

# Cahiers du Centre d'Etudes de Recherche Opérationnelle (Belgique), Vol. 20, no 1, 1978

ELECTRE III :

## UN ALGORITHME DE CLASSEMENTS FONDE SUR UNE REPRESENTATION FLOUE DES PREFERENCES EN PRESENCE DE CRITERES MULTIPLES

B. ROY

Professeur à l'Université Paris-IX  
Conseiller Scientifique à la SEMA

### I. DONNEES ET OBJECTIF

#### 1. Introduction

Pendant très longtemps, le seul modèle utilisé en Recherche Opérationnelle pour représenter les préférences était un unique critère appelé selon les cas fonction économique, fonction d'utilité, ... . Depuis le début des années 70, on assiste à un développement exponentiel des travaux consacrés à la prise en compte de critères multiples. Les ouvrages de Zeleny [16], Cochrane, Zeleny [1], Wallenius [15], Thiriez, Zionts [13], Zeleny [17], Keeney, Raiffa [4] permettent de se faire une idée de la diversité et de l'ampleur de ces travaux. Il ne semble pourtant qu'aucun modèle opérationnel n'ait encore tiré parti d'une représentation floue (cf [3]) des préférences en matière de critères multiples.

Le modèle de préférence proposé section II est dans la ligne de ceux que nous avons introduits en 1968 (cf. [5], et en 1973 (cf. [9]) en ce sens qu'il prend appui sur le concept de relation de surclassement (cf. [8] ou notre article dans [1]). La nouveauté consiste à représenter les préférences non plus par une relation binaire triviale mais par une relation binaire floue. Nous verrons à la section III le parti que l'on peut tirer d'une telle représentation des préférences pour ranger avec plus ou moins de rigueur les objets entre lesquels s'exercent ces préférences selon que celles-ci sont plus ou moins conformes à une structure linéaire. Il nous faut au préalable préciser d'une part quelles sont les données du modèle ELECTRE III et d'autre part les questions auxquelles il prétend apporter des éléments de réponse. Chemin faisant, on s'efforcera de situer ce nouveau modèle par rapport à ELECTRE I et ELECTRE II (voir par exemple à leur sujet [12], [9]).

#### 2. Les données

Soit  $A$  un ensemble dont les éléments seront appelés *actions potentielles*. Concrètement, une action potentielle peut, selon les cas, correspondre à un plan, un projet, un fragment de programme, une variante, un dossier, un produit, un candidat, ... pris en compte comme objet de décision (cf. [7]). Comme à l'habitude en Recherche Opération-

Si les deux préordres sont identiques ou "très voisins", on aura tout lieu de penser que le rangement ainsi obtenu est véritablement significatif. S'ils diffèrent par trop, il y aura lieu de repérer celles des actions dont la position relative diffère fortement selon que l'on considère l'un ou l'autre de ces préordres. Dans ce cas on conclura que les données de préférence ne permettent pas de ranger clairement de telles actions. On pourra chercher à préciser leur place par un intervalle défini par des positions extrêmes. Le rangement final sera alors plus nuancé qu'un simple préordre.

De façon plus précise, notons :

$$\left. \begin{aligned} \bar{P} &= \bar{C}_1, \dots, \bar{C}_h, \dots, \bar{C}_r \\ \underline{P} &= \underline{C}_s, \dots, \underline{C}_k, \dots, \underline{C}_1 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

les deux préordres obtenus. Considérons une action  $a \in \bar{C}_h$  et une action  $b$  appartenant à la même classe ou à une classe postérieure. Si dans  $\underline{P}$  la position relative de ces deux actions est la même, c'est-à-dire si  $b$  figure, soit dans la même classe que  $a$ , soit dans une classe postérieure, alors on sera en droit de considérer que la position relative de ces deux actions est bien établie. Si en revanche il en était autrement, il serait difficile de dire si  $a$  mérite ou non d'être classée au moins aussi bien que  $b$ .

De façon plus générale, l'intersection des 2 préordres  $\bar{P}$  et  $\underline{P}$  définit un préordre partiel qui synthétise précisément tous les points d'accord entre les 2 préordres. Selon que ce préordre partiel est plus ou moins riche, les 2 préordres sont plus ou moins en accord. A la limite, si  $\bar{P} = \underline{P}$ , l'intersection sera elle aussi un préordre complet.

Posons

$$\left. \begin{aligned} |\bar{C}_h| &= \bar{c}_h \text{ et } |\underline{C}_k| = \underline{c}_k \\ a \in \bar{C}_h &\Rightarrow \bar{r}(a) = 1 + \bar{c}_1 + \dots + \bar{c}_{h-1} \\ a \in \underline{C}_k &\Rightarrow \underline{r}(a) = 1 + \underline{c}_s + \dots + \underline{c}_{k+1} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

On peut toujours déduire de  $\bar{P}$  et  $\underline{P}$  un préordre complet intermédiaire  $P$  qui consiste à ranger les actions conformément aux valeurs croissantes de la somme  $\bar{r}(a) + \underline{r}(a)$ . Le rangement final peut, par exemple, être constitué par :

- ce préordre complet  $P$
- nuancé  $\forall a \in A$  par l'intervalle  $[\bar{r}(a), \underline{r}(a)]$ .

Il est facile de vérifier que ce préordre  $P$  est compatible avec le préordre partiel  $\bar{P} \cap \underline{P}$ .

Notons enfin, qu'en pratique, il est souvent inutile de chercher à ranger tous les éléments de  $A$  : ceux qui sont suffisamment en queue n'ont pas à être départagés. Pour cette raison, les formules (3) peuvent ne concerner qu'un sous-ensemble  $A' \subset A$ , celui-ci n'étant cependant pas connu au départ.

## II. MODELISATION DES PREFERENCES

### 1. Relation de surclassement triviale et de surclassement floue

Le concept de surclassement s'introduit naturellement lorsqu'on accepte une modélisation des préférences qui n'est que partielle et qui ne porte que sur la part des préférences que l'on est en mesure d'asseoir avec une objectivité et une sécurité jugées suffisantes (cf. tableau 1). Cette modélisation doit évidemment prendre appui sur les  $n$  valeurs prises par les critères et tenir compte de la signification réelle de ces valeurs (phénomènes de seuils). Elle doit en outre être adaptée à :

- l'hétérogénéité éventuelle des critères (s'exprimant en francs, minutes, nombre d'habitants, degré de similarité, ...);
- des modalités complexes et souvent floues qui, au yeux du décideur, font qu'une série d'améliorations sur un groupe de critères peuvent être ou non compensées par une série de détériorations sur un autre groupe.

Pour qu'il en soit ainsi, des situations d'incomparabilité et d'intransitivité doivent trouver place dans le modèle. C'est précisément cette nécessité qui fut à l'origine de la notion de surclassement.

Le terme *surclassement* englobe, sans les différencier, des situations de préférence stricte, de préférence faible et d'indifférence (cf. tableau 1). Par définition, étant donné deux actions potentielles  $a$  et  $a'$  :

-  $a'$  surclasse  $a$  lorsque les données disponibles (principalement  $g(a)$  et  $g(a')$ ), compte tenu de leur niveau de signification, justifient la proposition " $a'$  est au moins aussi bon que  $a$ ";

-  $a'$  ne surclasse pas  $a$  lorsque les données sont jugées insuffisantes pour justifier la proposition " $a'$  au moins aussi bon que  $a$ , qu'il existe ou non des arguments militant en faveur de la proposition : " $a$  au moins aussi bon que  $a'$ ".

Faisons observer que l'indifférence entre  $a$  et  $a'$  conduit au double surclassement de  $a'$  par  $a$  et de  $a$  par  $a'$  alors que l'incomparabilité conduit à l'absence de surclassement entre ces deux actions.

Une fois les conditions d'un tel surclassement précisées, les préférences se trouvent modélisées par une relation binaire triviale  $S_A$  définie sur  $A$ . Nous l'appellerons *relation de surclassement triviale*.

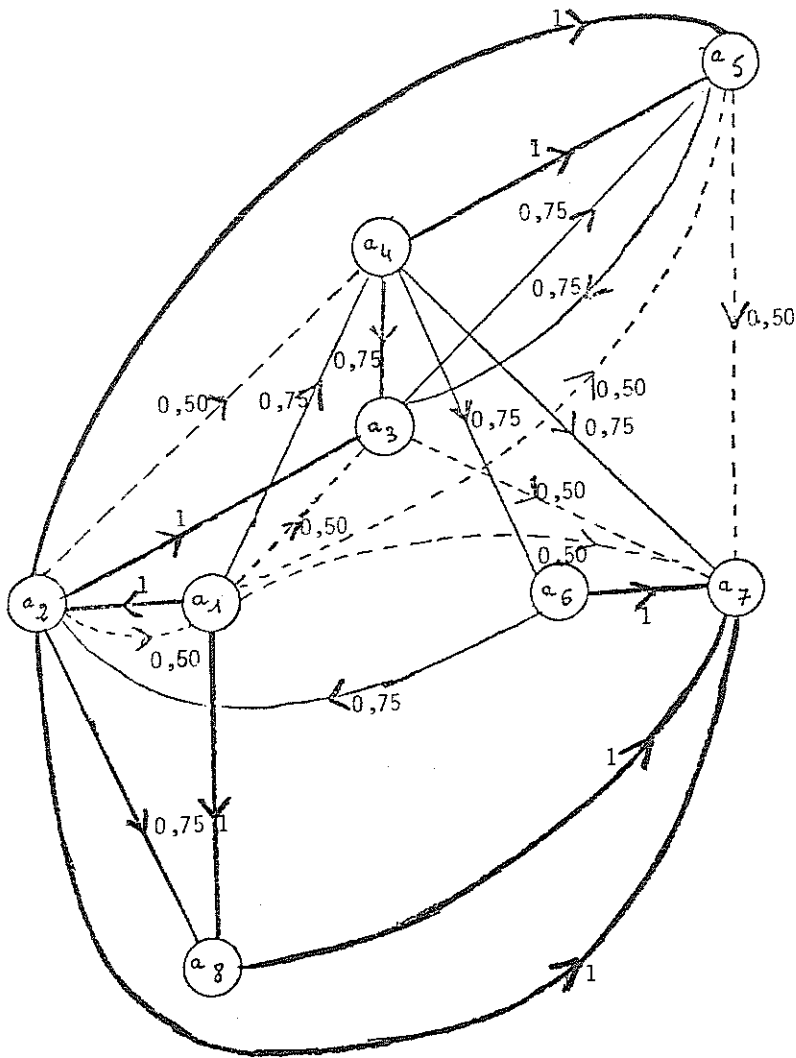
Dans le cadre d'une modélisation ainsi conçue, on peut être plus ou moins exigeant (prendre plus ou moins de risques) pour accepter le surclassement, d'où le concept de relation de surclassement floue introduit ci-après.

Une *relation de surclassement floue*  $S_A^d$  est caractérisée par la définition d'un degré de surclassement  $d$  associant à tout couple  $a', a$ , un nombre  $d(a', a)$  :  $d$  étant un critère destiné à repérer la plus ou moins grande crédibilité du surclassement de  $a$  par  $a'$ . De façon plus précise, ce degré de crédibilité doit posséder les propriétés suivantes :

*Propriété 1* : le nombre  $d(a', a)$  ne fait intervenir  $a'$  et  $a$  qu'au travers des vecteurs  $g(a')$  et  $g(a)$  :  $d(a', a) = d[g(a'), g(a)]$ ;  $d(a', a)$  peut en outre faire intervenir d'autres actions de  $A$ .

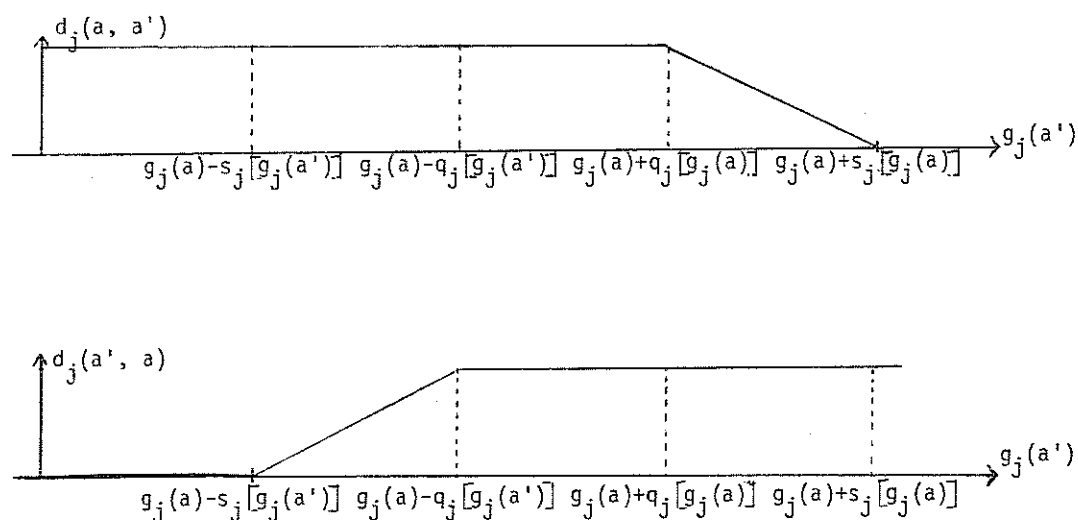
D'après la propriété 2,  $d_j(a, a')$  croît de 0 à 1 lorsque  $g_j(a')$  décroît de  $g_j(a) + s_j[g_j(a)]$  à  $g_j(a) + q_j[g_j(a)]$ . N'importe quelle fonction monotone non décroissante peut évidemment être utilisée pour lever cette indétermination; nous proposons ici d'adopter tout simplement une formule d'interpolation linéaire (cf. figure 2).

Figure 1 : Exemple de graphe valué associé à une relation de surclassement floue



L'arc  $(a_i, a_j)$  a pour valeur  $d(a_i, a_j)$ ; lorsque le degré de crédibilité du surclassement est nul, l'arc correspondant n'est pas dessiné.

Figure 2 : Valeurs de  $d_j(a, a')$  et  $d_j(a', a)$   
en fonction de  $g_j(a')$



Les considérations qui précèdent peuvent être résumées dans la formule suivante (voir figure 3) :

si  $s_j[g_j(a)] \neq q_j[g_j(a)]$

$$d_j(a, a') = \frac{s_j[g_j(a)] - \text{Min} [g_j(a') - g_j(a), s_j[g_j(a)]]}{s_j[g_j(a)] - \text{Min} [g_j(a') - g_j(a), q_j[g_j(a)]]}$$

si  $s_j[g_j(a)] = q_j[g_j(a)]$

$$d_j(a, a') = \begin{cases} 1 & \text{lorsque } g_j(a') \leq g_j(a) + q_j[g_j(a)] \\ 0 & \text{lorsque } g_j(a') > g_j(a) + q_j[g_j(a)] \end{cases}$$

(cette formule est valable pour  $g_j(a') < g_j(a)$ ).

grand. Ce seuil marque la limite au-delà de laquelle on estime que "l'opposition" du critère  $g_j$  à la proposition "a est au moins aussi bon que a'" est jugée suffisamment "violente" pour motiver le rejet de cette proposition (sans que cela influence la crédibilité de la proposition "a' est au moins aussi bon que a"). Il découle de cette définition que, quel que soit  $C(a, a')$  :

$$g_j(a') \geq g_j(a) + v_j[g_j(a)] \Rightarrow d(a, a') = 0.$$

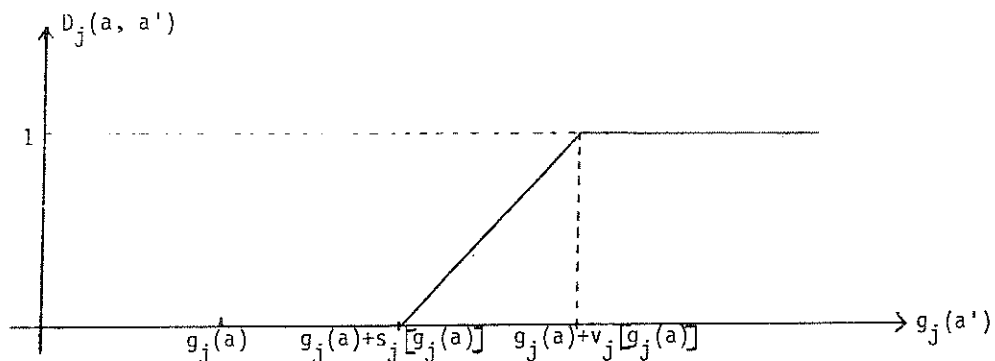
On est alors fondé à apprécier l'intensité de la discordance du critère  $g_j$  pour le couple  $a, a'$  à l'aide d'un indice  $D_j(a, a')$  qui :

- soit une fonction monotone non décroissante de  $g_j(a')$  ;
- vérifie  $D_j(a, a') \cdot d_j(a, a') = 0$  ;
- plafonne à la valeur 1 lorsque  $g_j(a') \geq g_j(a) + v_j[g_j(a)]$ .

La valeur de cet indice dans l'intervalle  $]g_j(a) + s_j[g_j(a)], g_j(a) + v_j[g_j(a)]$  n'est pas déterminée par ce qui précède. Nous la fixerons par interpolation linéaire (cf. figure 4) et adopterons la formule suivante :

$$D_j(a, a') = \text{Min} \left[ 1, \text{Max} \left[ 0, \frac{g_j(a') - g_j(a) - s_j[g_j(a)]}{v_j[g_j(a)] - s_j[g_j(a)]} \right] \right] \quad (7)$$

Figure 4 : Valeurs de  $D_j(a, a')$  en fonction de  $g_j(a')$



### 3.3. Définition du degré de crédibilité.

Observons tout d'abord que :

$$C(a, a') = 1 \Rightarrow \begin{cases} d_j(a, a') = 1 & \forall j \in F \\ D_j(a, a') = 0 & \forall j \in F \end{cases} .$$

Dans ces conditions, il est normal de poser :

$$d(a, a') = C(a, a') .$$

Plus généralement, si aucun critère n'est en discordance avec le surclassement de  $a'$  par  $a$ , il vient  $d_j(a, a') \neq 0 \quad \forall j \in F$  et il est encore normal de poser :

$$d(a, a') = C(a, a')$$

car l'indice de concordance est un bon reflet de la crédibilité du surclassement.

Examinons maintenant les cas où il existe  $j \in F$  tel que  $D_j(a, a') \neq 0$ . Le poids  $p_j$  d'un tel critère ne contribue plus à la somme  $C(a, a')$  (cf. formule (6)); en cela, le caractère discordant de  $g_j$  affecte l'indice de concordance. C'est pourquoi, aussi longtemps que les indices de discordance ont des valeurs faibles eu égard à celle de l'indice de concordance, ce dernier continue à fournir un reflet correct de la crédibilité du surclassement. On posera donc :

$$d(a, a') = C(a, a') \text{ si } D_j(a, a') \leq C(a, a') \quad \forall j \in F .$$

Considérons enfin le cas où certains critères font apparaître une discordance significative eu égard à la valeur de la concordance, c'est-à-dire telle que  $D_j(a, a') > C(a, a')$ . Supposons tout d'abord que le critère  $g_j$  soit le seul dans ce cas et examinons comment doit normalement varier la crédibilité du surclassement en fonction de  $D_j(a, a')$ . Il découle de ce qui précède que :

- pour  $D_j(a, a') = C(a, a')$  :  $d(a, a') = C(a, a') < 1$  ;
- pour  $D_j(a, a') = 1$  :  $d(a, a') = 0$  (cf. définition du seuil de veto).

De plus, d'après la propriété 2,  $d(a, a')$  est une fonction non croissante de  $g_j(a')$ , donc également de  $D_j(a, a')$ . Si l'on admet une fois de plus une décroissance linéaire, il vient :

$$d(a, a') = C(a, a') \cdot \frac{1 - D_j(a, a')}{1 - C(a, a')} .$$

Lorsqu'il existe plusieurs critères significativement discordants, il est naturel d'admettre que leurs effets se conjuguent pour affaiblir le degré de crédibilité. On aboutit finalement à la formule suivante pour définir le degré de crédibilité :

$$\text{si } \overline{F}(a, a') = \{j / j \in F, D_j(a, a') > C(a, a')\} = \emptyset$$

$$d(a, a') = C(a, a')$$

(8)

formation qu'apporte la relation floue, ce seuil est fixé, non pas a priori (une fois pour toutes) mais en fonction de paliers successifs déterminés par l'état d'avancement de la procédure.

Notons  $\lambda_0$  la valeur maximum qu'atteint le degré de crédibilité. Soit  $D_1$  le sous-ensemble des actions de  $A$  ayant une  $\lambda_1$ -qualification maximum lorsque l'on fixe  $\lambda$  à un premier palier :  $\lambda_1 = \lambda_0 - s(\lambda_0)$ . Les actions de  $D_1$  peuvent être perçues comme celles qui sont candidates pour constituer la première classe de l'un des deux préordres cherchés (cf. I §3). Ces actions peuvent être départagées en reconsidérant leur  $\lambda$ -qualification, après avoir abaissé  $\lambda$  jusqu'à un second palier  $\lambda_2 < \lambda_1$ . Pour fixer ce nouveau palier, on introduit (cf. §2.1) un concept de *niveau de séparation*. La procédure conduit à restreindre la famille des candidats de la première classe à un sous-ensemble  $D_2 \subset D_1$ .

Le processus itératif consistant à rechercher un sous-ensemble d'actions de plus en plus réduit, ayant une qualification maximum pour des paliers de plus en plus bas, sera appelé *distillation descendante*. Le point de départ de la première distillation descendante est l'ensemble  $A$  tout entier. Celle-ci est régie par les formules des §2.2 et 2.3 ci-après; son point d'arrêt est le *distillat final* auquel elle aboutit (cf. §2.4). Il définit la première classe  $\bar{C}_1$  du préordre  $\bar{P}$ . Une seconde distillation descendante ayant pour point de départ le sous-ensemble  $B = A \setminus \bar{C}_1$  conduira à la seconde classe de  $\bar{P}$ . On définit ainsi une *chaîne de distillations descendantes* qui s'interrompt lorsque la dernière classe  $\bar{C}_r$  a été identifiée. Rien ne s'oppose évidemment à ce que cette chaîne de distillations descendantes soit interrompue avant, dans la mesure où la queue de classement est dépourvue d'intérêt, (cf. I §3).

Au lieu de rechercher sans cesse la première classe du sous-ensemble  $B$  des actions non encore classées en s'intéressant aux  $\lambda$ -qualifications maximum, il est tout aussi naturel de progresser en recherchant la dernière classe des actions non encore classées, en prenant appui sur les actions de  $\lambda$ -qualification minimum. Ceci conduit à définir une *distillation ascendante* et à enchaîner ces distillations ascendantes de façon à construire le second préordre (cf. formule (3)). Si la chaîne de distillations descendantes n'a concerné qu'un sous-ensemble  $A' \subset A$ , alors la chaîne de distillations ascendantes doit être restreinte au même sous-ensemble  $A'$ .

## 2. Description de l'algorithme

### 2.1. Concepts et formules de base.

Définissons tout d'abord  $\forall \lambda \in [0, 1]$  et  $\forall B \subset A$  :

- la  $\lambda$ -puissance de  $a$  dans  $B$  ( $\forall a \in B$ ) :

$$P_B^\lambda(a) = |\{b \mid b \in B, d(a, b) > \lambda, d(a, b) > d(b, a) + s[d(a, b)]\}| \quad (10)$$

Il s'agit donc du nombre des éléments qui, dans  $B$  sont surclassés par  $a$  significativement plus fortement qu'ils ne surclassent  $a$  et ce avec une crédibilité strictement supérieure à  $\lambda$  ;

- la  $\lambda$ -faiblesse de  $a$  dans  $B$  ( $\forall a \in B$ ) :



$$f_B^\lambda(a) = |\{b \mid b \in B, d(b, a) > \lambda, d(b, a) > d(a, b) + s[d(b, a)]\}| \quad (11)$$

Il s'agit donc du nombre des éléments qui, dans B, surclassent a significativement plus fortement que a ne les surclasse et ce avec une crédibilité strictement supérieure à  $\lambda$ .

Il résulte de ces définitions que plus la  $\lambda$ -puissance d'un élément est grande et plus il doit venir en tête dans le classement. Au contraire, plus la  $\lambda$ -faiblesse d'un élément est grande et plus il doit venir en queue dans le classement. En particulier, si  $S_A^d$  se réduit à une relation binaire triviale définissant un préordre complet sur A, celui-ci peut être obtenu (quel que soit  $\lambda$ ) aussi bien en classant les éléments de A :

- par puissance décroissante;
- par faiblesse croissante;
- par qualification décroissante.

Pour les besoins de l'algorithme, le concept de  $\lambda$ -qualification annoncé au §1 ci-dessus mérite d'être défini pour un sous-ensemble quelconque  $B \subset A$ . Définissons donc la  $\lambda$ -qualification de a dans B ( $\forall a \in B$ ) par :

$$q_B^\lambda(a) = p_B^\lambda(a) - f_B^\lambda(a) \quad (12)$$

On remarquera sur l'exemple précédent que l'indicateur qu'est la qualification présente toujours un écart plus grand entre deux classes consécutives que celui obtenu à propos de ces mêmes classes avec l'indicateur de puissance ou avec l'indicateur de faiblesse. Lorsque les classes ne sont pas aussi clairement séparées et ordonnées qu'elles le sont dans un préordre complet, il est évidemment préférable, pour les séparer et les ordonner, de prendre appui sur le concept le plus discriminant, autrement dit sur la  $\lambda$ -qualification.

Pour les raisons exposées au §1 ci-dessus, l'algorithme procède en abaissant progressivement un seuil  $\lambda$  depuis 1 jusqu'à 0 en passant par des paliers successifs dont la valeur n'est pas pré-déterminée mais dépend des valeurs effectivement prises par le degré de crédibilité. La détermination de ces paliers successifs repose sur un concept de niveau de séparation.

Le niveau de séparation dans B à partir de la valeur  $\lambda$  est défini par :

$$d_B^\lambda = \begin{cases} \text{Max}_{a, b \in \Lambda} d(a, b) & \text{si } \Lambda = \{(a, b) \mid a, b \in B, d(a, b) < \lambda\} \neq \emptyset \\ 0 & \text{si } \Lambda = \emptyset \end{cases} \quad (13)$$

La détermination des paliers successifs résulte (cf. §2.2 et 2.3) d'une application itérative de cette formule à partir d'une valeur initiale :

$$\lambda_0(B) = \text{Max}_{a, b \in B} d(a, b) \quad (14)$$

### 2.2. Obtention du premier distillat de $B \subset A$ .

Le point de départ  $B$  de chaque distillation est défini (cf. §1 et 2.4) en fonction du résultat des distillations précédentes.

a) Distillation descendante de  $B$

Calculer :

$$\lambda_1 = d_B^{\lambda_0(B) - s[\lambda_0(B)]} \quad (\text{cf. formules (13) et (14)})$$

$$q_B^{\lambda_1}(a) \quad \forall a \in B \quad (\text{cf. formules (10), (11) et (12)})$$

$$\bar{q} = \max_{a \in B} q_B^{\lambda_1}(a) .$$

Poser :

$$D_1 = \{a \mid a \in B, q_B^{\lambda_1}(a) = \bar{q}\}$$

$D_1$  est le premier distillat dans la distillation descendante de  $B$ . Il est associé au palier  $\lambda_1$ .

b) Distillation ascendante de  $B$

On procède de la même façon à ceci près que, dans la définition de  $D_1$ ,  $\bar{q}$  doit être remplacé par  $q$  défini comme suit :

$$q = \min_{a \in B} q_B^{\lambda_1}(a)$$

$D_1$  est alors le premier distillat dans la distillation ascendante de  $B$ . Il est associé au palier  $\lambda_1$ .

### 2.3. Passage du $k$ ème au $k + 1$ ème distillat.

Soit  $\lambda_k$  le palier associé au distillat  $D_k$  obtenu dans une distillation descendante ou ascendante dont le point de départ est ici sans importance.

Calculer :

$$\lambda_{k+1} = d_{D_k}^{\lambda_k - s(\lambda_k)} \quad (\text{cf. formule (13)})$$

$\lambda_{k+1}$  est le palier associé au  $k + 1$ ème distillat

$$q_{D_k}^{\lambda_{k+1}}(a) \quad \forall a \in D_k \quad (\text{cf. formules (10), (11), (12)})$$

puis :

a) si la distillation est descendante :

$$D_{k+1} = \{a \mid a \in D_k, q_{D_k}^{\lambda_{k+1}}(a) = \bar{q}\} \quad \text{avec } \bar{q} = \max_{a \in D_k} q_{D_k}^{\lambda_{k+1}}(a)$$

b) si la distillation est ascendante :

$$D_{k+1} = \{a \mid a \in D_k, q_{D_k}^{\lambda_{k+1}}(a) = \underline{q}\} \quad \text{avec} \quad \underline{q} = \min_{a \in D_k} q_{D_k}^{\lambda_{k+1}}(a)$$

#### 2.4. Conditions d'arrêt de chaque distillation et enchaînement des distillations.

Chaque distillation s'achève dès que l'une des deux conditions suivantes devient vérifiée :

$$\lambda_k = 0, \quad |D_k| = 1.$$

Dans les deux cas,  $D_k$  est le distillat final de la distillation considérée.

Soit  $B$  le sous-ensemble de  $A$ , point de départ de la distillation (descendante ou ascendante) qui s'achève. Ce sous-ensemble est nécessairement de la forme :

$$B = A \setminus (C_1^* \cup \dots \cup C_h^*)$$

où  $C_1^*, \dots, C_h^*$  sont les distillats finals préalablement obtenus dans le cadre de la chaîne de distillations en cours (descendante ou ascendante - cf. III §1). Il vient :

$$C_{h+1}^* = D_k \quad (C^* \text{ mis pour } \bar{C} \text{ ou } \underline{C} \text{ selon le sens de la distillation}).$$

Si  $A \setminus (C_1^* \cup \dots \cup C_{h+1}^*) \neq \emptyset$ , ce sous-ensemble de  $A$  constitue le point de départ de la distillation suivante effectuée toujours dans le même sens, descendant ou ascendant. Si cet ensemble est vide, la chaîne de distillations est achevée. Rappelons (cf. III §1) que l'on peut interrompre plus tôt la chaîne descendante, la chaîne ascendante pouvant alors être entreprise à partir du sous-ensemble  $A'$  défini par la réunion des distillats finals de la chaîne descendante.

### 3. Préordres finals : commentaires et exemple.

Ayant posé  $B = A$  au départ de la chaîne de distillations descendantes, on est parvenu, au terme de celle-ci, à une suite ordonnée  $\bar{P}$  de distillats finals :

$$\bar{C}_1, \dots, \bar{C}_h, \dots, \bar{C}_r$$

qui forment une partition de  $A$  (ou de  $A' \subset A$ ) et qui constituent les  $r$  classes successives du premier des préordres cherchés (le classement étant ici fondé sur la recherche d'une qualification décroissante - cf. III §1).

Ayant de même posé  $B = A$  (ou  $A' \subset A$ ) au départ de la chaîne de distillation ascendante, on est parvenu, au terme de celle-ci, à une suite ordonnée  $\underline{P}$  de distillats finals :

$$\underline{C}_s, \dots, \underline{C}_h, \dots, \underline{C}_1$$

qui forment également une partition de  $A$  (ou de  $A'$ ) et qui constituent les  $s$  classes successives du second préordre cherché (le classement étant ici fondé sur la recherche d'une qualification croissante - les classes étant obtenues conformément à l'ordre croissant des indices).

Les deux préordres ne sont identiques que si  $r = s$  et :

$$\bar{C}_1 = \underline{C}_s, \dots, \bar{C}_r = \underline{C}_1.$$

Rappelons que le préordre partiel intersection de ces deux préordres complets est révélateur de celles des comparaisons que l'on est en droit de considérer comme bien établies sur la base des données disponibles. D'autre part, un préordre complet intermédiaire  $P$  (entre  $\bar{P}$  et  $\underline{P}$ ) peut toujours être construit (cf. I §3). Il sera d'autant plus significatif que  $\bar{P}$  et  $\underline{P}$  différeront peu (l'indice de corrélation des rangs de Kendall peut en particulier être utilisé pour apprécier la proximité de  $\bar{P}$  et  $\underline{P}$ ).

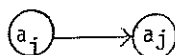
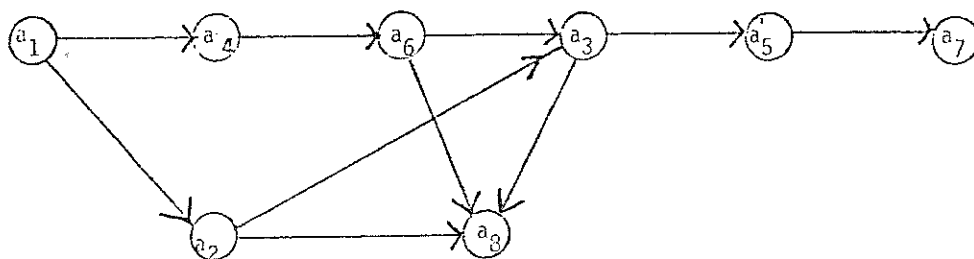
Posons  $s(\lambda) = 0,15$  et appliquons l'algorithme proposé à l'exemple de la figure 1. On obtient :

$$\bar{P} = \{a_1\}, \{a_2\}, \{a_4\}, \{a_6, a_8\}, \{a_3, a_5\}, \{a_7\}$$

$$\underline{P} = \{a_1\}, \{a_4\}, \{a_6\}, \{a_2\}, \{a_3, a_8\}, \{a_5\}, \{a_7\}.$$

L'intersection de ces 2 préordres complets est un préordre partiel représenté figure 5. Aucun préordre complet ne s'impose compte tenu de l'information disponible : si l'ordre  $a_1, a_4, a_6, a_3, a_5, a_7$  ne prête guère à discussion, la position de  $a_2$  est relativement mal déterminée entre  $a_1$  et  $a_3$  ; de même  $a_8$  vient sûrement après  $a_2$  mais peut être classée soit ex aequo avec  $a_6$ , soit ex aequo avec  $a_3$ , soit entre  $a_6$  et  $a_3$ .

Figure 5 : Préordre partiel auquel conduit l'application d'ELECTRE III aux données de la figure 1 pour  $s(\lambda) = 0,15$



signifie  $a_i$  est classée dans  $\bar{P}$  et dans  $\underline{P}$  dans une classe qui n'est pas postérieure à celle où est classée  $a_j$ .

Le rangement final auquel conduisent les formules (3) et les considérations qui les suivent est le suivant :

$a_1, a_4, a_2, a_6, a_8, a_3, a_5, a_7$   
[1,1] [3,2] [2,4] [4,3] [4,5] [6,5] [6,7] [8,8]

Faisons observer que, sur cet exemple, les précautions prises pour déterminer les paliers successifs, non pas a priori (cf. III §1) mais par le jeu des formules (13) et (14), peuvent sembler superflues. Pour comprendre la raison d'être de ces formules, il suffit de reconsidérer l'exemple de la figure 1 après avoir très légèrement modifié certaines des valeurs de façon à les diversifier (10 ou 15 valeurs distinctes au lieu de 4). Que les valeurs prises par le degré de crédibilité découlent ou non des formules (5) à (8), il importe que  $\bar{P}$  et  $\underline{P}$  restent invariants devant de légères perturbations. Il ne pourrait en être ainsi avec une série de paliers déterminés indépendamment des valeurs réellement prises par  $d(a, b)$ .

Indiquons pour terminer que diverses applications d'ELECTRE III à des problèmes réels sont actuellement en cours.

#### REFERENCES

- [1] COCHRANE, J.L., ZELENY, M. (Editors), "Multiple criteria decision making". Proceedings of the Seminar on Multiple Decision Making, Columbia, S.C. October 26-27, 1972. Columbia, University of South Carolina Press, 1973.
- [2] JACQUET-LAGREZE, E., "La modélisation des préférences - Préordres, quasi-ordres et relations floues". Thèse Université Paris V, juin 1975.
- [3] KAUFMANN, A., *Introduction à la théorie des sous-ensembles flous - Tome 1 : Eléments théoriques de base*. Masson, 1973.
- [4] KEENEY, R.L., RAIFFA, H., *Conflicting objectives*. John Wiley 1977.
- [5] ROY, B., "Classements et choix en présence de critères multiples (la Méthode ELECTRE)", *RIRO*, 8, 1968K.
- [6] ROY, B. "Critères multiples et modélisation des préférences : l'apport des relations de surclassement", *Revue d'Economie Politique*, 84, n°1, janvier-février 1974.
- [7] ROY, B., "Vers une méthodologie générale d'aide à la décision", *Revue METRA*, XIV, n°3, 1975.
- [8] ROY, B., "A conceptual framework for a normative theory of "decision-aid", *Management Science*, Special Issue on Multiple Criteria Decision Making, 1976.

- [9] ROY, B., BERTIER, P., "La méthode ELECTRE II, une application au média-planning". Communication présentée à la Sixième Conférence Internationale de Recherche Opérationnelle, Dublin, août 1972. M. Ross Editor, OR 72, North-Holland Publishing Company, 1973.
- [10] ROY, B., BOULVIN, Y., JACQUET-LAGREZE, E., BLANCHER, M., GODARD, X, "Elaboration de critères permettant une intégration des divers aspects liés au temps dans l'aide à la décision en matière de transports (1e phase)". DGRST-SAEI, ATP Socio-Economie des Transports, 1975.
- [11] ROY, B., JACQUET-LAGREZE, E., BLANCHER, M., "Elaboration de critères permettant une intégration des divers aspects liés au temps dans l'aide à la décision en matière de transports (2e phase)". DGRST-SAEI, ATP Socio-Economie des Transports, 1977.
- [12] ROY, B., VINCKE, P., BRANS, J.P., "Aide à la décision multicritère", *Revue Belge de Statistique, d'Informatique et de Recherche Opérationnelle*, 15, N°4 (1975).
- [13] THIRIEZ, M. (ED), ZIONTS, S., "Multiple criteria decision making", Proceedings of a conference held at Jouy-en -Josas, May 21-23, 1975. Springer-Verlag, 1976
- [14] VINCKE, P., "Quasi-ordres généralisés et modélisation des préférences", Université Paris IX-Dauphine, *Cahier LAMSADE*, 9, avril 1977.
- [15] WALLENIUS, J., "Comparative evaluation of some interactive approaches to multi-criterion optimization". European Institute for Advanced Studies in Management, 1974.
- [16] ZELENY, M., *Linear multiobjective programming*. Springer-Verlag, 1974.
- [17] ZELENY, M., *Multiple criteria decision making*. Kyoto, 1975. Springer-Verlag, 1976.