

Approches combinatoires pour l'optimisation continue et application aux algorithmes d'ordre élevé

Proposition de sujet de thèse



Unité de recherche : LAMSADE (Laboratoire d'analyse et modélisation de systèmes pour l'aide à la décision, UMR 7243).

Encadrants :

Denis Cornaz (denis.cornaz@lamsade.dauphine.fr),
Clément Royer (clement.royer@dauphine.psl.eu).

Mots-clés : Complexité algorithmique, théorie des graphes, méthodes d'ordre élevé, reformulations combinatoires.

Description du sujet

Durant la dernière décennie, le domaine de l'optimisation continue s'est de plus en plus intéressé aux algorithmes dits d'*ordre élevé*, car ils exploitent l'information locale fournie par les dérivées d'ordre au moins trois. Des résultats récents ont ainsi mis en avant que de telles méthodes sont d'autant plus rapides (en termes de nombre d'itérations effectuées) que l'ordre des dérivées utilisées est élevé. De telles propriétés sont particulièrement intéressantes pour traiter des problèmes d'analyse de données sous formes matricielle ou tensorielle. Dans ce contexte, l'utilisation des dérivées d'ordre élevé peut s'avérer nécessaire pour certifier l'optimalité d'une solution. Par ailleurs, les instances de ces problèmes sont souvent fortement structurées, ce qui peut permettre de converger vers un optimum global avec des méthodes purement locales, à condition que ces dernières soient d'un ordre suffisamment élevé.

En dépit de ce contexte favorable, les algorithmes d'ordre élevé restent encore peu appliqués, principalement du fait de leur coût de calcul élevé par itération. Celui-ci est souvent dominé par la résolution (exacte ou approchée) de sous-problèmes d'optimisation quadratique ou polynômiaux. Si diverses classes d'approximation de ces problèmes ont déjà été proposées, celles-ci ne possèdent généralement que des garanties asymptotiques d'approcher le problème originel, et aucun algorithme ne semble s'être imposé pour le traitement de ces approximations.

Des formulations combinatoires issues de problèmes d'optimisation intervenant dans les algorithmes d'ordre deux ont déjà été exploitées avec succès : on cherchera dans cette thèse à développer l'approche pour des ordres plus élevés. Pour cela, on considèrera l'application d'algorithmes exacts ou d'approximation à ces reformulations, et on étudiera leur traduction dans le contexte de l'optimisation continue. Un tel objectif amènera naturellement des questions de théorie des graphes, de type structurelles d'une part, et algorithmiques d'autre part. L'interaction entre la théorie des graphes et les types de problèmes d'optimisation que l'on traitera dans la thèse est totale pour les programmes quadratiques booléens non contraints, qui

sont équivalents au problème (déjà bien étudié) de la coupe maximum dans un graphe. Cette interaction a des conséquences pour les programmes quadratiques continus contraints uniquement par des bornes. Par ailleurs, une reformulation combinatoire d'autres types de problèmes quadratiques amène à la caractérisation de structures minimales, et la séparation de ce type de contraintes linéaires nécessite l'élaboration d'algorithmes efficaces d'optimisation dans les graphes. D'une manière générale, cette approche combinatoire renforce, sans nécessairement dominer, des reformulations issues de techniques basées sur la programmation semi-définie positive, et de type extension-projection. La thèse développera encore l'interaction avec des types particuliers de problèmes, par exemple booléen quadratique, contraint par des inégalités linéaires de couverture, éventuellement associés à des structures de graphes.

La problématique de recherche se construira autour des axes suivants.

1. **Programmes quadratiques** Les problèmes de programmation quadratique forment une classe de problème non linéaires, dont certaines classes d'instances sont connues pour être NP-difficiles (par exemple les problèmes quadratiques non convexes avec contraintes de bornes). On cherchera à construire des formulations dans le langage de la théorie des graphes de ces problèmes, afin de proposer de nouvelles approches pour leur résolution. De tels résultats seraient alors applicables à l'étude d'algorithmes convergeant à l'ordre deux, par exemple pour des problèmes avec contraintes d'intervalle.
2. **Programmes polynômiaux** L'étude précédente vise à se généraliser à des problèmes impliquant des fonctions polynômiales. Ceux-ci apparaissent lors de la vérification de conditions d'optimalité ou du calcul de direction dans les algorithmes d'ordre élevé. On cherchera à proposer des méthodes qui puissent résoudre ces problèmes de manière exacte ou approchée avec un coût de calcul qui soit le plus faible possible.
3. **Problèmes matriciels et tensoriels** Les problèmes tels que la factorisation de tenseurs possèdent souvent des structures spécifiques, qu'il est possible d'exploiter à la fois dans la caractérisation des solutions du problème ainsi que dans le développement d'algorithmes efficaces. On cherchera donc à adapter notre étude générique à ces problèmes particuliers.

Bibliographie

- [1] F. Barahona, M. Junger, and G. Reinelt. Experiments in quadratic 0-1 programming. *Math. Program.*, 44:127–137, 1989.
- [2] S. Bubeck, Q. Jiang, Y. T. Lee, Y. Li, and A. Sidford. Near-optimal method for highly smooth convex optimization. In *Proceedings of the 31st Conference On Learning Theory*, pages 492–507. PMLR, 2019.
- [3] S. Burer and A. N. Letchford. On nonconvex quadratic programming with box constraints. *SIAM J. Optim.*, 20:1073–1089, 2009.
- [4] C. Cartis, N. I. M. Gould, and Ph. L. Toint. Optimality of orders one to three and beyond: characterization and evaluation complexity in constrained nonconvex optimization. *J. Complexity*, 53:68–94, 2019.
- [5] D. Cornaz and P. Meurdesoif. Chromatic Gallai identities operating on Lovász number. *Math. Program.*, 144:347–368, 2014.
- [6] R. Ge and T. Ma. On the optimization landscape of tensor decompositions. In *Advances in Neural Information Processing Systems 30*, pages 3653–3663, 2017.