976). La théorie exposée ci-dessus s'insère naturellement dans le cadre de l'analyse des mesures conjointes et en constitue un moyen élégant de mise en oeuvre.

L'analyse canonique de deux cônes concernant les variables ordinales,le cas de variables nominales peut être pris en compte par l'analyse d'un cône et d'un espace vectoriel :c'est le cas traité par MONANOVA (J.B.Kruskal(1965)).

3-4-2 Théorie de l'Utilité multi-attribut : Par le choix d'une normalisation appropriée et en ne s'intéressant qu'à l'ordre des valeurs prises par les variables,on détermine des utilités correspondant aux différentes modalités et une pondération satisfaisant aux conditions requises.

4-EXEMPLES NUMERIQUES

4-1 Choix de sites nucléaires:D.Bouyssou et B.Roy ont comparé deux modèles concurrents d'aide à la décision(1983),l'un baptisé modèle "U" ,de Keeney et Nair,basé sur la théorie de l'utilité multi-attribut, l'autre sur une méthode de surclassement (ELECTRE III, Roy (1978)).La comparaison portait sur un problème de choix de sites nucléaires pour le compte du WPPSS (Washington Public Power Supply System).Le modèle "U" a abouti au classement des neuf sites retenus à partir de six critères(Tableau 2).

RANG	*SANTE*	*SAUMON*	*BIOLO*	*SOCECO*	*ESTHET*	*COUT*
7	1	1	6	9	4	6
8	5	1	6	7	4	9
9	6	1	5	8	2	8
6	3	5	2	4	3	7
2	4	4	1	6	1	2
1	7	6	1	2	4	1
3	2	7	3	3	5	5
5	9	2	4	1	5	4
4	8	3	7	5	5	3

TABLEAU 2

L'analyse canonique des deux cônes engendrés respectivement par la variable ordinale "Rang des sites" et les variables " classement par critères" nous permet de conclure:

a)La stationnarité est atteinte à la première itération(!) avec un tau de Kendall de 1; il est remarquable que la structure ordinale de l'ensemble des classements par critère se retrouve bien représentée par le classement final des sites en notant que les auteurs du modèle "U" ont choisi la forme multiplicative d'agrégation des critères , la somme des indices d'importance étant différente de 1 (Keeney,1974).

b)Les critères qui ont été déterminants dans le classement final des sites sont dans l'ordre: COUT,SOCECO (impact socio-économique),BIOLO (impact biologique),ce qui traduit:

-une moindre importance accordée aux autres critères,le critère COUT ayant bénéficié de l'indice le plus élevé;

-un pouvoir discriminant plus faible de certains des autres critères; les neuf sites sont eux-mêmes le résultat d'une sélection et peuvent être,pour la plupart, bien représentés sur un ou plusieurs critères:dans ce cas,sur le critère SANTE & SECURITE.

RANG	*SANTE*	*SAUMON*	*BIOLO*	*SOCECO*	*ESTHET*	*COUT*
0.78	0.00	0.00	1.00	1.00	0.00	0.63
0.89	1.00	0.00	1.00	0.60	0.00	1.00
1.00	1.00	0.00	1.00	1.00	0.00	1.00
0.67	1.00	0.00	0.00	0.60	0.00	1.00
0.22	1.00	0.00	0.00	0.60	0.00	0.00
0.11	1.00	0.00	0.00	0.20	0.00	0.00
0.33	0.00	0.00	0.00	0.20	0.00	0.63
0.56	1.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.63
0.44	1.00	0.00	1.00	0.60	0.00	0.00

TABLEAU 3

Equation de la régression

RANG = 0.056 SANTE + 0.000 SAUMON + 0.222 BIOLO + 0.278 SOCECO + 0.000 ESTHET + 0.444 COUT .

4-2 Evaluation de projets: Le tableau 4 présente dix-sept projets stratégiques d'une entreprise notés sur quatre critères(J.L. Richard(1983)).Le préordre à expliquer est,par ordre de préférence décroissante:

P8/P6/P1/P7/P4/P9/P2/P3/P10/P11/P12/P13,P14/P5/P15/P16/P17; Pi désigne le projet i et la virgule sépare les projets ex-aequo.

Projets stratégiques sur le champ 1	*(1)*	*(2)*	*(3)*	*(4)*
PP1-1 Disponibilité pour le 31/12/80 dans tte agglo. de plus de 20.000 hab.......	3.75	1.5	2	2
PP1-2 Nouveau mailing à 25 000 profesionnels(dessina.,BET,secrét.)............	3.75	1.75	1.75	2
PP1-3 Même que précédent à 100 000 prof.....	4	1.5	1.25	2
PP1-4 Prospection.auprès des fournituristes.	3.75	1.75	1.50	2
PP1-5 Vte dir.par mail.aux 2000 1ères entrep.	3.50	1.50	1.75	2.25
PP1-6 Promotion d'assistance au stockage....	3.75	1.75	2	2
PP1-7 Présence sur 2 foires nat.............	3.50	1.75	2	2
PP1-8 Système d'aide au réassort............	4.25	2.25	2	2.25
PP1-9 Conditionnement double................	3.50	2.25	2	2
PP1-10 Concours détaillant(prod. prof.).....	3.75	1.50	1.50	2.25
PP1-11 Présence sur 3 foires rég............	3.50	1.25	1.25	2
PP1-12 Création d'un dépot rég.de vente dir.	3.75	1.75	1	2.25
PP1-13 Démonst.par équipes sur lieu de vte..	4	1	1.50	2
PP1-14 Vente en grande surf.(prod. prof)....	3.50	1	1.50	2..
PP1-15 Relèvement important des prix........	2.50	2	2	2
PP1-16 Créat.d'un dépot rég.de revente......	3.50	1	1	2.25
PP1-17 Publicité télévisée..................	4.50	0.75	0.75	2

Tableau 4

Les critères sont :la compétitivité commerciale(1), l'efficacité commerciale(2),l'efficacité financière(3),la flexibilité commerciale (4).Les résultats de l'analyse canonique des deux cônes engendrés par la variable Préordre d'une part et les variables ordinales"classement par critères" d'autre part, sont présentés dans le tableau 5.Il est à noter qu'à la troisième itération, le tau de Kendall est de 0.86, supérieur à celui obtenu par la méthode UTA(R.Savoundararadja,1987), l'ordre seul des valeurs prises par les critères sur les différents projets étant pris en compte dans la méthode utilisée.

Résultats de l'analyse canonique :

* Préord estimé *	*(1)*	*(2)*	*(3)*	*(4)*
0.880	0.891	0.454	1.000	0.000
0.818	0.891	1.000	0.679	0.000
0.717	0.891	0.454	0.600	0.000
0.818	0.891	1.000	0.679	0.000
0.659	0.697	0.454	0.679	0.000
0.950	0.891	1.000	1.000	0.000
0.859	0.697	1.000	1.000	0.000
1.000	1.000	1.000	1.000	0.000
0.859	0.697	1.000	1.000	0.000
0.749	0.891	0.454	0.679	0.000
0.626	0.697	0.454	0.600	0.000
0.643	0.891	1.000	0.250	0.000
0.659	0.891	0.000	0.600	0.000
0.601	0.697	0.000	0.679	0.000
0.536	0.000	1.000	1.000	0.000
0.483	0.697	0.454	0.250	0.000
0.464	1.000	0.000	0.000	0.000

Tableau 5

Equation de la régression :

$$\text{Préordre estimé} = 0.464(1) + 0.127(2) + 0.409(3) + 0.000(4) .$$

Le préordre réexpliqué est:

P8/P6/P1/P7,P9/P2,P4/P10/P3/P5,P13/P12/P11/P14/P15/P16/P17.

Comparaison avec le préordre initial à l'aide du tau de Kendall:

Tau de Kendall = 0.8603.

ANNEXE 1: Opérateur Sweep

Etant donné une matrice carrée $A=\{a_{ij}\}$ telle que le kième élément a_{kk} de la diagonale soit non nul , le résultat d'un "sweeping" de A par rapport à a_{kk} est une matrice A^*_k définie par

$$a^*_{kk} = -1/a_{kk} \; ; \; a^*_{ik} = a_{ik}/a_{kk}$$
$$a^*_{kj} = a_{kj}/a_{kj} \; ; \; a^*_{ij} = a_{ij} - (a_{ik}a_{kj}/a_{kk}),$$

pour i et j différents de k.

On peut définir de même l'opération "sweeping inverse":appliquée à A^*_k par rapport à a^*_{kk},elle permet de retrouver A :

$$a_{kk} = -1/a^*_{kk} \; ; \; a_{ik} = -a^*_{ik}/a^*_{kk}$$
$$a_{kj} = -a^*_{kj}/a^*_{kk} \; ; \; a_{ij} = a^*_{ij} - (a^*_{ik}a^*_{kj}/a^*_{kk}).$$

L'intérêt de l'opérateur Sweep repose sur les théorèmes suivants.

THEOREME 1:S'il est possible de "sweeper" la matrice A par rapport à tous les éléments de la diagonale,alors A est inversible et le résultat A^* vérifie : $A^* = -A^{-1}$.

THEOREME 2:S'il est possible de "sweeper"la matrice partitionnée

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

par rapport à chaque élément de la diagonale de A_{11} alors A_{11} est inversible et

$$A^*/\mathrm{diag}(A_{11}) = \begin{bmatrix} A^*_{11} & -A^*_{11}A_{12} \\ -A_{21}A^*_{11} & A_{22}+(A_{21}A^*_{11}A_{12}) \end{bmatrix}$$

Les applications de Sweep sont présentées dans les trois procédures décrites ci-dessous correspondant à autant de situations d'inversion matricielle .

P1-Inversion d'une matrice donnée:

a)par une suite de "sweeping"sur les éléments diagonaux tous non nuls;

b)en "construisant" progressivement la matrice à inverser par l'ajout d'une ligne et d'une colonne à chaque étape, c'est le processus récurrent:

$$A^1 = \left[a_{11} \right], A*^1 = \left[-1/a_{11} \right];$$

$$A^k = \begin{bmatrix} A^{k-1} & A^{k,12} \\ A^{k,21} & a_{kk} \end{bmatrix}$$

avec $A^{k,12} = (a_{1k}\ a_{2k}..a_{k-1k})^t$
$A^{k,21} = (a_{k1}\ a_{k2}..a_{kk-1})$

On a alors (théorème 2):

$$A*^k/\mathrm{diag}(A^{k-1}) = \begin{bmatrix} A*^{k-1} & -A*^{k-1}A^{k,12} \\ -A^{k,21}A*^{k-1} & a_{kk}+A^{k,21}A*^{k-1}A^{k,12} \end{bmatrix}$$

et,à l'étape courante k,on détermine $A*^k$ en "sweepant" $A*^k/\mathrm{diag}(A^{k-1})$ par rapport à $a_{kk}+A^{k-1,21}A*^{k-1}A^{k,12}$, supposé non nul pour tout k; cette condition est toujours vérifiée si A est symétrique définie positive.

P2-Etant donné une matrice A(n,n) inversible dont l'inverse A^{-1} est connu,on se pose le problème de la détermination de l'inverse de la matrice B définie par

$$B = \begin{bmatrix} A & v \\ u' & b \end{bmatrix}$$

avec u,v dans R^n et b un réel.
C'est l'application d'une étape du processus P1:

$$.B^*/\mathrm{diag}(A) = \begin{bmatrix} -A^{-1} & A^{-1}v \\ u'A^{-1} & b-u'A^{-1}v \end{bmatrix}$$

.on effectue un sweeping de $B^*/\mathrm{diag}(A)$ par rapport à $b-u'A^{-1}v$
.$B^{-1} = -B^*$.

P3-Etant donné une matrice A(n,n)inversible dont l'inverse A^{-1} est connu,on se pose le problème de la détermination de l'inverse de la matrice B obtenue en supprimant de A un nombre r de lignes et de colonnes de même rang:$k_1,k_2,..,k_r$;on effectue une suite de "sweepings inverses" par rapport aux éléments diagonaux de $A^* = -A^{-1}$ correspondants dans un ordre arbitraire; on obtient B^* en supprimant de la matrice résultante les lignes et les colonnes de rang k_i,i= 1,...,r et $B^{-1} = -B^*$.

Les applications de l'opérateur Sweep en régression multiple itérative ascendante ou descendante sont classiques(programmes des BMDP et SAS).

ANNEXE 2: Procédures informatiques

```
PROCEDURE PrepaVecMat(var card :Integer;var ens:Ensemble;
          var rg:Vectens;var coef:Vectem;var mat:Carree);
var i,j,k:Integer;
      som:Real;
        V:Tableau;
        W:Vectem;
begin
for j :=1 to m do
 if j in ens then
     V[rg[j]]:=tab[j];
for j := 1 to card do
 coef[j]:=ProdScal(X,V[j]);
if card >1 then
 for i :=1 to card -1 do
  begin
  som:=0;k:=1;
  while k<= card-1 do
    begin
    W[k]:=ProdScal(V[k],V[card]);
    som:=som+(-mat[i,k]*W[k]);k:=k+1;
    end;
  mat[i,card]:=som;mat[card,i]:=som;
  end;
  k:=1; som:=0;
  while k<= card-1 do
   begin
   som:= som +(W[k]*mat[k,card]);k:=k+1;
   end;
mat[card,card]:=ProdScal(V[card],V[card])- som;
end;
```

```
PROCEDURE Sweep(var mat:Carree;var card:Integer);
var i,j,ind :Integer;
begin
ind:=card;
if card>1 then
  begin
  for i := 1 to card do
  for j :=1 to card do if (i<>ind) and (j<>ind) then
   mat[i,j]:=mat[i,j]-(mat[i,ind]*mat[ind,j]/mat[ind,ind]);
  for j:=1 to card do if j<>ind then
    begin
    mat[ind,j]:=mat[ind,j]/mat[ind,ind];
    mat[j,ind]:=mat[ind,j];
    end;
  end;
mat[ind,ind]:=-1/mat[ind,ind];
end;

PROCEDURE SweepInv(var  mat:Carree;var card:Integer;var ind:Integer);
var i,j :Integer;
begin
if card>1 then
  begin
  for i :=1 to card do
  for j :=1 to card do if (i <>ind) and (j<>ind) then
   mat[i,j]:=mat[i,j]-(mat[i,ind]*mat[ind,j]/mat[ind,ind]);
  for j:=1 to card do if j <> ind  then
    begin
    mat[ind,j]:=-mat[ind,j]/mat[ind,ind];
    mat[j,ind]:=mat[ind,j];
    end;
  end;
mat[ind,ind]:=-1/mat[ind,ind];
end;
```

```
PROCEDURE ProjeVect(var mat:Carree;var card:Integer;
                    var coef,proj:Vectem);
var    i,j  :  Integer;som,nomb:  Real;
begin
 for  i := 1 to card do
   begin
   som:=0;
   for j := 1 to card do
     som :=som +(mat[i,j]*coef[j]);
   proj[i]:=som;
   end;
end;



PROCEDURE DimOrd(var ens: Ensemble;var ind,card:Integer;
              var rg:Vectens;var coef:Vectem;var mat:Carree);
var entier,i,j:Integer;
begin
  entier:=ind;
  for l:=1 to m do if (l in ens) and(rg[l] > entier)  then
    begin
    rg[l]:=rg[l]-1;coef[rg[l]]:=coef[rg[l]+1];
    end;
   for i:=1 to card do
   for l:=1 to card do
   if (l>=entier) and (i>=entier) then
     mat[i,l]:=mat[i+1,l+1]
   else if l>= entier then
     begin
     mat[i,l]:=mat[i,l+1];
     mat[l,i]:=mat[i,l];
     end;
end;
```

```
Begin                          {    DEBUT de Projec_cpc :          }
Ensdentier1:=[];card1:=0;      {    Algorithme "Non_Negative Least Squares"  }
for i := 1 to n do             {    avec      operateur SWEEP     }
y[i]:=0;
for j := 1 to m do
begin
 alpha[j]:=0;
 vect1[j]:=ProdScal(X,tab[j])
end;
c:=0;r:=0;
while   (Max(vect1) > 0)  and  { Condition de non optimalité }
    not( Ensdentier1 =  [1..m]) do
  begin
  k:= Indicedumax(vect1);c:=c+1;
  Ensdentier2:=Ensdentier1 +[k];card2:=card1+1;rg[k]:=card2;
  Prepavecmat(card2,ensdentier2,rg,coef,mat);
  Sweep(mat,card2);
  MatOpposee(card2,mat);
  if card2 =1 then
    for j:= 1 to m do
     begin
     if j in Ensdentier2 then
      gamma[j]:= coef[1]* mat[1,1]
     else  gamma[j]:=0;
     end
  else
    begin
    projevect(mat,coef,card2, proj);
    rangevect(ensdentier2,rg,proj,gamma);
    end;
  d:=0;pg:=1;
  for i:=1 to m do
  if i in ensdentier2 then
  beta[i]:=gamma[i] else beta[i]:=1;
```

```
while Min(beta)<= 0  do        { Test de non admissibilité }
  begin
  beta:=gamma;d:=d+1;
  for j :=1 to m do
    begin
    alpha[j]:=(pg*(alpha[j]-beta[j]))+beta[j];
    if beta[j]<0
    then vect2[j]:=beta[j]/(beta[j]-alpha[j])
    else vect2[J]:=0 ;
    end;
  pg:=max(vect2);
  Matopposee(card2,mat);
  for j := 1 to m do
  if (j in Ensdentier2) and  ((vect2[j] = pg) or (Beta[j] = 0))
  then begin
       Ensdentier2:=Ensdentier2 -[j];ind:=rg[j];rg[j]:=0;
       SweepInv(mat,card2,Ind);
       card2:=card2-1;
       Dimord(Ensdentier2,Ind,card2,rg,coef,mat);
       end;
  Matopposee(card2,mat);
  if card2 = 1
  then for j := 1 to m do
     if j in Ensdentier2
     then gamma[j]:=Prodscal(x,tab[j])/Prodscal(tab[j],tab[j])
     else gamma[J]:=0
  else
     begin
     Projevect(mat,coef,card2, proj);
     Rangevect(ensdentier2, rg,proj,gamma);
     end;
  for i:=1 to m do
  if i in ensdentier2
  then beta[i]:=gamma[i]
```

```
    else beta[i]:=1;
    end;
  alpha:=gamma; Ensdentier1:=Ensdentier2;card1:=card2;
  Promavect(alpha,y);
  for i := 1 to n do
    begin
    z1[i]:=x[i]-y[i];Arrondir(z1[i]);
    end;
  for j := 1 to m do
  if  j in Ensdentier1
  then Vect1[J]:=0
  else  begin
        Vect1[J]:=Prodscal(Z1,Tab[J]);
        Arrondir(vect1[j]);
        end;
  MatOpposee(card1,mat);
  end;
End;                    {  FIN de   Projec_CPC   }
```

REFERENCES

A.Agha (1986): Analyse canonique de deux cônes polyédriques convexes, mémoire de DEA, Université de Paris-Dauphine.

R.D.Armstrong & E.L.Frome (1976): A branch-and-bound solution of a restricted least squares problem, Departement of General Business, The University of Texas, Austin, Technometrics, vol 18, n°4.

R.E.Barlow, D.J.Bartholomew, J.M.Bremner & H.D.Brunk (1972): Statistical inference under order restriction, New York, Wiley.

A.E.Beaton (1964): The use of special matrix operators in statistical calculus, Ed D.Thesis, Harvard University, Reprinted as Educational Testing Service Res.Bull.64-51, Princeton, N.J.

Y.Evrard & P.Lemaire (1976): Information et décision en marketing, Dalloz, Gestion.

E.Jaquet-Lagrèze & J.Siskos (1982): Assessing a set of additive utility fonctions of multicriteria decisions making, the UTA method, European Journal of Operational Research, 10, 151-164.

R.I.Jennrich (1977): "Stepwise regression", in K.Enslein, A.Ralston & H.S.Wolf (Eds), "Statistical methods for digital computers", pp 58-75, J.Wiley & Sons.

R.L.Keeney (1974): Multiplicative Utility Fonctions, Operations Research, 22, pp 22-34.

R.L.Keeney & K.Nair (1976): Evaluating Potential Nuclear Power Plan Sites in the Pacific Northwest using Decision analysis, IIASA Professional Paper n°76-1.

J.B.Kruskal (1965): Nonmetric multidimensional scaling : a numerical method,Psychometrika,29,28-42.

C.M.Lawson & R.J.Hanson (1974): Solving Least Squares Problems,Englewood Cliffs,Prentice Hall.

J.de Leeuw,F.W.Young & Y.Takane (1976): Additive structure in qualitative data :an alternating least squares method with optimal scaling features.Psychometrika,vol 41,n°4.

J.von Neumann & O.Morgenstern (1947): Theory of Games and Economic Behavior,2nded,Princeton University Press,N.J.

J.L.Richard: Aide à la décision stratégique en PME, in E.Jacquet-Lagrèze et J.Siskos(1983),chapitre V,pp 119-142.

B.Roy & D.Bouyssou (1983): Comparaison,sur un cas précis,de deux modèles concurrents d'aide à la Décision,Document du LAMSADE n°22, Université de Paris-Dauphine.

B.Roy (1978): Electre III: un algorithme de classement fondé sur une représentation floue des préférences en présence de critères multiples,Cahiers du CERO,vol20,n°1,pp 3-24.

R.Savoundararadja (1987): Evaluation comparative des méthodes multicritères de régression ordinale :méthode UTA et méthode MORALS. Thèse de 3° cycle,Université Pierre et Marie Curie.

J.Siskos & D.Yannacopoulos (1983): Amélioration de la méthode UTA par introduction d'une double fonction d'erreurs,Université de Paris-Dauphine,Cahier du Lamsade n°49.

M.Tenenhaus (1979): La régression qualitative, Revue de Statistique Appliquée,Vol XXVII.

M.Tenenhaus : Canonical analysis of two convex polyhedral cones and applications,Psychometrika(à paraître).

H.M.Wagner (1959): Linear programming techniques for regression analysis,Journal of the American Statistical Association,54,pp 206 -212.

R.E.Walpole & Myers (1972)): Probability and Statistics for Engineers and Scientists,New York:the Macmillan Company.