CAHIER DU LAMSADE

Laboratoire d'Analyse et Maitrise des Systèmes pour l'Aide à la Décision
(Université Paris IX Dauphine)

Quasi ordres généralisés et modélisation des préférences

N°9-1977

Philippe VINCKE

Avril 1977

QUASI-ORDRES GENERALISES
ET
MODELISATION DES PREFERENCES

Philippe VINCKE.

Résumé

La théorie de l'utilité a pour objet la représentation numérique des préférences. De manière précise, étant donné un ensemble A et une relation de préférence sur A, on étudie les conditions pour qu'il existe une fonction g, définie sur A et à valeurs réelles, telle que si a et b sont des éléments de A, la comparaison de nombres g(a) et g(b) donne une bonne image de la préférence entre a et b.

Les principaux résultats existant à ce jour concernent des relations de préférence souvent trop riches pour être réalistes. Dans ce papier, de nouvelles structures sont définies : elles permettent l'existence de différents degrés de préférences et d'une relation d'indifférence non nécessairement transitive.

Quelques résultats sur la représentation numérique de ces structures, la situation où les différences entre préférences ont un sens et le cas des préférences entre N-uples sont également présentés.

Summary

Utility theory treats with numerical representation of preferences : given a set A and a preference relation on A, one studies conditions to have a real function g, defined on A, such that, a and b being elements of A, the comparison of the numbers g(a) and g(b) gives information about preference between a and b.

Main known results concern preference relations which have strong properties and are not very realistic. In this paper, new structures are defined : they allow several degrees of preference and non transitive indifference.

Some results on numerical representation of these structures, comparison of preference differences and preferences between N-uples are also presented.

TABLE DES MATIERES

Avertissement.

Ce cahier rassemble les principaux résultats contenus dans la thèse : "Concept de quasi-ordre généralisé et théorèmes de représentation", présentée en vue de l'obtention du grade de Docteur en Sciences, Université Libre de Bruxelles, 1976.

Les démonstrations des théorèmes cités ne sont pas reproduites ici. Pour le lecteur intéressé, des exemplaires de la thèse sont disponibles à la bibliothèque du LAMSADE.

I N T R O D U C T I O N

La Science essaie d'expliquer et de prédire des phénomènes observables au moyen de lois générales.
En vue de formuler des lois quantitatives, les propriétés de ces phénomènes sont exprimées au moyen de nombres. C'est ce que font les physiciens depuis longtemps en définissant les notions de longueur, masse, vitesse, ... Dans le domaine de la modélisation des préférences, c'est la théorie de l'utilité qui a pour objet la représentation numérique des préférences.

Bien que la théorie de l'utilité remonte aux XVIIIe et XIXe siècles, son essor principal s'est réalisé ces trois dernières décades, essentiellement grâce à l'axiomatisation de la théorie. Dans l'approche axiomatique, on démontre, à partir de conditions imposées aux relations de préférences, l'existence de fonctions permettant de représenter ces préférences.
De manière précise, étant donné un ensemble A (de décisions possibles) et une relation de préférence sur A, on étudie les conditions pour qu'il existe une fonction g, définie sur A et à valeurs réelles, telle que si a et b sont des éléments de A, la comparaison des nombres g(a) et g(b) donne une bonne image de la préférence entre a et b.

A. *Quasi-ordres généralisés.*

Les théories modernes de l'utilité, et donc des disciplines telles que la théorie des jeux, la théorie de la décision, la théorie des probabilités subjectives (qui emploient la théorie de l'utilité) supposent en général l'existence de relations de préférence qui sont des ordres faibles.* En particulier, cela implique que si $<$ est la relation de préférence, la relation d'indifférence définie par

$$a \sim b \quad \text{ssi} \quad a \not< b \text{ et } b \not< a ,$$

est transitive.
Cette hypothèse est peu réaliste et, pour le montrer, nous empruntons à LUCE ([39]) son exemple de "la tasse de café".
Il est évident qu'aucun individu n'est capable de déceler une différence entre une tasse de café contenant x grammes de sucre et une tasse en contenant x + 0,01, et ce, quel que soit x. Par conséquent, tout individu sera indiffé-

* définition en page 6.

rent entre une tasse sans sucre et une tasse contenant 0,01 gramme de sucre, entre cette dernière et une tasse en contenant 0,02 g., entre celle-ci et une tasse en contenant 0,03 g., et ainsi de suite. Si la relation d'indifférence était transitive, on en déduirait que tout individu est indifférent entre une tasse de café sans sucre et une tasse contenant, par exemple, 100 g. de sucre, ce qui est évidemment contraire à la réalité.
Cela est dû au fait que, contrairement à la physique où les phénomènes décrits le sont à partir de considérations objectives, la théorie de l'utilité s'applique le plus souvent à des phénomènes subjectifs.

C'est la raison pour laquelle LUCE ([39]) a introduit la notion de quasi-ordre (en anglais : semiorder), structure constituée d'une relation de préférence et d'une relation d'indifférence non nécessairement transitive.
En fait, le quasi-ordre traduit simplement la notion de seuil : une action b est indifférente à une action a aussi longtemps qu'elle diffère peu de a; à partir d'un certain seuil, pouvant varier avec a, la différence entre a et b est considérée comme suffisante pour pouvoir justifier une préférence.

Cependant, le traitement des problèmes pratiques montre que, bien souvent, le décideur ne peut fixer son choix entre l'indifférence et la préférence stricte : on parle alors de préférence au sens large ([49]). En particulier, E. JACQUET-LAGREZE ([30]) a montré comment cette notion apparaît tout naturellement lorsqu'on compare des distributions de probabilité.

De manière générale, B. ROY ([50]) a mis en évidence l'intérêt de construire des modèles traduisant différents degrés de préférence.

Dans le premier chapitre de ce Cahier, nous proposons l'introduction de structures généralisant les ordres faibles et les quasi-ordres et traduisant ce souci de modéliser des situations où apparaissent différents degrés de préférence : ce sont les quasi-ordres généralisés (Q.O.G.) et les quasi-ordres orientés généralisés (Q.O.O.G.).

B. La représentation numérique des Q.O.G.

Le premier résultat fondamental établi dans l'optique de la théorie de l'utilité est la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une fonction g telle que

$$a < b \iff g(a) < g(b), \ \forall\, a, b \in A\ ,$$

où $<$ est la relation de préférence définie sur A.

Ce théorème, démontré notamment par CANTOR ([7]) et par BIRKHOFF ([6]), exige que la relation de préférence soit un ordre faible.
Nous avons rappelé dans le paragraphe précédent l'inconvénient majeur que présentait cette structure et l'introduction par LUCE de la notion de quasi-ordre.

Un nouveau problème s'est alors posé en théorie de l'utilité : la représentation numérique des quasi-ordres. De manière précise, on a étudié les conditions pour qu'il existe une fonction g et une fonction seuil σ telles que, $\forall$ a, b $\in$ A :

$$\begin{cases} a < b \iff g(a) + \sigma(a) < g(b) , \\ a \sim b \iff \begin{cases} g(a) + \sigma(a) \geqslant g(b) , \\ g(b) + \sigma(b) \geqslant g(a) , \end{cases} \\ \sigma(a) \geqslant 0, \ \forall a \in A . \end{cases}$$

Des résultats ont été obtenus dans les cas où A est dénombrable et fini.

Dans le deuxième chapitre de ce Cahier, nous énonçons les résultats obtenus concernant la représentation numérique des Q.O.G. et des Q.O.O.G., aussi bien dans le cas fini que dans le cas infini qualconque.

C. *La comparaison des différences entre préférences.*

Nous avons considéré, dans ce qui précède, le problème de la représentation numérique d'une relation de préférence. Autrement dit, nous associons un nombre à chaque décision de telle manière que la comparaison de ces nombres entre eux fournisse un modèle adéquat des préférences du décideur. Encore faut-il préciser quel usage on peut faire de ces nombres. Supposons par exemple que $<$ soit la relation de préférence du décideur et que l'on ait construit une fonction g telle que, $\forall$ a, b $\in$ A :

$$a < b \iff g(a) < g(b) .$$

On peut se demander, par exemple, si le fait que

$$g(b) - g(a) < g(d) - g(c)$$

est révélateur d'une réalité concernant les préférences du décideur. Cette inégalité signifie-t-elle que la supériorité de b sur a est plus faible que celle de d sur c ? Cette comparaison des différences entre préférences a-t-elle un sens aux yeux du décideur ? En supposant que le décideur puisse comparer la supériorité de b sur a et celle de d sur c, peut-on toujours construire une fonction g qui reflète ces préférences ?

Ce problème de la représentation, non seulement des préférences du décideur, mais aussi des différences entre ces préférences, constitue un autre volet important de la théorie de l'utilité. Le troisième chapitre lui est consacré.

D. Préférences entre N-uples, indépendance préférentielle.

De nombreux auteurs ont étudié le problème de la représentation numérique d'une relation de préférence définie sur le produit cartésien de n ensembles et, en particulier, sur R^n (en vue notamment des applications économiques). Ils ont étudié les conditions pour que, étant donné $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ et une relation $\leq$ sur X, il existe des fonctions $g_1, g_2, \dots, g_n$, définies respectivement sur $X_1, X_2, \dots, X_n$, à valeurs réelles et telles que :

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) < (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

ssi

$$g_1(x_1) + \dots + g_n(x_n) < g_1(y_1) + \dots + g_n(y_n) ,$$

où

$$x_i, y_i \in X_i , \quad \forall i .$$

La notion fondamentale qui apparaît dans les résultats connus est l'indépendance préférentielle.

Si

$$N = \{1, 2, \dots, n\} ,$$

on dit que K (sous-ensemble de N) est préférentiellement indépendant dans N si les préférences entre des éléments qui ne diffèrent que par leurs composantes dans K sont indépendantes des composantes hors de K.

Il est bien évident que les conditions à remplir pour avoir une représentation additive sont très fortes et peu applicables en pratique. Un travail récent de TING ([54]) a ouvert la voie à de nouvelles recherches dans ce domaine. En effet, à partir d'une caractérisation de l'indépendance préférentielle au moyen de taux de substitution, TING obtient des propriétés permettant de réduire le problème initial : la comparaison entre n-uples est remplacée par la comparaison entre p-uples, avec $p < n$; la représentation additive apparaît comme un cas particulier du résultat général démontré par TING.

Néanmoins les hypothèses de base, dans le travail de TING, sont encore assez restrictives.

Dans le quatrième chapitre de ce Cahier, nous définissons des "taux de substitution généralisés" qui permettent de démontrer des résultats analogues à ceux de TING, mais sous des hypothèses plus générales.

CHAPITRE I : QUASI-ORDRES GENERALISES.

Nous nous proposons, dans ce chapitre, de rappeler quelques notions fondamentales, de définir les concepts de quasi-ordre généralisé (Q.O.G.) et de quasi-ordre orienté généralisé (Q.O.O.G.), et d'en énoncer les propriétés.

La notion de quasi-ordre généralisé constitue une extension de celle de quasi-ordre. Intuitivement, un Q.O.G. est constitué d'une relation d'indifférence, réflexive et symétrique mais pas nécessairement transitive (cf., dans l'introduction, la motivation de l'emploi des quasi-ordres) et d'une famille de relations (de préférences) "emboîtées", irréflexives et asymétriques.

Un quasi-ordre orienté généralisé est un Q.O.G. pour lequel la relation d'indifférence est transitive. Un ordre faible est un Q.O.O.G. particulier.

A. *Rappel.*

Une relation R dans un ensemble A est un sous-ensemble de A x A, où

$$A \times A = \{(a,b) \mid a, b \in A\}.$$

Lorsque $(a,b) \in R$, nous noterons $a\ R\ b$.

Lorsque $(a,b) \notin R$, nous noterons $a\ \not R\ b$.

Une relation R dans A est

- réflexive ssi $a\ R\ a,\ \forall\ a \in A$;
- irréflexive ssi $a\ \not R\ a,\ \forall\ a \in A$;
- symétrique ssi $a\ R\ b \Rightarrow b\ R\ a,\ \forall\ a, b \in A$;
- asymétrique ssi $a\ R\ b \Rightarrow b\ \not R\ a,\ \forall\ a, b \in A$;
- antisymétrique ssi $a\ R\ b$ et $b\ R\ a \Rightarrow a = b,\ \forall\ a, b \in A$;
- transitive ssi $a\ R\ b$ et $b\ R\ c \Rightarrow a\ R\ c,\ \forall\ a, b, c \in A$:
- négativement transitive ssi $a\ \not R\ b$ et $b\ \not R\ c \Rightarrow a\ \not R\ c,\ \forall\ a,b,c \in A$;
- connexe ssi $a\ R\ b$ et/ou $b\ R\ a,\ \forall\ a,b \in A,\ a \neq b$;
- un ordre faible ssi elle est asymétrique et négativement transitive ;
- un préordre ssi elle est réflexive et transitive ;
- un préordre total ssi elle est réflexive, transitive et connexe ;
- un ordre strict total ssi elle est asymétrique, transitive et connexe ;
- une relation d'équivalence ssi elle est réflexive, symétrique et transitive.

Théorème I.A.1.

Soit $\prec$ un ordre faible sur A. La relation $\sim$, définie par

$$a \sim b \text{ ssi } a \not\prec b \text{ et } b \not\prec a, \ \forall\, a, b \in A,$$

est une relation d'équivalence sur A.
D'autre part, la relation $\prec'$, définie sur $A/\sim$ par :

$$a' \prec' b' \text{ ssi } a \prec b, \ \forall\, a', b' \in A/\sim,$$

où $a \in a'$

et $b \in b'$,

est un ordre strict total.
Enfin, la relation $\precsim$, définie sur A par :

$$a \precsim b \text{ ssi } a \prec b \text{ ou } a \sim b, \ \forall\, a, b \in A,$$

est un préordre total.

B. *Quasi-ordre.*

Une relation $\prec$ dans A est un quasi-ordre ssi :

B1. - elle est irréflexive,
B2. - $a \prec b$ et $c \prec d \Rightarrow a \prec d$ ou $c \prec b$, $\forall\, a,b,c,d \in A$,
B3. - $a \prec b$ et $b \prec c \Rightarrow a \prec d$ ou $d \prec c$, $\forall\, a,b,c,d \in A$.

Si $a \prec b$ traduit le fait que "b est préféré à a", la relation $\sim$ définie par

B4. - $a \sim b$ ssi $a \not\prec b$ et $b \not\prec a$,

représente l'indifférence du décideur. Dans le cas où $\prec$ est un quasi-ordre, $\sim$ n'est pas nécessairement transitive.

LUCE ([39]) définit la notion de quasi-ordre à partir du couple $(\prec,\sim)$ de la manière suivante :

B5. - $\forall\, a,b \in A$, on a une et une seule des 3 situations suivantes :

$$a \prec b, \ b \prec a, \ a \sim b,$$

B6. - $\sim$ est réflexive,
B7. - $a \prec b$, $b \sim c$, $c \prec d \Rightarrow a \prec d$, $\forall\, a,b,c,d \in A$,
B8. - $a \prec b$, $b \prec c$, $b \sim d \Rightarrow a \not\sim d$ ou $c \not\sim d$, $\forall\, a,b,c,d \in A$.

L'interprétation intuitive de cette définition est plus claire que la précédente. D'autre part, dans le contexte de la modélisation des préférences, il est plus naturel d'introduire explicitement la relation $\sim$ dans la définition

du quasi-ordre.
On peut montrer que les corps d'axiomes (B1, B2, B3, B4) et (B5, B6, B7, B8) sont équivalents.

C. *Quasi-ordre Généralisé (Q.O.G.)*

Comme nous l'avons vu, il arrive souvent, en pratique, que le décideur ne puisse fixer son choix entre l'indifférence et la préférence stricte et opte plutôt pour une situation intermédiaire (préférence large). Les préférences du décideur se traduisent alors par une structure à 3 relations : $\sim$ (indifférence), $<_1$ (préférence large) et $<_2$ (préférence stricte). De manière plus générale, nous nous proposons d'étudier une structure à m+1 relations $(\sim, <_1, <_2, \ldots, <_m)$, où $<_i$ représente une relation de préférence d'autant plus forte que i est grand.

Nous dirons que $(\sim, <_1, <_2 \ldots <_m)$ est un quasi-ordre généralisé (Q.O.G.) ss'il satisfait aux axiomes suivants :

C1. $\forall$ a,b $\in$ A, on a une et une seule des 2m+1 situations suivantes :

$$a <_1 b,\ a <_2 b,\ \ldots,\ a <_m b,\ b <_1 a,\ b <_2 a,\ \ldots,\ b <_m a,\ a \sim b\ ;$$

C2. $\sim$ est réflexive;

C3. $\forall$ a,b,c $\in$ A :

$$a <_\ell b \text{ et } b <_q c \Rightarrow \begin{cases} a <_{\ell+q} c \text{ ou } a <_{\ell+q+1} c, & \text{si } \ell+q < m, \\ a <_m c & \text{, si } \ell+q \geq m\ ; \end{cases}$$

C4. $\forall$ a,b,c $\in$ A :

$$\left.\begin{array}{l} - a <_\ell c,\ b \sim c \text{ et } \ell > 1 \\ \qquad\quad \text{ou} \\ - c \sim a,\ c <_\ell b \text{ et } \ell > 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a <_\ell b \text{ ou } a <_{\ell-1} b \text{ ou } a <_{\ell+1} b, & \text{si } \ell < m, \\ a <_m b \text{ ou } a <_{m-1} b & \text{, si } \ell = m\ ; \end{cases}$$

C4 bis. $\forall$ a,b,c $\in$ A :

$$\left.\begin{array}{l} - a <_1 c,\ b \sim c \\ \qquad \text{ou} \\ - c \sim a,\ c <_1 b \end{array}\right\} \Rightarrow a <_1 b \text{ ou } a <_2 b \text{ ou } a \leftarrow b\ ,$$

où nous notons

$$a \leftarrow b \text{ ssi } \begin{cases} a \sim b\,, \\ d <_{\underline{k}} a \Rightarrow d <_{\underline{k}} b,\ \forall k,\ \forall d\,, \\ b <_{\underline{k}} e \Rightarrow a <_{\underline{k}} e,\ \forall k,\ \forall e\,, \end{cases}$$

et

$$d <_{\underline{k}} a \text{ ssi } \exists\, \ell \geq k \mid d <_{\ell} a\,;$$

C5. $\forall\, a,b,c \in A$:

$$\left.\begin{array}{l} - a <_{\ell} c,\ b <_{\ell-1} c,\ 1 < \ell < m \\ \qquad\qquad \text{ou} \\ - c <_{\ell-1} a,\ c <_{\ell} b,\ 1 < \ell < m \end{array}\right\} \Rightarrow a <_{1} b \text{ ou } a \leftarrow b\,;$$

C5.bis $\forall\, a,b,c \in A$:

$$\left.\begin{array}{l} - a <_{m} c,\ b <_{m-1} c \\ \qquad\qquad \text{ou} \\ - c <_{m-1} a,\ c <_{m} b \end{array}\right\} \Rightarrow a \underline{\leftarrow} b\,,$$

où nous notons

$$a \underline{\leftarrow} b \text{ ssi } a <_{\underline{1}} b \text{ ou } a \leftarrow b\,.$$

Ces axiomes permettent d'établir les propriétés suivantes (démonstrations: [55]) :

C6. $\forall\, a,b \in A : a \sim b \Leftrightarrow b \sim a$:

C7. $\forall\, a,b \in A : a <_{q} b,\ q > 1 \Rightarrow \nexists\, c \in A \mid a \sim c \text{ et } c \sim b\,;$

C8. $\forall\, a,b,c \in A : a <_{1} b <_{1} c \Rightarrow \nexists\, d \in A \mid d \sim a,\ d \sim b \text{ et } d \sim c\,;$

C9. $\forall\, a,b,c \in A$:

$$\left.\begin{array}{l} a <_{\ell} c,\ b <_{q} c,\ q < \ell-1,\ \ell < m \\ \qquad\qquad \text{ou} \\ c <_{q} a,\ c <_{\ell} b,\ q < \ell-1,\ \ell < m \end{array}\right\} \Rightarrow a <_{\ell-q} b \text{ ou } a <_{\ell-q-1} b\,;$$

C10. $\forall\, a,b,c \in A$:

$$\left.\begin{array}{l} a <_{m} c,\ b <_{q} c,\ q < m-1 \\ \qquad\qquad \text{ou} \\ c <_{q} a,\ c <_{m} b,\ q < m-1 \end{array}\right\} \Rightarrow a <_{\underline{m-q-1}} b\,;$$

C11. $\forall\, a,b,c \in A$:

$$\left.\begin{array}{l} a <_{q} c,\ b <_{q} c,\ q < m \\ \qquad\qquad \text{ou} \\ c <_{q} a,\ c <_{q} b,\ q < m \end{array}\right\} \Rightarrow a \sim b\,;$$

C12. La relation $\approx$ définie comme suit : $\forall$ a,b $\in$ A :

$$a \approx b \text{ ssi } \begin{array}{l} c <_j a \iff c <_j b, \ \forall j, \forall c \in A, \\ a <_j c \iff b <_j c, \ \forall j, \forall c \in A, \end{array}$$

est une relation d'équivalence ;

C13. $\forall$ a,b $\in$ A :

$$a \sim b \text{ et } a \not\approx b \Rightarrow a \leftarrow b \text{ ou } b \leftarrow a \text{ (ou exclusif)} ;$$

C14. $\forall$ a,b,c $\in$ A :

$$a <_\ell b \text{ et } b <_q c \Rightarrow a <_{\underline{\ell}} d \text{ ou } d <_{\underline{q}} c, \ \forall d \in A ;$$

C15. $\forall$ a,b,c,d $\in$ A :

$$a <_q b \text{ et } c <_\ell d \Rightarrow a <_{\underline{q}} d \text{ ou } c <_{\underline{\ell}} b ;$$

C16. $\forall$ a,b $\in$ A :

$$a \leftarrow b \text{ et } a \not\approx b \text{ ssi } a \sim b \text{ et}$$

$$\exists k, \exists c \in A \mid c \not<_{\underline{k}} a \text{ et } c <_{\underline{k}} b,$$

ou

$$\exists k, \exists d \in A \mid a <_{\underline{k}} d \text{ et } b \not<_{\underline{k}} d ;$$

C17. Si $(\sim, <_1, \ldots <_m)$ est Q.O.G. sur A ,
alors $(\sim', <'_1, \ldots <'_m)$ est un Q.O.G. sur $A/_\approx$
où on définit, $\forall$ a', b' $\in A/_\approx$:

$$a' <'_j b' \text{ ssi } a <_j b,$$

$$a' \sim' b' \text{ ssi } a \sim b,$$

où

$$a \in a'$$

et

$$b \in b'.$$

Cette définition a un sens puisque $\approx$ est une relation d'équivalence (C12) et que, $\forall$ a_1, $a_2 \in$ a', $\forall$ b_1, $b_2 \in$ b' :

$$\begin{cases} a_1 <_j b_1 \overset{C12}{\Rightarrow} a_2 <_j b_2, \\ a_1 \sim b_1 \overset{C12}{\Rightarrow} a_2 \sim b_2. \end{cases}$$

C18. Si $(\sim, <_1, \ldots <_k \ldots <_m)$ est un Q.O.G. sur A, alors $(\sim, <_1, \ldots \underline{<_k})$ est aussi un Q.O.G. sur A.

D. Quasi-ordre orienté généralisé (Q.O.O.G.).

Nous dirons que $(<_o, <_1 \ldots <_m)$ est un quasi-ordre orienté généralisé (Q.O.O.G.) ss'il satisfait aux axiomes suivants :

D1. $\forall$ a,b $\in$ A :

$$a <_j b \Rightarrow b \not<_j a \text{ et } \nexists\, k \neq j \mid a <_k b \text{ ou } b <_k a \;;$$

D2. $\forall$ a,b,c $\in$ A :

$$a <_\ell b \text{ et } b <_q c \Rightarrow \begin{cases} a <_{\ell+q} c \text{ ou } a <_{\ell+q+1} c, & \text{si } \ell + q < m \;; \\ a <_m c & \text{, si } \ell + q \geqslant m \;; \end{cases}$$

D3. $\forall$ a,b,c $\in$ A :

$$\left.\begin{array}{c} a <_\ell c,\ b - c \\ \text{ou} \\ c <_\ell b,\ a - c \end{array}\right\} \Rightarrow a <_\ell b \;;$$

où on a défini

$$b - c \text{ ssi } \forall j : b \not<_j c \text{ et } c \not<_j b \;.$$

Ces axiomes permettent d'établir les propriétés suivantes :

D4. $-$ est une relation d'équivalence ;

D5. $\forall$ a,b,c $\in$ A :

$$\left.\begin{array}{c} a <_\ell c,\ b <_{\ell-1} c,\ 0 < \ell < m \\ \text{ou} \\ c <_{\ell-1} a,\ c <_\ell b,\ 0 < \ell < m \end{array}\right\} \Rightarrow a <_1 b \text{ ou } a <_o b \;;$$

D5 bis. $\forall$ a,b,c $\in$ A :

$$\left.\begin{array}{c} a <_m c,\ b <_{m-1} c \\ \text{ou} \\ c <_{m-1} a,\ c <_m b \end{array}\right\} \Rightarrow a \underline{<_o} b \,,$$

où

$$a \underline{<_o} b \text{ ssi } \exists\, \ell \geqslant 0 \mid a <_\ell b \;;$$

D6. $\forall\ a,b,c \in A$:

$$\left.\begin{array}{c} a <_\ell c,\ b <_0 c,\ \ell \neq 0 \\ \text{ou} \\ c <_\ell b,\ c <_0 a,\ \ell \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow a <_{\ell-1} b \text{ ou } a <_\ell b\ ;$$

D7. $\forall\ a,b,c \in A$:

$$\left.\begin{array}{c} a <_\ell c,\ b <_q c,\ q < \ell - 1,\ \ell < m \\ \text{ou} \\ c <_q a,\ c <_\ell b,\ q < \ell - 1,\ \ell < m \end{array}\right\} \Rightarrow a <_{\ell-q} b \text{ ou } a <_{\ell-q-1} b\ ;$$

D8. $\forall\ a,b,c \in A$:

$$\left.\begin{array}{c} a <_m c,\ b <_q c,\ q < m - 1 \\ \text{ou} \\ c <_q a,\ c <_m b,\ q < m - 1 \end{array}\right\} \Rightarrow a <_{\underline{\underline{m-q-1}}} b\ ;$$

D9. $\forall\ a,b,c \in A$:

$$\left.\begin{array}{c} a <_q c,\ b <_q c,\ q < m \\ \text{ou} \\ c <_q a,\ c <_q b,\ q < m \end{array}\right\} \Rightarrow a <_0 b,\ a - b \text{ ou } b <_0 a\ ;$$

D10. $\forall\ a,b,c \in A$:

$$a <_\ell b \text{ et } b <_q c \Rightarrow a <_{\underline{\underline{\ell}}} d \text{ ou } d <_{\underline{\underline{q}}} c,\ \forall\ d \in A\ ;$$

D11. $\forall\ a,b,c,d \in A$:

$$a <_q b \text{ et } c <_\ell d \Rightarrow a <_{\underline{\underline{q}}} d \text{ ou } c <_{\underline{\underline{\ell}}} b\ ,$$

D12. Si $(<_0, <_1 \ldots <_m)$ est un Q.O.O.G. sur A ,

alors $(<'_0, <'_1 \ldots <'_m)$ est un Q.O.O.G. sur $A/_-$,

où on définit, $\forall\ a', b' \in A/_-$:

$$a' <'_j b' \text{ ssi } a <_j b\ ,$$

où

$$a \in a'$$

et

$$b \in b'\ .$$

Cette définition a un sens puisque $-$ est une relation d'équivalence (D4) et que, $\forall\ a_1, a_2 \in a'$, $\forall\ b_1, b_2 \in b'$:

$$a_1 <_j b_1 \overset{D3}{\Rightarrow} a_2 <_j b_2 .$$

D13. Si $(<_o, <_1 \ldots <_k \ldots <_m)$ est un Q.O.O.G. sur A, alors $(<_o, <_1 \ldots \underline{<_k})$ est aussi un Q.O.O.G. sur A.

E. *Quasi-Ordre Généralisé et Quasi-Ordre Orienté Généralisé Associés.*

Soit $(\sim, <_1, <_2, \ldots <_m)$ un ensemble de m+1 relations dans A telles que, $\forall$ a,b $\in$ A :

$a \sim b$ ssi $a \not<_j b$ et $b \not<_j a$, $\forall j \in \{1, 2, \ldots, m\}$.

Soit les relations $\leftarrow$ et $\approx$ définies comme en C4 bis et C12 et soit, $\forall$ a,b $\in$ A :

$a <_o b$ ssi $a \leftarrow b$ et $a \not\approx b$.

Nous avons le théorème suivant :

__Théorème I.E.1.__

$(\sim, <_1, <_2, \ldots <_m)$ __est un Q.O.G. ssi__ $(<_o, <_1 \ldots <_m)$ __est un Q.O.O.G.__

Il résulte de ce théorème qu'à tout Q.O.G. on peut associer un (et donc une famille grâce à D8) Q.O.O.G., et vice versa.

F. *Commentaires.*

. Un Q.O.G. pour lequel m = 1 est un quasi-ordre.

. Un Q.O.O.G. pour lequel m = 0 est un ordre faible.

. Il résulte de C18 qu'à tout Q.O.G. à m+1 relations, on peut associer une famille de Q.O.G. à k+1 relations, où k = 1, 2, ... m-1. En particulier, on peut lui associer le quasi-ordre $(\sim, \underline{<_1})$.

. Il résulte de D13 qu'à tout Q.O.O.G. à m+1 relations, on peut associer une famille de Q.O.O.G. à k+1 relations, où k = 0, 1, ... m-1. En particulier, on peut lui associer l'ordre faible $\underline{<_o}$.

. Comme on le voit, le système d'axiomes des Q.O.O.G. est beaucoup plus simple que celui des Q.O.G. En particulier les axiomes C5 et C5 bis ne peuvent être démontrés à partir des axiomes C1 → C4 bis (à cause de "l'imprécision" de l'axiome C4), alors que leurs correspondants D5 et D5 bis se déduisent des axiomes D1 → D3.

. Le paragraphe E montre le lien qui existe entre les Q.O.G. et les Q.O.O.G. Dans la référence [55], les résultats cités dans les chapitres suivants sont démontrés pour les Q.O.O.G. et, grâce à ce lien, des résultats analogues sont établis pour les Q.O.G., moins maniables mais sans doute plus susceptibles de représenter la réalité.

CHAPITRE II : LA REPRESENTATION NUMERIQUE DES Q.O.G.

Nous établissons dans ce chapitre des conditions pour qu'un Q.O.G. (ou un Q.O.O.G.) soit représentable au moyen de fonctions à valeurs réelles.

Les résultats obtenus fournissent en particulier les conditions pour avoir ce que B. ROY ([49]) appelle vrai-critères, précritères, quasi-critères et pseudo-critères.

A. *Introduction.*

De manière générale, le théorème suivant a été démontré :

Théorème II.A.1.

Il existe sur A une fonction g, à valeurs réelles, telle que, $\forall a,b \in A$:

$$a \prec b \Leftrightarrow g(a) < g(b)$$

ssi $\prec$ est un ordre faible et qu'il existe un sous-ensemble dénombrable L' de $A/\sim$ tel que, $\forall a', b' \in A/\sim \setminus L'$:

$$a' \prec' b' \Rightarrow \exists\, \ell' \in L' \mid a' \prec' \ell' \prec' b' .$$

(Pour la définition de $\sim$ et de $\prec'$, voir théorème I.A.1).

C'est le théorème fondamental que l'on retrouve notamment dans CANTOR ([7]), MILGRAM ([45]), BIRKHOFF ([6]), et FISHBURN ([23]).

L'existence du sous-ensemble dénombrable L' peut être exprimée de manière équivalente en termes topologiques, la topologie utilisée étant définie à partir de la relation $\prec$: pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à JAFFRAY ([31])

La représentation numérique des quasi-ordres a également été étudiée et les deux résultats suivants ont été démontrés (cf. [23]) :

Théorème II.A.2.

Si $(\prec,\sim)$ est un quasi-ordre sur A et si $A/_{\approx}$ est fini, il existe sur A une fonction g, à valeurs réelles, et une constante p telles que :

$$\begin{cases} a \prec b \iff g(a) + p < g(b) , \\ p > 0. \end{cases}$$

<u>Théorème II.A.3.</u>

<u>Si $(\preccurlyeq, \sim)$ est un quasi-ordre sur</u> A <u>et si</u> $A/_{\approx}$ <u>est dénombrable, il existe sur</u> A <u>deux fonctions</u> g <u>et</u> σ, <u>à valeurs réelles, telles que,</u> $\forall$ a,b $\in$ A :

$$\begin{cases} a \prec b \iff g(a) + \sigma(a) < g(b) , \\ \sigma(a) > 0, \forall a \in A . \end{cases}$$

En fait, le théorème II.A.3. a été démontré pour la classe des ordres d'intervalles (cf. [23]), qui contient celle des quasi-ordres mais ne présente pas d'intérêt en soi dans le cadre de la modélisation des préférences.
Nous énonçons ci-dessous quelques résultats obtenus pour les quasi-ordres orientés généralisés.

B. *Cas infini.*

Nous noterons

$$M^0 = \{0, 1, 2, \ldots, m\}$$

et

$$M = \{1, 2, \ldots, m\}.$$

Rappelons également que $(<'_0, \ldots <'_m)$ est le Q.O.O.G. sur A/$\sim$ défini à partir de $(<_0 \ldots <_m)$ (cf. CH.I, D12).
Nous disons que la propriété P1 est satisfaite s'il existe sur A des fonctions g, σ_1, σ_2, ..., σ_m à valeurs réelles telles que, $\forall$ a,b $\in$ A :

$$\begin{cases} - \ a <_m b \iff g(a) + \sigma_m(a) < g(b) \ ; \\ - \ a <_k b \iff g(a) + \sigma_k(a) < g(b) < g(a) + \sigma_{k+1}(a), \ \forall k \in M^0 \setminus \{m\} ; \\ - \ 0 = \sigma_0(a) < \sigma_1(a) < \ldots < \sigma_m(a) \ , \ \forall a \in A \ ; \\ - \ \dfrac{[\sigma_{k+j}(a) - \sigma_k(a)] - [\sigma_{\ell+j}(b) - \sigma_\ell(b)]}{[g(a) + \sigma_k(a)] - [g(b) + \sigma_\ell(b)]} > -1 \ , \\ \qquad \forall a,b \in A, \ \forall j,k,\ell \in M^0 \text{ tels que } \begin{cases} k+j \leq m, \\ \ell+j \leq m. \end{cases} \end{cases}$$

Les deux dernières conditions seront appelées conditions de cohérence strictes; elles peuvent encore s'exprimer :

$$\left[\begin{array}{l} - 0 = \sigma_o(a) < \sigma_1(a) < \dots < \sigma_m(a),\ \forall\ a \in A\ ; \\ - \forall\ a,b \in A,\ \forall\ j,k,\ell \in M^o \text{ tels que } k+j \leq m \text{ et } \ell+j \leq m : \\ \qquad \begin{cases} g(a) + \sigma_k(a) < g(b) + \sigma_\ell(b) \Rightarrow g(a) + \sigma_{k+j}(a) < g(b) + \sigma_{\ell+j}(b)\ , \\ g(a) + \sigma_k(a) = g(b) + \sigma_\ell(b) \Rightarrow g(a) + \sigma_{k+j}(a) = g(b) + \sigma_{\ell+j}(b)\ . \end{cases} \end{array}\right.$$

Nous disons que la propriété P2 est satisfaite s'il existe sur A des fonctions $g,\ \sigma_1,\ \dots\ \sigma_m$ à valeurs réelles telles que, $\forall\ a,b \in A$:

$$\left[\begin{array}{l} - a <_m b \Leftrightarrow g(a) + \sigma_m(a) < g(b)\ ; \\ - a <_k b \Leftrightarrow g(a) + \sigma_k(a) < g(b) \leq g(a) + \sigma_{k+1}(a)\ ,\quad \forall\ k \in M^o \setminus \{m\}; \\ - 0 = \sigma_o(a) \leq \sigma_1(a) \leq \dots \leq \sigma_m(a)\ ,\quad \forall\ a \in A\ ; \\ - \dfrac{[\sigma_{k+j}(a) - \sigma_k(a)] - [\sigma_{\ell+j}(b) - \sigma_\ell(b)]}{[g(a) + \sigma_k(a)] - [g(b) + \sigma_\ell(b)]} \geq -1\ , \\ \qquad\qquad \forall\ a,b \in A,\ \forall\ j,k,\ell \in M^o \text{ tels que } \begin{cases} k + j \leq m\ , \\ \ell + j \leq m\ . \end{cases} \end{array}\right.$$

Les deux dernières conditions seront appelées conditions de cohérence larges.

Théorème II.B.1.

> Soit A un ensemble quelconque et $(<_o,\ <_1,\ \dots,\ <_m)$ un ensemble de m+1 relations sur A.
> Si $(<_o,\ <_1\ \dots\ <_m)$ est un Q.O.O.G. et s'il existe un sous-ensemble dénombrable L' de A/~ tel que, $\forall\ a',\ b' \in A/\sim \setminus L',\ \forall\ k \in M^o$:
>
> $$(a) : a' <'_k b' \Rightarrow \exists\ \ell' \in L' \mid a' <'_o \ell' <'_k b'\ ,$$
>
> $$(b) : a' \not<'_k b' \Rightarrow \exists\ \ell' \in L' \mid a' \not<'_k \ell',\ b' <'_o \ell'\ ,$$
>
> alors les propriétés P_1 et P_2 sont satisfaites.

Théorème II.B.2.

Analogue au théorème II.B.1. mais la condition (a) est remplacée par :

$$(a') : a' <_k' b' \Rightarrow \exists\, \ell' \in L' \mid a' <_k' \ell' <_o' b' .$$

Théorème II.B.3.

Soit A un ensemble quelconque et $(<_o, <_1 \ldots <_m)$ un ensemble de m+1 relations sur A.
Si la propriété P_2 est satisfaite, alors $(<_o, <_1 \ldots <_m)$ est un Q.O.O.G. et il existe un sous-ensemble dénombrable L' de A\ tel que, $\forall a', b' \in A/\!\sim \setminus L'$, $\forall k \in M^o$:

$$(a) : a' <_k' b' \Rightarrow \exists\, \ell' \in L' \mid a' <_o' \ell' <_k' b' .$$

Théorème II.B.4.

Analogue au théorème II.B.3. mais la condition (a) est remplacée par (a').

Théorème II.B.5.

Soit A un ensemble quelconque et $(<_o, <_1 \ldots <_m)$ un Q.O.O.G. sur A.
Une condition nécessaire et suffisante pour que la propriété P_1 soit satisfaite est qu'il existe un sous-ensemble dénombrable L' de A/~ tel que, $\forall a', b' \in A/\!\sim \setminus L'$, $\forall k \in M^o$:

$$(a) : a' <_k' b' \Rightarrow \exists\, \ell' \in L' \mid a' <_o' \ell' <_k' b' ,$$

$$(b) : a' \not<_k' b' \Rightarrow \exists\, \ell' \in L' \mid a' \not<_k' \ell',\ b' <_o' \ell' .$$

Théorème II.B.6.

Analogue au théorème II.B.5. mais la condition (a) est remplacée par (a').

Théorème II.B.7.

Soit A un ensemble dénombrable et $(<_o, <_1 \ldots <_m)$ un ensemble de m+1 relations sur A.
Une condition nécessaire et suffisante pour que la propriété P_2 soit satisfaite est que $(<_o, <_1 \ldots <_m)$ soit un Q.O.O.G.

Théorème II.B.8.

<u>Si $(<_0 \ldots <_m)$ est un Q.O.O.G. sur</u> A <u>et si</u> A/= <u>est dénombrable, alors les propriétés</u> P_1 <u>et</u> P_2 <u>sont satisfaites.</u>

Grâce au lien établi entre les Q.O.O.G. et les Q.O.G. (cf. Chapitre I.E.), on déduit des théorèmes précédents des résultats analogues pour les Q.O.G.

Commentaires.

1. La fonction g sera appelée fonction principale et les fonctions σ_i, fonctions seuils.

2. Les résultats précédents consistent donc à attribuer à chaque élément a de A, une valeur principale g(a) et un ensemble de seuils $\sigma_1(a)$, ... $\sigma_m(a)$ qui définissent les différents degrés de préférence par rapport à l'action a. Bien entendu, ces fonctions doivent satisfaire à un minimum de cohérence (strictes ou larges suivant le cas).

3. Les théorèmes II.B.1. et II.B.2. donnent des conditions suffisantes pour que les propriétés P_1 et P_2 soient satisfaites : on y retrouve d'une part la structure de Q.O.O.G. introduite au chapitre précédent, d'autre part une condition de densité du même type que celle du théorème II.A.1.

   Ces conditions ne sont qu'en partie nécessaires pour que P_1 et P_2 soient satisfaites.
   D'une part, la propriété P_1 n'implique pas la structure de Q.O.O.G. (à cause des inégalités strictes) mais impose les conditions de densité (cf. théorèmes II.B.5. et II.B.6.).
   D'autre part, la propriété P_2 implique la structure de Q.O.O.G. et une des conditions de densité (cf. théorèmes II.B.3. et II.B.4.) mais n'exige pas la condition de densité (b), comme le montre l'exemple suivant :

   Soit A = $\mathbb{R}$ et, $\forall$ a,b $\in$ A :

$$\begin{cases} a <_k b \text{ ssi } a+k < b \leq a+k+1, \ \forall\, k \in \{0,1,2,\ldots,m-1\}, \\ a <_m b \text{ ssi } a+m < b \,. \end{cases}$$

   La propriété P_2 est satisfaite : il suffit de définir :

$$\begin{cases} g(a) = a, \ \forall\, a \in A \\ \sigma_k(a) = k, \ \forall\, a \in A, \ \forall\, k \in \{0,1,2, \ldots m\}. \end{cases}$$

Soit a et b tels que

$$a + k = b \ :$$

nous avons $a \not<_{\underline{k}} b$, mais il est impossible qu'il existe un réel ℓ tel que

$$a \not<_{\underline{k}} \ell \text{ et } b <_{\underline{o}} \ell \ ,$$

puisqu'il faudrait alors simultanément :

$$\begin{cases} a + k = b \ , \\ a + k \geq \ell \ , \\ b < \ell \ . \end{cases}$$

4. Lorsque A est dénombrable, la structure de Q.O.O.G. est nécessaire et suffisante pour que la propriété P_2 soit satisfaite (théorème II.B.7.)

5. Les commentaires précédents sont analogues pour les théorèmes qui concernent les Q.O.G.

6. En utilisant la terminologie de B. ROY ([49]) :
   - pour m = 0, les théorèmes II.B.1 à II.B.8. fournissent les conditions pour avoir un vrai-critère;
   - pour m = 1, ils donnent les conditions pour avoir un précritère.

   De même, les résultats analogues pour les Q.O.G. fournissent, pour m = 1 et m = 2, les conditions pour avoir respectivement un quasi-critère et un pseudo-critère.

C. *Cas fini.*

Les théorèmes vus ci-dessus sont évidemment applicables dans le cas d'ensembles finis. Néanmoins, en utilisant un autre schéma de démonstration, on peut établir que, dans le cas fini, les seuils peuvent être pris constants.

<u>Théorème II.C.1.</u>

<u>Si</u> $(<_o, <_1 \dots <_m)$ <u>est un Q.O.O.G. sur</u> A <u>et si</u> A/~ <u>est fini, alors il existe sur</u> A <u>une fonction</u> g, <u>à valeurs réelles, et des constantes</u> $p_1, p_2, \dots p_m$ <u>telles que,</u> $\forall$ a,b $\in$ A :

$$\begin{cases} a <_0 b \iff g(a) < g(b) < g(a) + p_1 , \\ a <_1 b \iff g(a) + p_1 < g(b) < g(a) + p_2 , \\ \quad \vdots \\ a <_k b \iff g(a) + p_k < g(b) < g(a) + p_{k+1} , \\ \quad \vdots \\ a <_m b \iff g(a) + p_m < g(b) , \\ 0 < p_1 < p_2 < \dots < p_m . \end{cases}$$

CHAPITRE III : LA COMPARAISON DES DIFFERENCES ENTRE PREFERENCES.

A. *Introduction.*

De nombreux résultats existant dans la littérature concernent le problème suivant qui est intimement lié à la comparaison des différences entre préférences : étant donnés deux ensembles A et B et une relation $\precsim$ dans A x B, quand peut-on construire une fonction g_1 sur A et une fonction g_2 sur B de telle sorte que, $\forall$ (a_1, b_1), $(a_2, b_2) \in A \times B$:

$$(*) \quad (a_1,b_1) \precsim (a_2,b_2) \iff g_1(a_1) + g_2(b_1) \leq g_1(a_2) + g_2(b_2) .$$

C'est le problème de la représentation additive de la relation $\precsim$, sur lequel nous reviendrons d'ailleurs dans le 4ème chapitre, dans le cas plus général où la relation $\precsim$ est définie sur des n-uples.

Dans le cas où A x B est infini, différents systèmes de conditions suffisantes ont été établis pour que g_1 et g_2 existent (cf. [19], [23], [27], [42]).
Lorsque A x B est fini, on dispose de conditions nécessaires et suffisantes (cf. FISHBURN, [23], p. 44).
Le lien entre la représentation additive de < et le problème qui nous occupe ici (à savoir la comparaison des différences de préférence entre actions) est le suivant : soit R un ordre faible sur A et S un ordre faible sur

$$\{[a,b] \mid a \text{ et } b \in A,\ a\, R\, b\} ,$$

où

$$[a,b] \; S \; [a',b']$$

signifie que la supériorité de b sur a est plus faible que celle de b' sur a'.
Supposons qu'il existe des fonctions g_1, g_2, à valeurs réelles, telles que

$$[a,b] \; S \; [a',b'] \iff g_1(a) + g_2(b) < g_1(a') + g_2(b') .$$

Etant donné l'interprétation donnée à $[a,b]$, il est naturel de poser

$$[a,b] \; S \; [a',b'] \iff [b',a'] \; S \; [b,a] .$$

Il vient

$$[a,b] \; S \; [a',b']$$

ssi

$$\begin{cases} g_1(a) + g_2(b) < g_1(a') + g_2(b') , \\ g_1(b') + g_2(a') < g_1(b) + g_2(a) . \end{cases}$$

En posant, $\forall$ a $\in$ A :

$$g(a) = g_2(a) - g_1(a) ,$$

on obtient

$$[a,b]\ S\ [a',b'] \iff g(b) - g(a) < g(b') - g(a') .$$

Nous donnons ci-dessous une condition suffisante pour que, étant donnés un ordre faible R sur A et un ordre faible S sur

$$\{[a,b] \mid a,b \in A,\ a\ R\ b\} ,$$

il existe une fonction g telle que :

$$\begin{cases} a\ R\ b \iff g(a) < g(b) , \\ [a,b]\ S\ [a',b'] \iff g(b) - g(a) < g(b') - g(a') . \end{cases}$$

Cette condition s'inspire des résultats connus cités précédemment, mais nous l'avons exprimée et démontrée directement en termes de différences de préférences, de manière à en éclairer l'interprétation intuitive.
Nous abordons ensuite le problème plus général de la représentation simultanée de R et S dans le cas où ces relations ont une structure de Q.O.O.G. ou de Q.O.G.
Nous étudions enfin le cas où A est fini.

B. *Cas infini.*

1°) Théorème fondamental.

Soit R une relation sur A et S une relation sur

$$J = \{[a,b] \mid a \text{ et } b \in A,\ a\ R\ b\} ,$$

satisfaisant aux axiomes suivants :

1. R est un ordre faible ;
2. S est un ordre faible ;
3. $b\ R\ b' \iff \begin{cases} [a,b]\ S\ [a,b'],\ \forall a \mid a\ R\ b , \\ [b',a']\ S\ [b,a'],\ \forall a' \mid b'\ R\ a' ; \end{cases}$

   $b = b' \iff \begin{cases} [a,b] \sim [a,b'],\ \forall a \mid a\ R\ b , \\ [b',a'] \sim [b,a'],\ \forall a' \mid b'\ R\ a' ; \end{cases}$

   où

   $b = b'$ ssi $b \not R b'$ et $b' \not R b$

   et

$[a,b] \sim [d,c]$ ssi $[a,b] \,\mathcal{S}\, [d,c]$ et $[d,c] \,\mathcal{S}\, [a,b]$.

(Il résulte du théorème I.A.1 que = et ∼ sont des relations d'équivalence).

4. Si $[e,a] \sim [f,c]$, alors

$[a,b]$ S $[c,d]$ <=> $[e,b]$ S $[f,d]$;

si $[b,e] \sim [f,c]$, alors

$[a,b]$ S $[c,d]$ <=> $[a,e]$ S $[f,d]$;

si $[e,a] \sim [d,f]$, alors

$[a,b]$ S $[c,d]$ <=> $[e,b]$ S $[c,f]$;

si $[b,e] \sim [d,f]$, alors

$[a,b]$ S $[c,d]$ <=> $[a,e]$ S $[c,f]$,

et de même en remplaçant S par ∼

5. $\forall\, a,b,c \mid a \,R\, b \,R\, c,\ \exists\, d \mid [a,b] \sim [d,c]$.

Les axiomes 1, 2, 3, 4, 5 sont équivalents aux axiomes 1, 2, 3, 4, 5', où l'axiome 5' est le suivant :

5'. $[a,b] \,S\, [c,d] \Rightarrow \exists\, e \text{ et } f \mid \begin{cases} [a,b] \sim [c,e], \\ [a,b] \sim [f,d]. \end{cases}$

6. Soit $[a,b]$ S $[c,d]$. En vertu de l'axiome 5', il existe e_1, et éventuellement e_2, e_3, ... tels que

$[a,b] \sim [c,e_1] \sim [e_1, e_2] \sim \ldots$.

L'axiome 6 affirme qu'il existe un m fini tel que

$[a,b] \sim [c,e_1] \sim \ldots \sim [e_i, e_{i+1}] \sim \ldots \sim [e_{m-1}, e_m]$

et

$[e_m, d]$ S $[a,b]$.

Interprétation intuitive de ces axiomes dans le cadre de la modélisation des préférences.

Si a R b signifie que "b est préféré à a" et si $[a,b]$ S $[c,d]$ signifie que la supériorité de d sur c est plus grande que celle de b sur a, les axiomes peuvent s'interpréter comme suit :

3 : R et S sont compatibles : si b' est préféré à b, alors la préférence de b' sur a sera plus grande que celle de b sur a, pour tout a moins bon que b

et b' et la préférence de a' sur b sera plus grande que celle de a' sur b' pour tout a' préféré à b et b'.

4 : S est compatible avec "la réunion des intervalles"; précisons que l'ensemble A de départ est un ensemble quelconque, et pas nécessairement un ensemble de réels. L'expression "réunion d'intervalles" n'est employée ici que dans le but de donner une image intuitive de l'axiome 4.

5': Si [c,d] est préféré à [a,b], alors "l'intervalle" [c,d] contient des "intervalles" [c,e] et [f,d] équivalents à [a,b].

6 : "Tout intervalle est contenu entièrement un nombre <u>fini</u> de fois dans un intervalle qui lui est préféré".

<u>Théorème III.B.1.</u>

<u>Si</u> R <u>et</u> S <u>satisfont aux axiomes 1 à 6, alors il existe une fonction g, définie sur</u> A, <u>telle que</u>

$$\begin{cases} a \, R \, b \iff g(a) < g(b) \\ [a,b] \; S \; [c,d] \iff g(b) - g(a) < g(d) - g(c) \, . \end{cases}$$

<u>Cette fonction</u> g <u>est définie à une transformation linéaire positive près.</u>

2°) Nécessité des axiomes.

Supposons qu'il existe sur A une fonction g vérifiant le théorème III.B.1. Il est facile de démontrer qu'alors les axiomes 1, 2, 3, 4 et 6 sont nécessaires. Seul l'axiome 5 (ou 5') n'est pas nécessaire, comme le montre l'exemple suivant.

Soit

$$A = \{-1\} \cup \{x \in \mathbb{R}^+\},$$

$$\forall \, x,y \in A : x \, R \, y \text{ ssi } x < y$$

et

$$\forall \, x,y,z,t \in A \text{ tels que } x \, R \, y \text{ et } z \, R \, t :$$

$$[x,y] \; S \; [z,t] \text{ ssi } y - x < t - z \, .$$

La fonction

$$g(x) = x, \; \forall \, x \in A \, ,$$

satisfait le théorème III.B.1.

Cependant, l'axiome 5 n'est pas satisfait puisque

$$-1 \, R \, 1/2 \, R \, 1$$

et

$$\nexists\, x \in A \mid [-1, \tfrac{1}{2}] \sim [x,1].$$

Remarque : même lorsqu'on exige que la fonction soit définie à une transformation linéaire positive près, l'axiome 5 n'est pas nécessaire.

3°) Extension du théorème fondamental.

Soit R et S deux relations satisfaisant les axiomes suivants :

1. $R = (<_o, <_1 \dots <_n)$ est un Q.O.O.G. sur A ;

2. $S = (<^1_o, <^1_1 \dots <^1_m)$ est un Q.O.O.G. sur

$$J = \{[a,b] \mid a \text{ et } b \in A,\ a <_{\underline{o}} b\}\ ;$$

3. $$b <_{\underline{o}} b' \iff \begin{cases} [a,b] <^1_{\underline{o}} [a,b'],\ \forall a \mid a <_{\underline{o}} b\ , \\ [b',a'] <^1_{\underline{o}} [b,a'],\ \forall a' \mid b' <_{\underline{o}} a'\ ; \end{cases}$$

$$b - b' \iff \begin{cases} [a,b] -^1 [a,b'],\ \forall a \mid a <_{\underline{o}} b\ , \\ [b',a'] -^1 [b,a'],\ \forall a' \mid b' <_{\underline{o}} a'\ ; \end{cases}$$

où

$$b - b' \text{ ssi } b \not<_{\underline{o}} b' \text{ et } b' \not<_{\underline{o}} b$$

et

$$[a,b] -^1 [d,c] \text{ ssi } [a,b] \not<^1_{\underline{o}} [d,c] \text{ et } [d,c] \not<^1_{\underline{o}} [a,b].$$

4. – Si $[e,a] -^1 [f,c]$, alors

$$[a,b] <^1_{\underline{o}} [c,d] \iff [e,b] <^1_{\underline{o}} [f,d].$$

– Si $[b,e] -^1 [f,c]$, alors

$$[a,b] <^1_{\underline{o}} [c,d] \iff [a,e] <^1_{\underline{o}} [f,d].$$

– Si $[e,a] -^1 [d,f]$, alors

$$[a,b] <^1_{\underline{o}} [c,d] \iff [e,b] <^1_{\underline{o}} [c,f].$$

– Si $[b,e] -^1 [d,f]$, alors

$$[a,b] <^1_{\underline{o}} [c,d] \iff [a,e] <^1_{\underline{o}} [c,f].$$

– Et de même en remplaçant $<^1_{\underline{o}}$ par $-^1$.

5. $\forall\, a,b,c \mid a <_{\underline{o}} b <_{\underline{o}} c\ ,\ \exists\, d \mid [a,b] \sim^{1} [d,c]$.

5'. $[a,b] <^{1}_{\underline{o}} [c,d] \Rightarrow \exists\ e \text{ et } f \mid \begin{cases} [a,b] \sim^{1} [c,e], \\ [a,b] \sim^{1} [f,d]. \end{cases}$

6. Soit $[a,b] <^{1}_{\underline{o}} [c,d]$. En vertu de l'axiome 5', il existe e_1, et éventuellement e_2, e_3, ... tels que

$$[a,b] \sim^{1} [c,e_1] \sim^{1} [e_1, e_2] \sim^{1} \ldots$$

L'axiome 6 affirme qu'il existe un m fini tel que

$$[a,b] \sim^{1} [c,e_1] \sim^{1} \ldots \sim^{1} [e_i, e_{i+1}] \sim^{1} \ldots \sim^{1} [e_{m-1}, e_m]$$

et

$$[e_m, d] <^{1}_{\underline{o}} [a,b].$$

7. Soit $a <_{\underline{\ell}} b$, $\ell \geqslant 1$: $\exists\, a^{\ell} \in A \mid$

$$\begin{cases} a <_{\ell-1} a^{\ell}, \\ a^{\ell} <_{\underline{o}} c \equiv a <_{\underline{\ell}} c\ ,\ \forall c. \end{cases}$$

8. Soit $[a,b] <^{1}_{\underline{p}} [c,d]$, $p \geqslant 1$: $\exists\, e^{p}_{\substack{ab\\cd}} \in A \mid$

$$\begin{cases} [a,b] <^{1}_{p-1} [c, e^{p}_{\substack{ab\\cd}}], \\ [c, e^{p}_{\substack{ab\\cd}}] <^{1}_{\underline{o}} [u,v] \Rightarrow [a,b] <^{1}_{\underline{p}} [u,v]. \end{cases}$$

Remarque : on peut également démontrer ici l'équivalence des deux ensembles d'axiomes (1,2,3,4,5) et (1,2,3,4,5').

<u>Théorème III.B.2.</u>

<u>Si</u> R <u>et</u> S <u>satisfont aux axiomes 1 à 8, alors il existe une fonction g</u> <u>sur</u> A, <u>des fonctions</u> σ_k <u>sur</u> A ($k = 1, \ldots n$) <u>et des fonctions</u> τ_j <u>sur</u> J ($j = 1 \ldots m$) <u>telles que</u> :

$$\left\{\begin{array}{l}
- a <_0 b \iff g(a) < g(b) \leqslant g(a) + \sigma_1(a) , \\
- a <_k b \iff g(a) + \sigma_k(a) < g(b) \leqslant g(a) + \sigma_{k+1}(a), \ k = 1,2,\ldots n-1 , \\
- a <_n b \iff g(a) + \sigma_n(a) < g(b) , \\
- [a,b] <_0^1 [c,d] \iff g(b) - g(a) < g(d) - g(c) \leqslant g(b) - g(a) + \tau_1[a,b] , \\
- [a,b] <_j^1 [c,d] \iff g(b) - g(a) + \tau_j[a,b] < g(d) - g(c) \\
\qquad\qquad \leqslant g(b) - g(a) + \tau_{j+1}[a,b], \ j = 1 \ldots m-1 , \\
- [a,b] <_m^1 [c,d] \iff g(b) - g(a) + \tau_m[a,b] < g(d) - g(c) , \\
- 0 = \sigma_0(a) \leqslant \sigma_1(a) \leqslant \ldots \leqslant \sigma_n(a) , \ \forall a \in A , \\
- \dfrac{[\sigma_{k+j}(a) - \sigma_k(a)] - [\sigma_{\ell+j}(b) - \sigma_\ell(b)]}{[g(a) + \sigma_k(a)] - [g(b) + \sigma_\ell(b)]} \geqslant -1, \ \forall a,b \in A , \\
\qquad \forall j,k,\ell \in \{0,1,2, \ldots, n\} \text{ tels que } \left\{\begin{array}{l} k+j \leqslant n , \\ \ell+j \leqslant n . \end{array}\right. \\
- 0 = \tau_0[a,b] \leqslant \tau_1[a,b] \leqslant \ldots \leqslant \tau_m[a,b], \quad \forall [a,b] \in J , \\
- \dfrac{(\tau_{k+j}[a,b] - \tau_k[a,b]) - (\tau_{\ell+j}[c,d] - \tau_\ell[c,d])}{(g(b) - g(a) + \tau_k[a,b]) - (g(d) - g(c) - \tau_\ell[c,d])} \geqslant -1 , \\
\qquad \forall [a,b], [c,d] \in J, \ \forall j,k,\ell \in \{0,1,2, \ldots m\} \\
\qquad\qquad \text{tels que } \left\{\begin{array}{l} k+j \leqslant m , \\ \ell+j \leqslant m . \end{array}\right.
\end{array}\right.$$

4°) Commentaires.

- Si R et/ou S sont des Q.O.G., on procède comme dans le chapitre II, en se servant des résultats du Ch. I. E.

- La structure de Q.O.O.G. sur A implique déjà, à elle seule une certaine comparaison des différences entre préférences. En effet, des relations

$$\left\{\begin{array}{l} a <_k b , \\ c <_{k+1} d , \end{array}\right.$$

on est tenté de déduire que

$$[a,b] <_0^1 [c,d] .$$

Le théorème précédent a cependant été établi en toute généralité, le seul lien existant entre R et S étant exprimé dans l'axiome 3. Bien entendu des liens plus étroits entre les deux structures conduiraient à des relations entre les fonctions $\sigma_k(a)$ et $\tau_j[a,b]$.

- Ici aussi le théorème III.B.2. fournit un ensemble d'axiomes qui est suffisant pour avoir la représentation numérique voulue, mais qui n'est pas nécessaire : les axiomes 1,2,3,4 et 6 sont nécessaires mais ce n'est pas le cas des axiomes 5,7 et 8.

C. Cas fini.

Dans le cas fini, une condition nécessaire et suffisante a été démontrée par SCOTT ([51]) pour qu'il existe une fonction satisfaisant le théorème III.B.1. : cette condition est démontrée dans FISHBURN ([23], théorème 6.1.B.) elle s'exprime comme suit :

<u>Théorème III.C.1.</u>

<u>Il existe, sur</u> A, <u>une fonction</u> g, <u>à valeurs réelles, telle que</u>

$$[a,b] \; S \; [c,d] \iff g(b) - g(a) \leq g(d) - g(c)$$

<u>ssi</u> $\forall\, m > 1$, <u>l'existence de deux suites</u> S_1 <u>et</u> S_2 <u>telles que</u>

- $S_1 = \{a_1^1, \ldots a_1^m, b_2^1, \ldots b_2^m\}$,
- $S_2 = \{b_1^1, \ldots b_1^m, a_2^1, \ldots a_2^m\}$,
- S_1 et S_2 sont identiques à une permutation près,
- $[a_1^j, b_1^j] \; S \; [a_2^j, b_2^j]$ ou $[a_1^j, b_1^j] \sim [a_2^j, b_2^j]$, $\forall\, j < m$,
- $[a_1^m, b_1^m] \; S \; [a_2^m, b_2^m]$

<u>est impossible.</u>

Nous énonçons ci-dessous une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une fonction représentant les différences de préférence dans le cas d'un Q.O.O.G., condition généralisant le théorème III.C.1.

Théorème III.C.2.

Il existe sur A, une fonction g, à valeurs réelles, et des constantes $p_o, p_1, p_2, \ldots, p_m$ telles que :

$$\begin{cases} [a_1,b_1] <_k^1 [a_2,b_2] \iff & g(b_1) - g(a_1) + p_k < g(b_2) - g(a_2) , \\ & g(b_1) - g(a_1) + p_{k+1} > g(b_2) - g(a_2) , \\ & k = 0 \ldots m-1 , \\ [a_1,b_1] <_m^1 [a_2,b_2] \iff g(b_1) - g(a_1) + p_m < g(b_2) - g(a_2) , & \\ 0 = p_o < p_1 < \ldots < p_m , & \end{cases}$$

ssi $\forall\ T_o, T_1, \ldots T_m \in \mathbb{N}$, l'existence de deux suites S_1 et S_2 telles que :

$$- S_1 = \{a_o^1, \ldots a_o^{T_o}, a_{11}^1, \ldots a_{11}^{T_1}, a_{21}^1, \ldots a_{21}^{T_1}, a_{12}^1 \ldots a_{2m}^{T_m},$$
$$d_o^1, \ldots d_o^{T_o}, d_{11}^1, \ldots d_{11}^{T_1}, d_{21}^1, \ldots d_{21}^{T_1}, \ldots d_{2m}^{T_m}\} ;$$

$$- S_2 = \{c_o^1, \ldots c_o^{T_o}, c_{11}^1, \ldots c_{11}^{T_1}, c_{21}^1, \ldots c_{21}^{T_1}, c_{12}^1 \ldots c_{2m}^{T_m},$$
$$b_o^1, \ldots b_o^{T_o}, b_{11}^1, \ldots b_{11}^{T_1}, b_{21}^1, \ldots b_{21}^{T_1}, \ldots b_{2m}^{T_m}\} ;$$

- S_1 et S_2 sont identiques à une permutation près :

- $[a_o^i, b_o^i] <_{\underline{o}}^1 [c_o^i, d_o^i]$, $\quad i = 1 \ldots T_o$;

- $[a_{k1}^i, b_{k1}^i] >_{\underline{k}}^1 [c_{k1}^i, d_{k1}^i]$, $\quad i = 1 \ldots T_k$, $k = 1 \ldots m$;

- $[a_{k2}^i, b_{k2}^i] <_{\underline{k}}^1 [c_{k2}^i, d_{k2}^i]$, $\quad i = 1 \ldots T_k$, $k = 1 \ldots m$;

est impossible.

CHAPITRE IV : PREFERENCES ENTRE N-UPLES - INDEPENDANCE PREFERENTIELLE.

Les hypothèses de base, dans le travail de TING ([54]) supposent l'existence de fonctions suffisamment régulières représentant les relations de préférence et impliquent que ces dernières soient des ordres faibles.
Nous avons tenté de généraliser les résultats de TING : le type de démonstration utilisé est différent puisqu'aucune hypothèse n'est faite sur l'existence de fonctions représentant les relations de préférence et que celles-ci sont supposées être des Q.O.O.G.

L'espace dans lequel on travaille est $\mathbb{R}^n$.

Soit

$$N = \{1, 2, \ldots, n\} .$$

Les éléments de $\mathbb{R}^n$ seront notés

$$(\underline{z}) = (z_1, z_2, \ldots, z_n) ,$$

ou encore

$$(\underline{x}, \underline{y}) ,$$

où $\underline{x}$ est le sous-vecteur de $(\underline{z})$ constitué des composantes dont les indices figurent dans un certain sous-ensemble K de N, et $\underline{y}$ le sous-vecteur des composantes restantes.
De manière générale, nous écrirons

$$\underline{x} \to K ,$$

pour signaler que $\underline{x}$ est le sous-vecteur de $(\underline{z})$ constitué des composantes dont les indices figurent dans K.

A. *Taux de substitution généralisés.*

1°) Hypothèses de base.

Nous supposons que la relation globale de préférence est un Q.O.O.G. $(<_0, <_1, \ldots, <_m)$ dans $\mathbb{R}^n$, et que les composantes z_i sont fonctionnellement indépendantes les unes des autres (c'est-à-dire que la valeur de chaque z_i est indépendante de tous les z_j, $j \neq i$).
Nous supposons également que :

(1) $\qquad z'_k \leq z_k, \ \forall k \Rightarrow (\underline{z}) \not<_{\underline{0}} (\underline{z}')$.

2°) Définition et propriétés des taux de substitution généralisés.

Nous définissons les quantités $\bar{\delta}^{\ell}_{ij}\ (\underline{z},\lambda)$ et $\underline{\delta}^{\ell}_{ij}\ (\underline{z},\ell)$ de la manière suivante :

$(\underline{z}) <_{\ell} (z_1, \ldots, z_i+\mu, \ldots, z_j + \lambda, \ldots, z_n)$ ssi

$$\bar{\delta}^{\ell}_{ij}\ (\underline{z},\lambda) < \mu \leq \bar{\delta}^{\ell+1}_{ij}(\underline{z},\lambda)\ ,\ (\ell < m)\ ;$$

$(\underline{z}) <_{m} (z_1, \ldots, z_i + \mu, \ldots, z_j + \lambda, \ldots, z_n)$ ssi

$$\bar{\delta}^{m}_{ij}\ (\underline{z},\lambda) < \mu\ ;$$

$(z_1, \ldots, z_i + \mu, \ldots, z_j + \lambda, \ldots, z_n) <_{\ell} (\underline{z})$ ssi

$$\underline{\delta}^{\ell+1}_{ij}(\underline{z},\lambda) \leq \mu < \underline{\delta}^{\ell}_{ij}\ (\underline{z},\lambda)\ ,\ (\ell < m)\ ;$$

$(z_1, \ldots, z_i + \mu, \ldots, z_j + \lambda, \ldots, z_n) <_{m} (\underline{z})$ ssi

$$\mu < \underline{\delta}^{m}_{ij}\ (\underline{z},\lambda)$$

et

$(\underline{z}) \sim (z_1, \ldots, z_i + \mu, \ldots, z_j + \lambda, \ldots, z_n)$ ssi

$$\underline{\delta}^{o}_{ij}\ (\underline{z},\lambda) \leq \mu \leq \bar{\delta}^{o}_{ij}\ (\underline{z},\lambda)\ .$$

Il est clair que la connaissance des $\bar{\delta}^{\ell}_{ij}\ (\underline{z},\lambda)$ entraîne celle des $\underline{\delta}^{\ell}_{ij}\ (\underline{z},\lambda)$. Tous les résultats établis pour les $\bar{\delta}^{\ell}_{ij}\ (\underline{z},\lambda)$ restent valables si l'on y remplace $\bar{\delta}$ par $\underline{\delta}$.

B. Indépendance préférentielle.

1°) Définition.

K (⊂ N) est préférentiellement indépendant (ou indépendant au sens des préférences) dans N ssi,

$\forall\ \underline{x}, \underline{x}'$:

$$(\underline{x}, \underline{y}^o) \begin{pmatrix} <_o \\ \vdots \\ <_m \end{pmatrix} (\underline{x}', \underline{y}^o) \Rightarrow (\underline{x}, \underline{y}) \begin{pmatrix} <_o \\ \vdots \\ <_m \end{pmatrix} (\underline{x}', \underline{y}),\ \forall\ \underline{y}\ ,$$

où

$$\underline{x} \to K,\ \underline{x}' \to K,\ \underline{y}^o \to N\backslash K,\ \underline{y} \to N\backslash K\ .$$

2°) Caractérisation à l'aide des taux de substitution généralisés.

<u>Théorème IV.B.1.</u>

K <u>est préférentiellement indépendant dans</u> N <u>ssi</u>

$\forall \underline{x}, \underline{y}, \underline{y}', \forall i,j \in K$:

$$\begin{cases} \bar{\delta}^{o}_{ij} (\underline{x}, \underline{y}, \lambda) = \bar{\delta}^{o}_{ij} (\underline{x}, \underline{y}', \lambda), \forall \lambda \in R , \\ \bar{\delta}^{\ell}_{ij} (\underline{x}, \underline{y}, 0) = \bar{\delta}^{\ell}_{ij} (\underline{x}, \underline{y}', 0), \forall \ell \in 1, \ldots m . \end{cases}$$

où $\underline{x} \to K$, $\underline{y} \to N\setminus K$, $\underline{y}' \to N\setminus K$.

Remarque : Il résulte du théorème IV.B.1. que si $|K| = k$, il est nécessaire (et suffisant), pour vérifier l'indépendance préférentielle de K, de tester l'égalité de $(m+1).k.(k-1)$ taux de substitution.
Grâce à certaines propriétés des taux de substitution généralisés, ce nombre peut être réduit à $(m+1).k$.

3°) Propriétés de l'indépendance préférentielle.

<u>Théorème IV.B.2.</u>

<u>Si</u> K_1 <u>et</u> K_2 <u>sont préférentiellement indépendants dans</u> N, <u>et si</u> $K_3 = K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$, <u>alors</u> :

α) $K_1 \cup K_2$ <u>est préférentiellement indépendant dans</u> N ,

β) K_3 <u>est préférentiellement indépendant dans</u> N .

4°) Indépendance préférentielle et représentation numérique.

Ajoutons aux hypothèses de base du paragraphe A 1°), une hypothèse de densité permettant d'affirmer que le Q.O.O.G. $(<_o, \ldots, <_m)$ est représentable par une fonction principale et des fonctions seuils (cf. théorème II.B.5.). Nous avons le résultat suivant :

<u>Théorème IV.B.3.</u>

K <u>est préférentiellement indépendant dans</u> N <u>ss'il existe des fonctions</u> $g, \tau_1, \ldots, \tau_m$ <u>telles que</u> :

$$\begin{cases} (\underline{x},\underline{y}) <_k (\underline{x}',\underline{y}) \iff g(\underline{x}) + \tau_k(\underline{x}) < g(\underline{x}') < g(\underline{x}) + \tau_{k+1}(\underline{x}) , \\ \qquad\qquad k = 0, 1, \ldots, m-1 ; \\ (\underline{x},\underline{y}) <_m (\underline{x}',\underline{y}) \iff g(\underline{x}) + \tau_m(\underline{x}) < g(\underline{x}') ; \\ 0 = \tau_o(\underline{x}) < \tau_1(\underline{x}) < \ldots < \tau_m(\underline{x}) ; \end{cases}$$

<u>et des fonctions</u> $V, \sigma_1, \ldots \sigma_m$ <u>telles que</u> :

$$\left\{\begin{array}{l}(\underline{x},\underline{y}) <_k (\underline{x}',\underline{y}') \iff \\ \quad V(g(\underline{x}),\underline{y}) + \sigma_k (g(\underline{x}),\underline{y}) < V(g(\underline{x}'),\underline{y}') < V(g(\underline{x}),\underline{y}) + \sigma_{k+1}(g(\underline{x}),\underline{y}), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad k = 0, 1, \ldots, m-1 ; \\ (\underline{x},\underline{y}) <_m (\underline{x}',\underline{y}') \iff V(g(\underline{x}),\underline{y}) + \sigma_m(g(\underline{x}),\underline{y}) < V(g(\underline{x}'),\underline{y}') ; \\ 0 = \sigma_0 (g(\underline{x}),\underline{y}) < \sigma_1 (g(\underline{x}),\underline{y}) < \ldots < \sigma_m (g(\underline{x}),\underline{y}) ;\end{array}\right.$$

<u>où</u>

$$\underline{x} \in K, \ \underline{x}' \in K, \ \underline{y} \in \mathbb{N}\backslash K, \ \underline{y}' \in \mathbb{N}\backslash K .$$

C. *Commentaires.*

- Des résultats analogues aux précédents peuvent être obtenus pour les Q.O.G., grâce au lien établi entre les deux structures au chapitre I.
- Les théorèmes démontrés dans ce chapitre peuvent non seulement servir dans les applications où l'on compare des éléments de R^n (comme c'est souvent le cas en économie) mais concernent également un problème fondamental en analyse multicritère : l'agrégation des critères. En particulier, l'indépendance préférentielle caractérise le cas où l'on peut sous-agréger certains critères. Nous renvoyons le lecteur intéressé aux travaux déjà nombreux consacrés à la théorie de l'utilité multiattribut.
- Signalons pour terminer que FISHBURN ([18]) a étudié le problème de la représentation additive d'une relation de préférence dans le cas d'un produit cartésien d'une infinité dénombrable d'ensembles et que CHIPMAN ([8]) a étudié le problème de la représentation lexicographique d'une relation de préférence entre n-uples.

CONCLUSIONS : APPLICATIONS ET VOIES DE RECHERCHE.

Comme nous l'avons rappelé dans l'introduction, les origines de la théorie de l'utilité se situent déjà aux XVIIIe et XIXe siècles.
Les économistes sont les premiers à s'être intéressés aux problèmes de la représentation des préférences d'un individu en vue, par exemple, de caractériser les choix d'un consommateur dans la distribution de ses dépenses parmi différentes marchandises.
C'est un peu plus tard que les psychologues ont également utilisé ces résultats en vue de l'étude du comportement des individus.
Enfin, ces dernières années, les théories de l'Aide à la Décision (théorie des jeux, théorie des décisions, analyse multicritère, ...) ont connu un essor considérable et ont contribué à l'intérêt porté à la théorie de l'utilité.
Nous nous proposons ici de présenter rapidement le type de problème qui se pose dans ces domaines d'applications et certaines voies de recherche que nous entrevoyons dans cette optique.

A. *La théorie de l'utilité en économie.*

Le rôle que joue la théorie de l'utilité en économie peut présenter deux aspects : la prédiction et la prescription. Dans le premier cas, la donnée des préférences entre certaines décisions et l'hypothèse que la relation de préférence a une certaine structure permet de prédire quelles seront les préférences entre toutes les décisions. Dans le second cas, les résultats connus permettront de guider le choix du décideur dans les cas complexes ou encore de corriger son comportement en lui montrant les éventuelles incohérences de son jugement.
Ainsi par exemple l'hypothèse selon laquelle la relation de préférence est transitive peut s'interpréter comme suit :
si a est préféré à b et b à c :

- on peut s'attendre à ce que a soit préféré à c (prédiction);
- on indique au décideur que s'il veut être cohérent, a doit être préféré à c (prescription).

Aussi bien dans le domaine de la prédiction que dans celui de la prescription, les résultats de la théorie de l'utilité sont fondamentaux en économie. En effet, les économistes étaient habitués, au début, à identifier une relation de préférence au moyen d'une fonction d'utilité : toute fonction d'utilité définissait une relation de préférence sur l'espace des marchandises. Le fait que la réciproque n'était pas vraie n'avait pas attiré l'attention des utilisateurs. Il a fallu attendre des travaux comme ceux de DEBREU pour que des théorèmes rigoureux soient établis.

Voyons quelques problèmes types qui se présentent le plus souvent en économie :

1°) Etant donné un budget total, comment le consommateur va-t-il répartir ce budget parmi les différents produits qui lui sont proposés sur le marché ? Une décision est caractérisée par un n-uple $(x_1, x_2, \ldots x_n)$, où n est le nombre de produits proposés et x_i est la quantité du i^e produit que le consommateur achète.
La relation de préférence est définie ici sur l'ensemble R^n (ou un de ses sous-ensembles).

2°) Supposons que l'environnement ("la nature") soit dans l'état a avec une probabilité p(a) et qu'à chaque couple (x,a), où x est une décision possible, corresponde une conséquence c(x,a). Quelle décision un individu va-t-il prendre, l'ensemble des conséquences possibles étant ordonné par une relation de préférence ?
Une décision x_o peut être caractérisée, ici par une distribution de probabilité sur l'ensemble des conséquences $\{c(x_o,a)\}$, où à la conséquence $c(x_o,a_o)$ est associée la probabilité $p(a_o)$.
La relation de préférence est donc définie ici sur un ensemble de distributions de probabilités.
Lorsque les probabilités p(a) sont inconnues, il faut les estimer : c'est le problème qui est traité dans la théorie des probabilités subjectives.

3°) Connaissant le comportement de chaque individu, peut-on prédire quel sera le comportement d'un groupe social ? C'est le problème de l'agrégation d'un ensemble de relations de préférence individuelles en une relation de préférence globale.

Il arrive souvent, en économie, que l'espace des décisions puisse être muni d'une structure particulière; on essaie alors de trouver des fonctions qui non seulement représentent les préférences du décideur mais qui, d'autre part, soient étroitement liées à cette structure. Ainsi par exemple on construira, dans le problème 1°) ci-dessus une fonction d'utilité qui soit continue (la topologie définie sur R^n étant la topologie usuelle); dans le problème 2°), on étudiera les conditions pour que l'utilité associée à une distribution de probabilité soit son espérance mathématique; etc ... Les résultats de DEBREU illustrent d'ailleurs parfaitement ce point de vue.

De nombreuses applications concrètes ont déjà été traitées par la théorie de l'utilité en économie : nous renvoyons le lecteur intéressé aux références citées par FISHBURN dans son article : "Utility Theory" ([20]).

B. *La théorie de l'utilité en psychologie.*

C'est vers 1950 que les psychologues ont commencé à s'intéresser à la théorie de l'utilité qui, jusque là avait essentiellement été employée par les économistes.

Pour ces derniers, la représentation numérique des préférences n'est souvent qu'une première étape dans la résolution d'un problème (le but final étant de maximiser la fonction d'utilité en vue de déterminer la décision optimale). Le psychologue, par contre, s'intéresse à la construction d'une fonction d'utilité qui donne une image aussi précise que possible des préférences de l'individu : son but, en effet, est de connaître le comportement de l'individu le mieux possible, et indépendamment de toute optimisation au sens économique. C'est pourquoi les psychologues se sont intéressés aux fonctions d'utilité qui non seulement représentent les préférences du décideur (au sens ordinal) mais qui "mesurent" ces préférences (cf. Chapitre III).

L'emploi de la théorie de l'utilité présente cependant de sérieux obstacles dans ce domaine du fait que, le plus souvent, les données sont très difficiles à saisir. Les psychologues se sont d'ailleurs très vite tournés vers la théorie de l'utilité probabiliste, où l'on associe à deux décisions x et y, non pas une préférence de l'une par rapport à l'autre, mais une probabilité que l'une soit préférée à l'autre; la théorie des probabilités subjectives est largement utilisée dans ce cadre.

Remarquons pour terminer que le concept de quasi-ordre s'introduit tout naturellement dans certaines techniques employées en psychologie. LUCE ([40]), en particulier, montre comment, en psychophysique, le passage d'un modèle probabiliste à un modèle algébrique conduit à la structure de quasi-ordre.

C. *La théorie de l'utilité en analyse multicritère.*

Il est clair que la modélisation des préférences (et donc la théorie de l'utilité) est une des étapes importantes de l'analyse multicritère. Elle comprend deux aspects : d'une part la comparaison des décisions suivant chacun des critères (chacun des points de vue) et d'autre part l'agrégation des différentes relations de préférence ainsi obtenues. Il semble que jusqu'à présent, la théorie de l'utilité ait été assez limitée dans son application à l'analyse multicritère, les résultats connus jusqu'ici étant trop contraignants pour être réalistes. C'est d'ailleurs dans cette optique que B. ROY ([49] et [50]) a lancé l'idée d'introduire des structures plus souples pour représenter les préférences du décideur, idée qui est à l'origine de ce travail.

D. *Voies de recherche.*

Le nombre assez impressionnant de travaux qui ont un rapport (plus ou moins éloigné) avec la théorie de l'utilité montre l'intérêt qu'elle présente pour beaucoup de chercheurs et de praticiens. C'est ce que nous avons illustré brièvement dans les paragraphes précédents en décrivant le rôle que cette théorie peut jouer dans deux domaines aussi vastes que l'économie et la psychologie et dans un domaine en plein essor comme l'analyse multicritère. Néanmoins, il semble que les résultats obtenus jusqu'ici utilisent encore des structures mathématiques trop riches pour être réalistes. Nous pensons donc qu'un travail très intéressant peut être réalisé dans ce domaine, notamment par les mathématiciens, en vue de généraliser les résultats connus et de définir de nouveaux concepts mathématiques, plus aptes à être employés dans les problèmes concrets. C'est cette voie que nous avons suivie et c'est dans cette optique que nous proposons ci-dessous quelques sujets de réflexion.

Une première voie de recherche nous est inspirée par les travaux de DEBREU sur l'emploi de la théorie de l'utilité en économie. En effet, nous avons vu (paragraphe A) que l'on était parfois amené à construire des fonctions qui non seulement représentent les préférences du décideur mais qui, par exemple, soient continues au sens d'une topologie définie sur l'espace des décisions. Les théorèmes de représentation numérique s'expriment alors, non plus sous forme algébrique (comme dans ce travail), mais à l'aide de propriétés topologiques étroitement liées à la relation de préférence. Ces théorèmes ne concernent, à ce jour, que les ordres faibles : nous pensons qu'il serait intéressant de les généraliser à d'autres structures et, par exemple, aux quasi-ordres généralisés.

Nous avons vu également que l'introduction des probabilités était souvent nécessaire dans les problèmes de décision, et notamment en psychologie (paragraphe B). La théorie de l'utilité probabiliste a déjà fait l'objet de nombreux travaux mais là encore les résultats concernent des structures mathématiques assez riches et exigent des hypothèses assez restrictives : nous croyons que ce domaine mériterait d'être étudié.

Nous avons passé sous silence, jusqu'ici, un aspect non négligeable de la théorie de l'utilité : la prise en compte du temps dans la description des préférences. Comment peut-on comparer deux n-uples $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ où $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ représente une suite de décisions prises à n époques successives ? Certains travaux ont paru sur ce sujet : leurs auteurs y définissent des phénomènes d'impatience, de persistance, ...; il reste beaucoup de travail à réaliser dans cette voie.

Un problème fondamental qui se pose dans tous les domaines d'applications est celui de l'agrégation de plusieurs relations de préférence individuelles en une relation de préférence globale. Etant donné une règle d'agrégation, quelles propriétés doivent remplir les relations individuelles pour obtenir une relation globale d'un type donné ? Peut-on toujours agréger des relations de préférence ? Nous ne nous attarderons pas ici sur le théorème d'ARROW ([1]) qui a déjà fait l'objet de nombreuses discussions et de multiples extensions (MENUET ([44]), notamment, a généralisé ce théorème aux quasi-ordres). Signalons simplement que ce problème est un aspect essentiel de la modélisation des préférences, particulièrement important en analyse multicritère et qu'il se pose chaque fois qu'une nouvelle structure est introduite pour la représentation des préférences.

Du point de vue pratique, les théorèmes qui assurent l'existence de certaines fonctions sous des conditions précises sont évidemment importants. Ils ne sont cependant pas suffisants dans la mesure où ils ne fournissent pas les moyens de construire ces fonctions. Trouver des tests permettant de vérifier certaines conditions et construire des techniques en vue de bâtir les fonctions d'utilité constituent un champ de recherches encore peu exploré à ce jour.

L'introduction des quasi-ordres généralisés n'est évidemment qu'une étape dans l'évolution de la modélisation des préférences. C'est en traitant des problèmes concrets que les chercheurs pourront découvrir les propriétés qu'ils peuvent exiger des relations de préférence : ils construiront alors des structures de plus en plus proches de la réalité.

Signalons, pour terminer, que l'on reproche souvent à la théorie de l'utilité de traiter des relations de préférence qui excluent toute incomparabilité entre les décisions. Cela est dû au fait (et c'est le cas également dans ce travail) que la représentation des préférences s'effectue au moyen des nombres réels, qui sont munis, de manière naturelle, d'une structure d'ordre total. Une voie de recherche intéressante consisterait donc à essayer de représenter les préférences par d'autres objets mathématiques que les réels (en ne perdant pas de vue, bien entendu, que les résultats doivent si possible être utilisables en pratique).

Bibliographie.

La bibliographie que nous présentons est loin d'être exhaustive; nous n'y avons rassemblé que les travaux principaux et ceux qui avaient servi de base pour nos recherches. Le lecteur intéressé trouvera dans la référence [20] une liste de plus de 300 ouvrages et articles consacrés à la théorie de l'utilité et à ses applications.

[1] ARROW, K.J. : *Social Choice and Individual Values*, Wiley and Sons, New York, 1963.

[2] AUMANN, R.J. : "Utility Theory without the Completeness Axiom", *Econometrica*, Vol. 30, 1962.

[3] AUMANN, R.J. : "Utility Theory without the Completeness Axiom : A Correction", *Econometrica*, Vol. 32, 1964.

[4] BAUER, V. et WEGENER, M. : "A Community Information Feedback System with Multiattribute Utilities", *IIASA* Workshop on Decision-Making with Multiple Conflicting Objectives, Laxenburg, Octobre 20-24, 1975.

[5] BELL, D.E. : "A Decision Analysis of Objectives for a Forest Pest Problem", *IIASA* Workshop on Decision-Making with Multiple Conflicting Objectives, Laxenburg, Octobre 20-24, 1975.

[6] BIRKHOFF, G. : *Lattice Theory*, American Mathematical Society, Colloquium Publications, Vol. XXV, 1960.

[7] CANTOR, G. : "Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers", Dover Publications, New York, 1915.

[8] CHIPMAN, J.S. : "The foundations of Utility", *Econometrica*, Vol. 28, 1960.

[9] COOMBS, C.H., DAWES, R.M. et TVERSKY, A. : *Mathematical Psychology*, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.

[10] DEBREU, G. : "Representation of a Preference Ordering by a Numerical Function", dans R.M. THRALL, C.H. COOMBS et R.L. DAVIS (Eds.), *Decision Processes*, John Wiley and Sons, New York, 1954.

[11] DEBREU, G. : "Topological Methods in Cardinal Utility Theory", dans K.J. ARROW, S. KARLIN et P. SUPPES (Eds.), *Mathematical Methods in the Social Sciences*, 1959, Stanford University Press, Stanford, California, 1960.

[12] DEBREU, G. : *Théorie de la Valeur : analyse axiomatique de l'équilibre économique*, Dunod, 1966.

[13] DYER, J. : "Alternative Formulations of the Trajectory Selection Problem for the Mariner Jupiter/Saturn 1977 Project", *IIASA* Workshop on Decision-Making with Multiple Conflicting Objectives, Laxenburg, Octobre 20-24, 1975.

[14] EDWARDS, W. : "Public Values : Multiattribute Utility Measurement for Social Decision Making", *IIASA* Workshop on Decision-Making with Multiple Conflicting Objectives, Laxenburg, Octobre 20-24, 1975.

[15] FISHBURN, P.C. : *Decision and Value Theory*, J. Wiley and Sons, New York, 1964.

[16] FISHBURN, P.C. : "Independence in Utility Theory with Whole Product Sets", *Operations Research*, Vol. 13, 1965.

[17] FISHBURN, P.C. : "Methods of estimating additive Utilities", *Management Science*, Vol. 13, n°7, 1966.

[18] FISHBURN, P.C. : "Additivity in Utility Theory with Denumerable Product Sets", *Econometrica*, Vol. 34, 1966.

[19] FISHBURN, P.C. : "A note on recent developments in additive utility theories for multiple-factor situations", *Operations Research*, Vol. 14, 1966.

[20] FISHBURN, P.C. : "Utility Theory", *Management Science*, Vol. 14, n°5, 1968.

[21] FISHBURN, P.C. : "Preferences, summation, and social welfare functions", *Management Science*, Vol. 16, n°3, 1969.

[22] FISHBURN, P.C. : "Intransitive indifference in preference theory : a survey", *Operations Research*, Vol. 18, n°2, 1970.

[23] FISHBURN, P.C. : *Utility Theory for decision making*, J. Wiley and Sons, New York, 1970.

[24] FISHBURN, P.C. : "Utility Theory with inexact preferences and degrees of preference", *Synthese*, Vol. 21, 1970.

[25] GORMAN, W.W. : "Separable utility and Aggregation", *Econometrica*, Vol. 27, 1959.

[26] GORMAN, W.W. : "The structure of utility functions", *Review of Economic Studies*, Vol. 35, 1968.

[27] HOLMAN, E.W. : "A note on Additive Conjoint Measurement", *J. of Mathematical Psychology*, Vol. 8, 1971.

[28] INADA, K.I. : "On the Economic Welfare Function", *Econometrica*, Vol. 32, n°3, 1964.

[29] JACQUET-LAGREZE, E. : "How we can use the notion of Semiorders to build Outranking Relations in Multicriteria Decision Making", Utility, Subjective Probability and Human Decision Making - A selection of papers presented at an interdisciplinary research conference, Rome, September 3-6, 1973, edited by D. Wendt and C. Vlek, 1975.

[30] JACQUET-LAGREZE, E. : "La modélisation des préférences, préordres, quasi-ordres et relations floues", *SEMA* (Metra International), Direction Scientifique, Rapport de Recherche n°80, 1975.

[31] JAFFRAY, J.-Y. : "Une démonstration élémentaire de l'existence d'une fonction d'utilité continue", *Bulletin de Mathématiques Economiques*, n°10, 1973.

[32] JAMISON, D.T. et LAU, L.J. : "Semiorders and the theory of Choice", *Econometrica*, Vol. 41, n°5, 1973.

[33] KEENEY, R.L. : "Utility functions for multiattributed consequences, *Management Science*, Vol. 18, n°5, 1972.

[34] KEENEY, R.L. : "Decomposition of Multiattribute Utility Functions", Technical Report n°80, *Operations Research Center, M.I.T.*, 1973.

[35] KEENEY, R.L. : "Multiplicative Utility Functions", *Operations Research*, Vol. 22, n°1, 1974.

[36] KEENEY, R.L. et RAIFFA, H. : "Additive Value Functions", Massachusetts Institute of Technology Cambridge, Massachusetts, U.S.A., 1974.

[37] KEENEY R.L. et NAIR, K. : "Selecting Nuclear Power Sites Using Decision Analysis", *IIASA* Workshop on Decision-Making with Multiple Conflicting Objectives, Laxenburg, Octobre 20-24, 1975.

[38] KRANTZ, D.H., LUCE, R.D., SUPPES, P. et TVERSKY, A. : *Foundations of Measurement*, Volume 1, New York, Academic Press, 1971.

[39] LUCE, R.D. : "Semiorders and a theory of utility discrimination", *Econometrica*, Vol. 24, 1956.

[40] LUCE, R.D. : *Individual Choice Behavior : A Theoretical Analysis*, J. Wiley, New York, 1959.

[41] LUCE, R.D. et TUKEY, J.W. : "Simultaneous Conjoint Measurement : A New Type of Fundamental Measurement", *J. Of Mathematical Psychology*, Vol. 1. 1964.

[41'] LUCE, R.D. : "Two extensions of conjoint measurement", *J. of Mathematical Psychology*, Vol. 3, 1966.

[42] LUCE, R.D. : "Conjoint Measurement : A brief survey", *IIASA* Workshop on Decision-Making with Multiple Conflicting Objectives, Laxenburg, Octobre 20-24, 1975.

[43] LUNG-FEI, L. : "The Theorems of Debreu and Peleg for ordered topological spaces", *Econometrica*, Vol. 40, n°6, 1972.

[44] MENUEL, J. : "Quasi-ordres et modélisation des préférences", *SEMA* (Metra International), Direction Scientifique, Note de Travail n°197, 1974.

[45] MILGRAM, A.N. : "Partially Ordered Sets, Separating Systems and Inductiveness", dans K. MENGER (Ed.), *Reports of a Mathematical Colloquium*, Second Series, Number 1, University of Notre-Dame, 1939.

[46] PELEG, B. : "Utility Functions for Partially Ordered Topological Spaces", *Econometrica*, Vol. 38, 1970.

[47] RAIFFA, H. : "Preferences for multi-attributed alternatives", *The Rand Corporation*, Memorandum RM - 5868 - DOT. Rc., 1969.

[48] ROY, B. : "Problems and methods with multiple objective functions", *Mathematical Programming*, Vol. 1, 1971.
Version française : *METRA*, Vol. XI, n°1, 1972.

[49] ROY, B. : "Vers une méthodologie générale d'aide à la décision", *METRA*, Vol. XIV, n°3, 1975.

[50] ROY, B. : "A Conceptual Framework for a Normative Theory of "Decision-Aid", présenté au XXIIe Congrès International du T.I.M.S., Kyoto, 24-26 juillet 1975, à paraître dans *Management Science*. Special issue on multicrite decision-making.

[51] SCOTT, D. : "Measurement Structures and Linear Inequalities", *J. of Mathematical Psychology*, Vol. 1, 1964.

[52] SUPPES, P. et WINET, M. : "An axiomatization of Utility Based on the Notion of Utility Differences", *Management Science*, Vol. 1, 1955.

[53] SUPPES, P. et ZINNES, J.L. : "Basic Measurement Theory", dans R.D. LUCE, R.R. BUSH et E. GALANTER (Eds.), *Handbook of Mathematical Psychology*, Vol. 1, J. Wiley and Sons, New York, 1963.

[54] TING, H.M. : "Aggregation of attributes for multiattributed utility assessment", Technical Report n°66, *Operations Research Centre, M.I.T.*, 1971.

[55] VINCKE, Ph. : "Concept de quasi-ordre généralisé et théorèmes de représentation", thèse de doctorat, Université Libre de Bruxelles, 1976.