

Sujet de thèse : *Extension de pré-solutions et le prix de l'extension dans les graphes.*

Lieu : *Laboratoire LAMSADE, université Paris-Dauphine, Paris, France*

Direction : *Jérôme Monnot* jerome.monnot@dauphine.fr

Co-encadrant : *Ararat Harutyunyan* ararat.harutyunyan@dauphine.fr

Mots clés : Complexité standard et paramétrée, approximation, classes de graphes

Description du sujet :

La plupart des problèmes d'optimisation combinatoire se trouvent être très difficiles d'un point de vue computationnel. Un des principaux objectifs de l'informatique théorique moderne consiste à surmonter cette barrière algorithmique en proposant des solutions approchées ou en fournissant des informations supplémentaires sur les données. L'objectif de cette thèse est d'étudier l'impact fourni par l'ajout d'informations sous le trait de solutions partielles à étendre du point de vue de la complexité standard et paramétrée. L'extension de *pré-solutions* est déjà présente dans diverses techniques de l'informatique : un algorithme de recherche arborescente qui résout un problème d'optimisation, se base souvent sur l'extension de solutions afin d'élaguer des branches de l'arbre de recherche le plus tôt possible. Aussi, par exemple pour le problème de la couverture des arêtes par des sommets (noté VC), il serait souhaitable de pouvoir dire rapidement (c'est-à-dire en temps polynomial) si un sous-ensemble de sommets (que nous appellerons *pré-solution*) peut faire partie d'une couverture minimale voire optimale. Ce type de considération, reste même intéressante dans le cas extrême où nous voulons décider si un sommet particulier appartient à une couverture optimale. D'ailleurs, cette approche est déjà utilisée lorsque l'on souhaite énumérer l'ensemble des couvertures minimales ou plus généralement l'ensemble des solutions minimales d'un problème d'optimisation [10, 11]. Finalement, l'extension de *pré-solutions* joue un rôle prépondérant dans les approches basées sur la programmation dynamique. Il existe dans la littérature quelques articles considérant l'extension de *pré-solutions*, mais de manière sporadique, [3, 7, 8, 9, 13, 17]. Très récemment, dans [5] et [18] deux cadres théoriques distincts ont été proposés pour l'étude des extensions de *pré-solutions*. Dans ces cadres, il est supposé que les problèmes d'optimisation sont bien structurés, c'est-à-dire qu'il existe une relation d'ordre partiel sur l'ensemble des solutions réalisables. Par exemple, pour les problèmes *héréditaires* (resp., *anti-héréditaires*), la relation d'ordre sous-jacente est l'inclusion (resp., l'exclusion). Dans le cas de l'inclusion, l'objectif est d'étendre un bout de solution de manière à satisfaire un critère de robustesse donné compatible avec la relation d'ordre partielle. Le critère le plus naturel à satisfaire est la *Paréto dominance* [5], ce qui se traduit par la notion de minimalité. En d'autres termes, la suppression d'éléments d'une solution ne garantit plus sa réalisabilité. À l'opposé, le critère le plus difficile à vérifier est *l'optimalité* ou la *quasi-optimalité* [13, 18].

Dans cette thèse, nous souhaitons continuer à étudier ces deux problématiques et l'étendre à d'autres types d'ordre partiels sur l'ensemble des solutions réalisables [5, 6, 12], comme par exemple les treillis. Un exemple concret porte sur l'existence d'une couverture des arêtes par des sommets $S \subseteq V$ d'un graphe $G = (V, E)$ contenant un sous-ensemble spécifié $U \subseteq V$

et minimale vis-à-vis de l'inclusion ; En d'autres termes, nous souhaitons étendre U en une couverture minimale S . Il s'avère que ce problème de décision est **NP**-complet pour des classes de graphes très particulières comme bipartis, cubiques ou planaires, mais reste décidable en temps linéaire pour les graphes cordaux ou arc-circulaires [6]. Une caractérisation des structures interdites pour l'existence d'extensions de couvertures minimales est également proposée dans le cas des arbres dans [6]. Une telle approche mérite d'être étudiée pour l'extension d'autres problèmes. Ce cadre permet de saisir plusieurs questions intéressantes du point de vue de la théorie des graphes. Par exemple, l'existence de deux ensembles indépendants maximaux disjoint dans un graphe étudiée dans [16] peut être reformulé comme l'extension d'une couverture lorsque U est un ensemble indépendant maximal.

L'existence d'une solution réalisable minimale contenant un sous-ensemble spécifique U n'est pas toujours possible puisque le problème de décision associé est **NP**-complet. Aussi, la question de l'existence de telles extensions est intéressante et conduit à l'étude d'un nouveau type de problème d'optimisation dont l'objectif consiste à trouver un plus grand sous-ensemble de sommets U' inclus dans U permettant, en temps polynomial, d'étendre U' en une solution réalisable minimale. Cette problématique est définie dans [6] comme le *prix de l'extension*, et contient comme cas particulier, l'étude de la plus grande solution réalisable minimale [1, 4, 6, 13, 14]. Par exemple, le prix de l'extension de VC contient l'étude de l'approximation de UPPER VC comme cas particulier $U = V$ [2, 15].

Références

- [1] Cristina Bazgan, Ljiljana Brankovic, Katrin Casel, Henning Fernau, Klaus Jansen, Kim-Manuel Klein, Michael Lampis, Mathieu Liedloff, Jérôme Monnot, and Vangelis Th. Paschos. The many facets of upper domination. *Theor. Comput. Sci.*, 717 :2–25, 2018.
- [2] Nicolas Boria, Federico Della Croce, and Vangelis Th. Paschos. On the max min vertex cover problem. *Discrete Applied Mathematics*, 196 :62–71, 2015.
- [3] Endre Boros, Vladimir Gurvich, and Peter L. Hammer. Dual subimplicants of positive boolean functions. *Optimization Methods and Software*, 10(2) :147–156, 1998.
- [4] Arman Boyaci and Jérôme Monnot. Weighted upper domination number. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 62 :171–176, 2017.
- [5] Katrin Casel, Henning Fernau, Mehdi Khosravian Ghadikolaei, Jérôme Monnot, and Florian Sikora. On the complexity of solution extension of optimization problems. *CoRR*, abs/1810.04553, 2018.
- [6] Katrin Casel, Henning Fernau, Mehdi Khosravian Ghadikolaei, Jérôme Monnot, and Florian Sikora. Extension of vertex cover and independent set in some classes of graphs and generalizations. *Proc. CIAC, LNCS (to appear)*, 2019.
- [7] Peter Damaschke. Parameterized enumeration, transversals, and imperfect phylogeny reconstruction. *Theor. Comput. Sci.*, 351(3) :337–350, 2006.
- [8] Francois Delbot, Christian Laforest, and Raksmei Phan. Graphs with forbidden and required vertices. In *ALGOTEL 2015-17èmes Rencontres Francophones sur les Aspects Algorithmiques des Télécommunications Jun 2015, Beaune, France*. <hal-01148233>, 2015.
- [9] Dimitris Fotakis, Laurent Gourvès, and Jérôme Monnot. Conference program design with single-peaked and single-crossing preferences. In *Web and Internet Economics -*

12th International Conference, WINE 2016, Montreal, Canada, December 11-14, 2016, Proceedings, pages 221–235, 2016.

- [10] Petr A. Golovach, Pinar Heggernes, and Dieter Kratsch. Enumeration and maximum number of minimal connected vertex covers in graphs. *Eur. J. Comb.*, 68 :132–147, 2018.
- [11] Mamadou Moustapha Kanté and Lhouari Nourine. Minimal dominating set enumeration. In *Encyclopedia of Algorithms*, pages 1287–1291. 2016.
- [12] Kaveh Khoshkhan, Mehdi Khosravian Ghadikolaei, Jérôme Monnot, and Florian Sikora. Weighted upper edge cover : Complexity and approximability. *Proc. WALCOM, LNCS (to appear)*, 2019.
- [13] Kaveh Khoshkhan, Mehdi Khosravian Ghadikolaei, Jérôme Monnot, and Dirk Oliver Theis. Extended spanning star forest problems. In Xiaofeng Gao, Hongwei Du, and Meng Han, editors, *Combinatorial Optimization and Applications - 11th International Conference, COCOA 2017, Shanghai, China, December 16-18, 2017, Proceedings, Part I*, volume 10627 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 195–209. Springer, 2017.
- [14] David Manlove. On the algorithmic complexity of twelve covering and independence parameters of graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 91(1-3) :155–175, 1999.
- [15] Sounaka Mishra and Kripasindhu Sikdar. On the hardness of approximating some NP-optimization problems related to minimum linear ordering problem. *ITA*, 35(3) :287–309, 2001.
- [16] Oliver Schaudt. On disjoint maximal independent sets in graphs. *Inf. Process. Lett.*, 115(1) :23–27, 2015.
- [17] Zsolt Tuza. Graph colorings with local constraints - a survey. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 17(2) :161–228, 1997.
- [18] Mathias Weller, Annie Chateau, Rodolphe Giroudeau, Jean-Claude König, and Valentin Pollet. On residual approximation in solution extension problems. In *Combinatorial Optimization and Applications - 10th International Conference, COCOA 2016, Hong Kong, China, December 16-18, 2016, Proceedings*, pages 463–476, 2016.