

CAHIER DU LAMSADE

Laboratoire d'Analyse et Modélisation de Systèmes pour l'Aide à la Décision
(Université de Paris-Dauphine)
Unité Associée au CNRS n° 825

METHODE D'ESTIMATION D'UTILITES ADDITIVES CONCAVES EN PROGRAMMATION LINEAIRE MULTIOBJECTIFS *

CAHIER N° 94
septembre 1989

D.K. DESPOTIS **
D. YANNACOPOULOS ***

* Communication présentée aux 27e Journées du Groupe de Travail Européen "Aide Multicritère à la Décision", Mons, Belgique, 24-25 mars 1988.

** University of Piraeus, Dept. of Statistics and Actuarial Science, 40 Karaoli & Dimitriou Str., Piraeus, 185 32, Grèce.

*** Technical Institute of Piraeus, 250 Thivon Str., Egaleo, Grèce.

TABLE DES MATIERES

	<u>PAGES</u>
ABSTRACT	I
RESUME	I
1. Introduction	1
2. Estimation d'utilités additives concaves par l'algorithme UTASTAR	2
3. Un exemple numérique	4
4. Expérimentation et discussion	10
5. Conclusion	15
Références	16

ASSESSMENT OF CONCAVE ADDITIVE UTILITY FUNCTIONS IN MULTIOBJECTIVE LINEAR PROGRAMMING

ABSTRACT

In an important class of multiobjective linear programming methods the determination of a satisfactory solution is realized by the maximization of the decision maker's utility function.

Several methods have been proposed for the assessment of utility functions. These methods require different types of information (cardinal or ordinal) and rely on different assumptions for the utility function, such as linearity, additivity and concavity. The latter property, although restrictive for the decision maker's preferences, provides a sufficient condition for a global optimum.

In this paper an extension of the algorithm UTASTAR is presented for the assessment of concave utility functions. The new algorithm is illustrated by a numerical example. Finally, the degree to which the concavity restriction influences the results of the assessment process is studied and discussed.

Keywords: Multiobjective linear programming, Concave additive utility functions.

METHODE D'ESTIMATION D'UTILITES ADDITIVES CONCAVES EN PROGRAMMATION LINEAIRE MULTIOBJECTIFS

RESUME

Dans une importante classe de méthodes en programmation linéaire multiobjectifs, la fonction d'utilité du décideur est à maximiser afin de déterminer la meilleure solution-compromis.

L'estimation de cette fonction peut être réalisée par plusieurs méthodes utilisant des informations cardinales ou ordinales. Ces méthodes utilisent largement la contrainte de concavité de la fonction d'utilité pour obtenir une solution optimale globale.

Ce cahier présente une extension de l'algorithme UTASTAR adaptée au problème d'estimation d'utilités additives concaves.

Le nouvel algorithme est illustré par un exemple numérique et son comportement est comparé par expérimentation à celui d'UTASTAR.

Mots-clés: Programmation linéaire multiobjectifs, Fonctions d'utilités additives concaves.

1. INTRODUCTION

Les problèmes traités par la programmation mathématique multiobjectifs se posent de la façon suivante:

Déterminer des valeurs possibles pour m variables de décision continues $\underline{x} = (x_1, \dots, x_m)$ dans le but d'optimiser n fonctions objectifs $g_1(\underline{x}), \dots, g_n(\underline{x})$ sous un nombre de contraintes de $\underline{x} \in A$.

Soit u une fonction d'utilité implicite telle que, pour chaque $\underline{x}, \underline{y} \in A$:

- i) $\underline{x}$ est préféré à $\underline{y}$ ($\underline{x}Py$) ssi
 $u(g_1(\underline{x}), \dots, g_n(\underline{x})) > u(g_1(\underline{y}), \dots, g_n(\underline{y}))$
- ii) $\underline{x}$ est indifférent à $\underline{y}$ ($\underline{x}Iy$) ssi
 $u(g_1(\underline{x}), \dots, g_n(\underline{x})) = u(g_1(\underline{y}), \dots, g_n(\underline{y}))$

Le problème ci-dessus consiste donc à:

$$\begin{aligned} &\max u(g_1(\underline{x}), \dots, g_n(\underline{x})) \\ &\text{sous les contraintes} \\ &\quad \underline{x} \in A \end{aligned} \quad (1)$$

Bien que la fonction d'utilité u soit implicite, dans (1) elle se situe explicitement de manière telle qu'elle devienne un moyen d'agrégation de n fonctions objectifs à un objectif total.

Plusieurs méthodes sont déjà développées pour ce type de problèmes. Une classe importante de ces méthodes utilise ces fonctions d'utilité d'une manière interactive dans un but de générer un ensemble de solutions efficaces d'utilité croissante [2,11,12] ou même d'estimer une solution unique d'utilité maximale [4]. En effet, dans ces méthodes le décideur doit répondre à plusieurs types de questions (i.e taux de substitution explicite, classement d'alternatives, ...) dans le but d'estimer localement la fonction d'utilité u ou bien de déterminer une direction de recherche d'une amélioration de u .

Une approche du problème (1) est l'agrégation de n critères $g_1, \dots, g_n$ à un critère unique $u(g_1, \dots, g_n)$. Suivant cette approche, la résolution de ce problème se déroule en deux étapes:

I. Estimation d'un modèle analytique de préférence globale sous forme d'une fonction d'utilité u . Le cadre méthodologique général de cette phase est suggéré par la théorie d'utilité multiattribut (MAUT [6]). Notons aussi le rôle important du style cognitif du décideur.

II. A partir de u , recherche d'une solution d'utilité maximale en utilisant des techniques de programmation mathématique, linéaire ou non linéaire. A noter que si u est non linéaire, elle peut être estimée par une fonction linéaire par morceaux qui, pour arriver à un optimum global, doit être concave.

Une méthode importante pour la résolution de l'étape I de cette approche est UTA proposée par Jacquet-Lagrèze et Siskos [5]. Cette méthode estime une fonction d'utilité additive en analysant la préférence d'un décideur extériorisée sous forme d'un préordre sur un ensemble d'actions de référence.

Néanmoins, les problèmes traités par UTA sont caractérisés par le nombre fini d'actions et une certitude concernant le profil de chaque action sur les critères choisis.

Siskos [7] a déjà proposé une première extension de cette méthode à des

problèmes en univers aléatoire.

En Programmation Linéaire Multiobjectifs (PLMO), l'espace des décisions, étant continu, est caractérisé indirectement par un ensemble de contraintes. Dans ce cas, l'utilisation de la méthode UTA présuppose une procédure de construction d'un sous-ensemble de référence fini A' des décisions possibles ou même hypothétiques.

Jacquet-Lagrèze, Meziani et Slowinski [4], dans le cadre d'une méthode de PLMO, utilisent PREFCALC [3], produit aussi d'UTA, dans le but d'estimer des fonctions d'utilité marginales, linéaires par morceaux, permettant une restitution optimale d'une préférence explicitée sur un ensemble fini (A') de solutions efficaces. La construction de A' est réalisée par l'application de la première étape de l'algorithme de Choo et Atkins [1].

Siskos et Despotis [8,9] pour arriver à une solution satisfaisante à des problèmes en PLMO ont présenté une méthode interactive dans laquelle ils utilisent aussi l'algorithme UTASTAR [10], version améliorée d'UTA, pour estimer la préférence globale du décideur.

Les algorithmes UTA classique et UTASTAR n'assurent pas la concavité des fonctions d'utilité marginales. Ces algorithmes, à travers leurs applications, conduisent à l'estimation d'une fonction d'utilité non nécessairement concave. La maximisation d'une telle fonction dans un espace de décision continue ne garantit pas une solution d'un optimum global.

Ce cahier présente une extension de l'algorithme UTASTAR adapté au problème d'estimation d'utilités additives concaves. La nouvelle méthode est illustrée par un exemple numérique et elle est comparée à UTASTAR sur les indicateurs de cohérence.

2. ESTIMATION D'UTILITES ADDITIVES CONCAVES PAR L'ALGORITHME UTASTAR

L'algorithme UTASTAR analyse la préférence globale d'un décideur extériorisée sous forme de préordre sur un ensemble d'actions $A' = \{a_k, k=1, \dots, s\}$ d'après les étapes suivantes:

i) Exprimer les utilités des actions $u(g(a_k))$, $k=1, \dots, s$ en fonction des variations $w_{ij} = u_i(g_i^{j+1}) - u_i(g_i^j)$, $i=1, \dots, n$ et $j=1, \dots, \alpha_i$, d'utilité marginale u_i entre deux échelons g_i^j, g_i^{j+1} consécutifs sur l'échelle de chaque critère g_i . Ces échelons g_i^j sont le produit d'une discrétisation de l'échelle du critère g_i en α_i points équidistants. α_i se définit dans la mesure de la dispersion des valeurs des actions sur l'échelle de chaque critère.

ii) Définir une chaîne sur le préordre allant de la tête à la queue, en écrivant pour chaque paire (a_k, a_{k+1}) d'actions consécutives des expressions analytiques, suivantes:

$$\Delta(a_k, a_{k+1}) = u[g(a_k)] - u[g(a_{k+1})] + \sigma^+(a_k) - \sigma^-(a_k) - \sigma^+(a_{k+1}) + \sigma^-(a_{k+1})$$

où $\sigma^+(a_k)$, $\sigma^-(a_k)$ fonctions d'erreur de surestimation et sous-estimation

respectivement.

iii) Résoudre le programme linéaire:

$$F(*) = \min F = \sum_{k=1}^s [\sigma^+(a_k) + \sigma^-(a_k)]$$

sous les contraintes

$$\begin{aligned} \Delta(a_k, a_{k+1}) &\geq \delta \quad \text{si } a_k \text{ P } a_{k+1} \\ \Delta(a_k, a_{k+1}) &= 0 \quad \text{si } a_k \text{ I } a_{k+1} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\alpha_i-1} w_{ij} = 1$$

$$w_{ij} \geq 0, \quad \sigma^+(a_k) \geq 0, \quad \sigma^-(a_k) \geq 0 \quad i, j, k$$

où δ petite valeur positive correspondante à l'utilité discriminant deux classes d'équivalence consecutives.

iv) Tester l'existence des solutions optimales multiples. En cas de dégénérescence, trouver celles des solutions qui maximisent et/ou minimisent $u_i(g_i^{\alpha_i})$ pour chaque i .

L'application de cet algorithme à des problèmes en PLMO, où les critères sont des fonctions linéaires à optimiser et les actions des vecteurs correspondant à des alternatives réelles ou même hypothétiques conduit à l'estimation d'une fonction d'utilité non nécessairement concave.

Ainsi la maximisation d'une telle fonction ne garantit pas un optimum global.

Ce problème est résolu en ajoutant des contraintes de concavité à côté de celles de préférence et de normalisation qui existent déjà dans UTASTAR:

$$u_i[(1-t)p+ tq] \geq (1-t)u_i(p) + tu_i(q) \quad p, q \in [g_{i*}, g_i^*], \quad i=1, \dots, n \text{ et } t \in (0,1)$$

où g_{i*} et g_i^* représentent respectivement le niveau le moins et le plus préféré du critère g_i .

On a donc, pour chaque triplet des discrétisations consécutives, $g_i^{j-1}, g_i^j, g_i^{j+1}$, $j=2, \dots, \alpha_i-1$ et $i=1, \dots, n$:

$$u_i(g_i^j) - u_i(g_i^{j-1}) \geq u_i(g_i^{j+1}) - u_i(g_i^j)$$

ou en fonction de variations w_{ij} :

$$w_{i,j-1} - w_{ij} \geq 0$$

La troisième étape de l'algorithme UTASTAR se présente donc avec les transformations ci-dessous:

$$F(*) = \min F = \sum_{k=1}^s [\sigma^+(a_k) + \sigma^-(a_k)]$$

sous les contraintes:

$$\begin{aligned} \Delta(a_k, a_{k+1}) &\geq \delta & \text{si } a_k \text{ P } a_{k+1} \\ \Delta(a_k, a_{k+1}) &= 0 & \text{si } a_k \text{ I } a_{k+1} \end{aligned} \quad (3)$$

$$w_{i,j-1} - w_{ij} \geq \varepsilon, \quad (i=1, \dots, n), \quad (j=2, \dots, \alpha_i-1)$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\alpha_i-1} w_{ij} = 1$$

$$w_{ij} \geq 0, \quad \sigma^+(a_k) \geq 0, \quad \sigma^-(a_k) \geq 0 \quad i, j, k$$

où $\varepsilon \geq 0$ garantit la concavité des fonctions d'utilité marginales.

3. UN EXEMPLE NUMERIQUE

Supposons le PLMO suivant

$$\begin{aligned} \max \quad g_1 &= 10x_1 + 15.5x_2 + 9.5x_3 + 7x_4 \\ \max \quad g_2 &= -12x_1 - 14x_2 - 11x_3 - 6x_4 \\ \max \quad g_3 &= x_4 \end{aligned} \quad (4)$$

sous les contraintes:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 &\leq 810 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 &\leq 920 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 &\leq 750 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &\leq 700 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &\leq 750 \\ x_1 &\geq 25 \\ x_2 &\geq 30 \\ x_3 &\geq 25 \\ x_4 &\geq 20 \\ 3.6x_1 + 6x_3 &\leq 500 \end{aligned} \quad (5)$$

Les valeurs-limites des fonctions-objectifs (tableau 1) sont obtenues par la résolution de six programmes linéaires unicritères où l'on cherche à maximiser et minimiser successivement ces fonctions (4) sous les contraintes (5).

Tableau 1: Valeurs-limites des fonctions-objectifs

	ξ_1	ξ_2	ξ_3
Meilleure valeur	3897.22	-1115.00	352.00
Plus mauvaise valeur	1092.50	-3803.89	20.00

Ce tableau sert de base de construction d'un ensemble de profils hypothétiques A' de manière qu'aucun de ces vecteurs ne domine tous les autres. Ainsi, le décideur explicitera sa préférence sur A' sans se trouver face à des situations triviales.

Les profils hypothétiques de décision choisis arbitrairement se présentent dans le tableau 2. On peut facilement constater qu'ils sont obtenus par une discrétisation de l'échelle de chaque critère en huit points équidistants.

Supposons qu'un individu attribue aux huit vecteurs le préordre total de préférence suivant:

$$a_5 P a_7 P a_6 P a_4 P a_8 P a_3 P a_1 P a_2$$

Tableau 2: Profils de décision

	Evaluation multicritère		
Profils	ξ_1	ξ_2	ξ_3
a_1	1092.50	-3419.78	352.50
a_2	1493.17	-3803.89	305.00
a_3	1893.84	-2651.52	257.50
a_4	2294.51	-2267.39	210.00
a_5	2695.18	-1115.00	162.50
a_6	3095.85	-1499.13	20.00
a_7	3496.52	-1883.26	67.50
a_8	3897.22	-3035.65	115.00

La première étape d'UTASTAR consiste à exprimer les utilités de huit profils en fonction de w_{ij} . Pour le calcul analytique des utilités, les échelles discrètes suivantes ont été retenues:

$$[g_1^*, g_1^*] = [1092.50, 2027.41, 2962.32, 3897.22]$$

$$[g_2^*, g_2^*] = [-3803.89, -2907.60, -2011.30, -1115.00]$$

$$[g_3^*, g_3^*] = [20.00, 130.83, 241.67, 352.50]$$

d'où, par interpolation linéaire, on trouve:

$$u(a_5) = w_{11} + 0.71w_{12} + w_{21} + w_{22} + w_{23} + w_{31} + 0.29w_{32}$$

$$u(a_7) = w_{11} + w_{12} + 0.57w_{13} + w_{21} + w_{22} + 0.14w_{23} + 0.43w_{31}$$

$$u(a_6) = w_{11} + w_{12} + 0.14w_{13} + w_{21} + w_{22} + 0.58w_{23}$$

$$u(a_4) = w_{11} + 0.58w_{12} + w_{21} + 0.72w_{22} + w_{31} + 0.71w_{32}$$

$$u(a_8) = w_{11} + w_{12} + w_{13} + 0.86w_{21} + 0.86w_{31}$$

$$u(a_3) = 0.86w_{11} + w_{21} + 0.29w_{22} + w_{31} + w_{32} + 0.14w_{33}$$

$$u(a_1) = 0.43w_{21} + w_{31} + w_{32} + w_{33}$$

$$u(a_2) = 0.43w_{11} + w_{31} + w_{32} + 0.57w_{33}$$

Finalement, en passant par l'étape (ii) de comparaison des profils par paires, on arrive bien au programme linéaire (voire tableau 3) du nouveau modèle UTASTAR (δ est pris égal à 0.01 et $\epsilon=0$).

La résolution de ce programme fournit les résultats suivants:

$$w_{11}=0.095, w_{12}=0.095, w_{13}=0.095$$

$$w_{21}=0.167, w_{22}=0.167, w_{23}=0.167$$

$$w_{31}=0.214, w_{32}=0, w_{33}=0$$

Les autres variables (σ) sont égales à zéro.

Dans la dernière étape, le modèle teste l'existence des solutions post-optimales. Dans le cas de dégénérescence, la fonction économique de la solution optimale devient une contrainte d'égalité. Pour obtenir des solutions post-optimales, les fonctions économiques sont celles qui maximisent successivement tous les critères.

Nous avons donc à résoudre les trois programmes linéaires du tableau 4.

Les solutions obtenues pour chacun de ces programmes linéaires sont les suivants:

$$\max z_1 : w_{11}=0.410, w_{12}=0.088, w_{13}=0$$

$$w_{21}=0.436, w_{22}=0.005, w_{23}=0.005$$

$$w_{31}=0.056, w_{32}=0, w_{33}=0$$

Tableau 3: Programme linéaire - Solution Optimale

[illegible]

Tableau 4: Programme linéaire - Solutions p-optimales

[illegible]

$$\max z_2 : w_{11}=.060, w_{12}=.060, w_{13}=.060$$

$$w_{21}=.682, w_{22}=.057, w_{23}=.057$$

$$w_{31}=.023, w_{32}=0, w_{33}=0$$

$$\max z_3 : w_{11}=.184, w_{12}=.184, w_{13}=.002$$

$$w_{21}=.093, w_{22}=.093, w_{23}=.093$$

$$w_{31}=.117, w_{32}=.117, w_{33}=.117$$

Finalement, pour synthétiser ces résultats, l'algorithme calcule la moyenne de ces solutions:

$$\text{moy } z : w_{11}=.218, w_{12}=.111, w_{13}=.020$$

$$w_{21}=.404, w_{22}=.052, w_{23}=.052$$

$$w_{31}=.065, w_{32}=.039, w_{33}=.039$$

On est en mesure de constater l'instabilité du modèle de préférence proposé par l'algorithme ainsi que la concavité des fonctions d'utilité marginales. Dans la figure 1, on représente graphiquement chaque critère en trois courbes: Les courbes c_1 correspondent aux solutions post-optimales qui maximisent les critères respectifs, les courbes c_2 à la solution moyenne autant que pour chaque critère i les courbes c_3 se produisent des valeurs minimales w_{ij} pour chaque j.

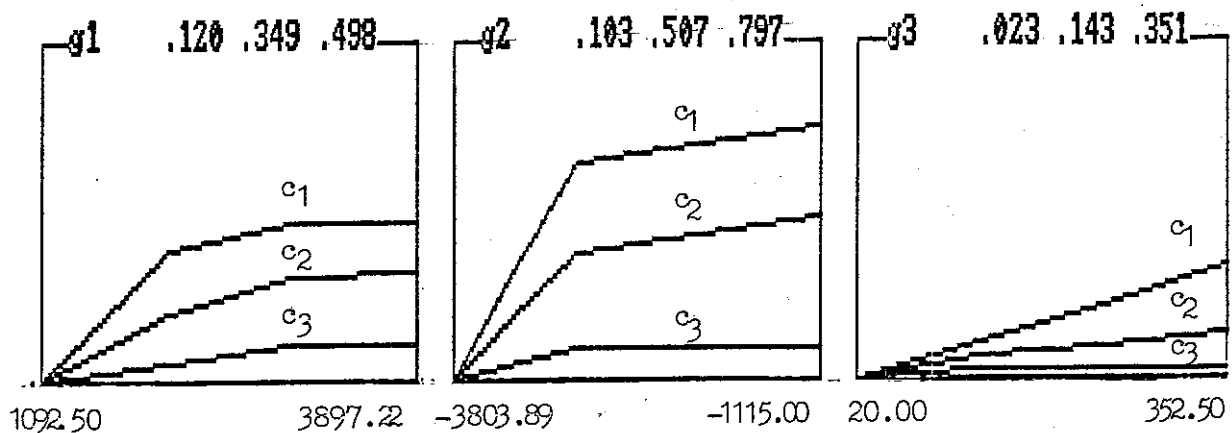


Figure 1: Fonctions d'utilités marginales

Finalement, dans la figure 2, on représente la courbe de régression ordinale, le tableau d'utilités globales pour les huit profils de référence ainsi que les indicateurs de cohérence τ -Kendall et $F(*)$. Ce dernier correspond à la valeur de la fonction économique de la solution optimale.

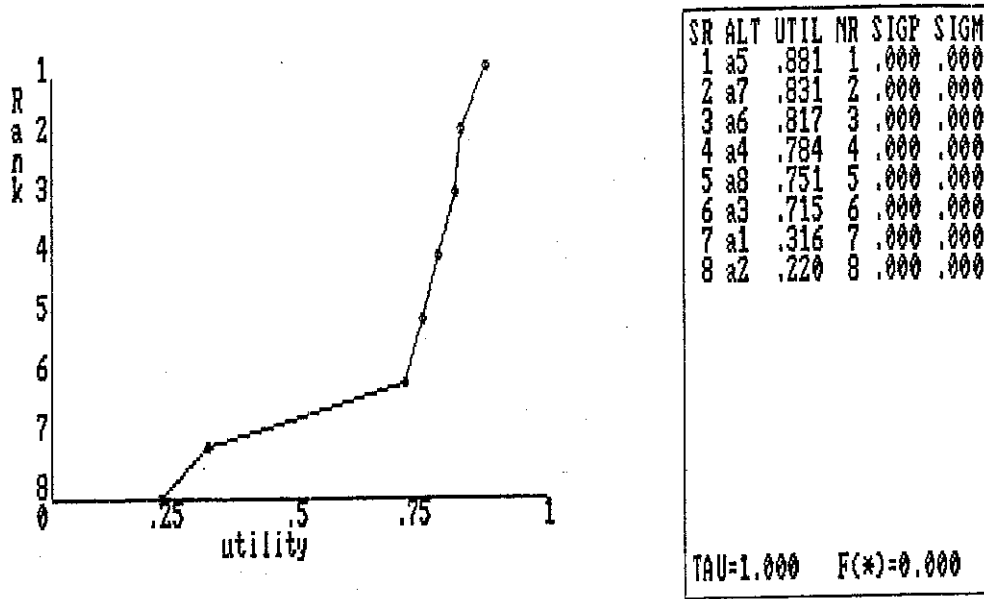


Figure 2: Courbe de régression ordinale

4. EXPERIMENTATION ET DISCUSSION

Une question importante qui se pose par l'application du modèle (3) présenté ci-dessus est l'impact de l'introduction des contraintes de concavité sur les indices de cohérence entre modèle de préférence et décideur.

Dans tous les deux modèles le degré de restitution de la préférence du décideur est mesuré par le τ -Kendall. Cet indice varie de -1 (plus mauvaise valeur) à 1 (meilleure valeur) en fonction du nombre de violations apportées par chaque modèle sur le préordre initial.

Méthodologie de l'experimentation

Une première approche de ce problème est entreprise au moyen d'une experimentation de deux modèles sur les mêmes jeux de données et l'analyse comparative des indices de cohérence.

On a donc appliqué les deux modèles sur dix problèmes différents dont les dimensions se présentent dans le tableau 5.

A noter que pour chaque problème, nous avons utilisé dix préordres différents - ce qui pourrait correspondre aux préférences d'un nombre égal de décideurs hypothétiques - et cela pour obtenir un échantillon de comparaison suffisamment

large.

Finalement, le rapport entre les deux modèles a été testé pour différentes valeurs de ϵ par les indicateurs τ -Kendall et F^* .

Tableau 5: Dimensions des problèmes

Problème	Nombre de critères	Nombre d'actions de référence
1	3	8
2	3	8
3	3	9
4	3	10
5	4	8
6	4	9
7	4	10
8	5	8
9	5	9
10	5	10

Resultats et discussion

Afin d'évaluer la différence entre les deux versions, nous avons porté notre attention sur la divergence du τ -Kendall qui est considéré comme l'indicateur le plus représentatif de la restitution du préordre. Les résultats globaux apparaissent dans le tableau 6.

Tableau 6: Résultats sommaires de l'expérimentation

		$\tau(c)-\tau(u)>0$	$\tau(c)-\tau(u)<0$	$\tau(c)-\tau(u)=0$
% cas		18	62	20
$100(\tau(c)-\tau(u))/\tau(u)$ %	inférieur	1.7	2.6	-
	supérieur	32.5	40.7	-
	moyenne	10.4	16.3	-

Dans le tableau 6 $\tau(c)$ correspond au τ -Kendall du nouveau modèle et $\tau(u)$ à celui d'UTASTAR. La première ligne de ce tableau nous montre le pourcentage des cas pour lesquels la différence $\tau(c)-\tau(u)$ a été trouvée positive, négative et nulle respectivement. Dans les lignes suivantes du même tableau sont présentés, pour chacun des cas ci-dessus en pourcentages, les déviations minimales, maximales et moyennes du $\tau(c)$ par rapport à $\tau(u)$.

Les données complètes et les résultats obtenus pour trois cas caractéristiques sont présentés dans les tableaux 7, 8, 9 et les figures 3, 4, 5 respectivement.

Dans le premier cas, les résultats obtenus par l'application des deux modèles sur les données du tableau 7 apparaissent dans la figure 3.

La valeur de $F(c)$ (F^* du nouveau modèle) est croissante avec ε et en tout cas supérieure de $F(u)$ (F^* d'UTASTAR), ce qui est induit par le nombre augmenté des contraintes.

Néanmoins, pour de valeurs de ε proches à zéro ($\varepsilon \leq 0.004$) on remarque un meilleur τ -Kendall pour le nouveau modèle. Par ailleurs la courbe $\tau(c)$ n'est pas strictement décroissante (maxima locaux). Cette incohérence entre $F(c)$ et $\tau(c)$, déjà commentée par Jacquet-Lagrèze et Siskos [5], est due au fait que τ est non seulement fonction de F mais surtout de la manière avec laquelle les points correspondant aux actions mal estimées sont dispersées autour de la courbe de régression ordinale. A noter qu'une erreur estimée par le modèle sur une action ne conduit pas nécessairement à une violation du préordre.

Dans le second cas (tableau 8, figure 4) pour $\varepsilon \leq 0.064$ les deux modèles donnent le même τ -Kendall.

Finalement, dans le troisième cas (tableau 9, figure 5) $\tau(u) > \tau(c)$ pour tout ε .

Tableau 7: Profils de décision

Evaluation multicritère					
Profils	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4	Préordre
a_1	8850.000	-1450.000	74.260	595.026	8
a_2	8172.857	-1685.476	93.957	705.124	6
a_3	7495.714	-1920.952	113.655	815.223	3
a_4	6818.571	-2156.429	133.353	925.321	7
a_5	6141.429	-2391.905	153.051	1035.419	5
a_6	5464.286	-2627.381	172.748	1145.517	2
a_7	4787.143	-2862.857	192.445	1255.616	4
a_8	4110.000	-3098.333	212.143	1365.714	1

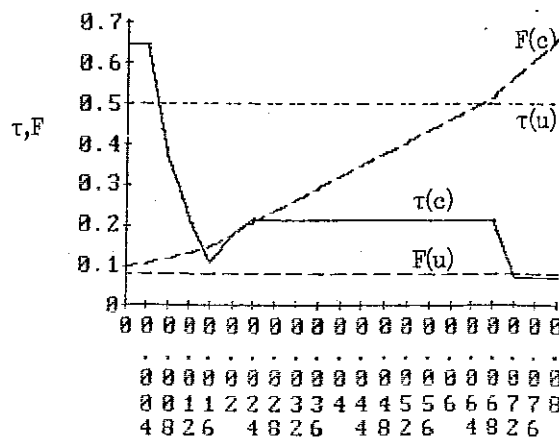


Figure 3: Résultats obtenus par les données du tableau 7

Tableau 9: Profils de décision

Evaluation multicritère					
Profils	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4	Préordre
a_1	8850.000	-1450.000	74.260	595.026	3
a_2	8172.857	-1685.476	93.957	705.124	6
a_3	7495.714	-1920.952	113.655	815.223	2
a_4	6818.571	-2156.429	133.353	925.321	5
a_5	6141.429	-2391.905	153.051	1035.419	7
a_6	5464.286	-2627.381	172.748	1145.517	1
a_7	4787.143	-2862.857	192.445	1255.616	4
a_8	4110.000	-3098.333	212.143	1365.714	8

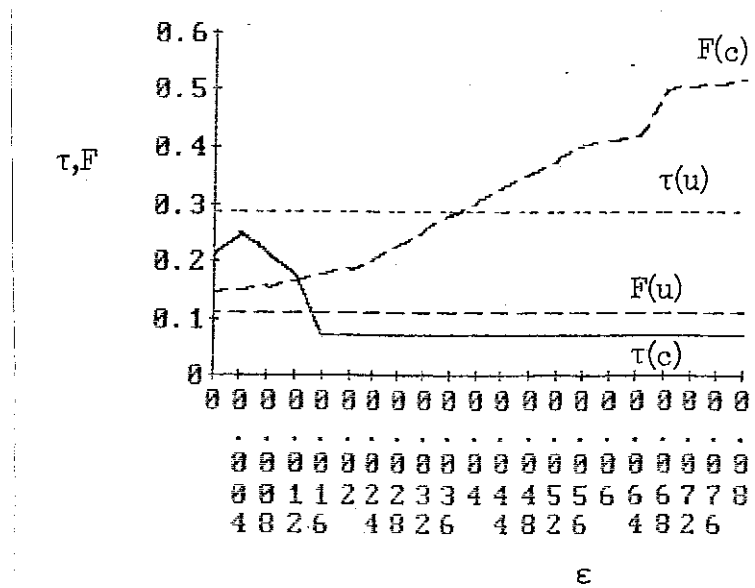


Figure 5: Résultats obtenus par les données du tableau 9

5. CONCLUSION

Nous avons présenté dans ce cahier une version d'UTASTAR adaptée à des problèmes qui font l'objet de la PLMO.

Le point essentiel de cette version est l'insertion de contraintes supplémentaires dans le but d'obtenir des fonctions d'utilité marginales concaves.

Bien que le nombre de contraintes ait été augmenté d'une somme de $\sum (\alpha_i - 2)$, cela ne paraît pas influencer essentiellement le nombre d'itérations du programme linéaire.

Comme on peut le remarquer aux résultats de l'expérimentation cités ci-dessus, l'hypothèse de concavité des fonctions d'utilité marginale, réalisée par l'introduction des contraintes supplémentaires, n'est pas toujours une cause apparente de plus mauvaises valeurs aux indicateurs de cohérence.

Néanmoins, ce qui est remarquable est le fait que malgré l'introduction de ces contraintes il existe des cas où le nouveau modèle conduit à une meilleure restitution des préférences.

Cela nous emmène à penser que la méthode UTA, n'arrive pas toujours à une restitution optimale du préordre ce qui peut s'expliquer du fait que l'optimum correspond à l'erreur minimale moyenne sans être prise en compte la dispersion d'erreurs.

Ainsi, nos recherches actuelles sont orientées à une nouvelle version d'UTA où l'analyse post-optimale consiste à la minimisation de la dispersion d'erreurs.

REFERENCES

- [1] Choo, E.U., D.R. Atkins: An Interactive Algorithm for Multicriteria Programming. *Compt. and Ops Res.* Vol. 7, pp.81-87, 1980.
- [2] Geoffrion, A. M., J. S. Dyer, A. Feinberg: An Interactive Approach for Multicriterion Optimization with an Application to the Operation of an Academic Dept., *Management Science*, Vol.19, No.4, pp.357-368, 1972.
- [3] Jacquet-Lagrèze, E.: PREFCALC - Evaluation et Décision Multicritères. *Euro-Décision*, 1983.
- [4] Jacquet-Lagrèze, E., R. Meziani, R. Slowinski: MOLP with an Interactive Assessment of a Piecewise Linear Utility Function. *European Journal of Operational Research*, No.3, pp.350-357, 1987.
- [5] Jacquet-Lagrèze, E., J. Siskos: Assessing a Set of Additive Utility Functions for Multicriteria Decision Making - The UTA Method. *European Journal of Operational Research*, No.10, pp.151-164, 1982.
- [6] Keeney, R. L., H. Raiffa: *Decisions with Multiple Objectives - Preferences and Value Tradeoffs*. Wiley, New York, 1976.
- [7] Siskos, J. : Analyse de Systèmes de Décision Multicritère en Univers Aléatoire. *Foundations of Control Engineering*, Vol.8, No.3, 1983.
- [8] Siskos, J., D. K. Despotis: A Multiobjective Linear Programming Algorithm Based on Satisfactory Goals and Interactive Utility Assessment. *Cahier du LAMSADE*, No.81, Université de Paris-Dauphine, Paris, 1987.
- [9] Siskos, J., D. K. Despotis: A DSS Oriented Method for Multiobjective Linear Programming Problems. *Decision Support Systems*, Vol.5, pp.47-55, 1989
- [10] Siskos, J., D. Yannacopoulos: UTASTAR - An Ordinal Regression Method for Building Additive Value Functions. *Investigação Operacional*, Vol.5, No.1, pp.39-53, 1985.
- [11] Stewart, T. J.: An Interactive Multiple Objective Linear Programming Method Based on Piecewise-Linear Additive Value Functions. *IEEE Transactions*, SMC-17, No.5, pp.799-805, 1987.
- [12] Zionts, S., J. Wallenius: An Interactive Multiple Objective Linear Programming Method for a Class of Underlying Non-linear Utility Functions. *Management Science*, Vol.29, pp.519-529, 1983.