Validation Empirique d'une Procédure de Désagrégation pour la Méthode Electre Tri

V. MOUSSEAU¹ and J. FIGUEIRA²

Résumé : La problématique de tri consiste à affecter les actions d'un ensemble A à une des catégories prédéfinies. Dans cet article, nous considérons la méthode ELECTRE TRI qui requiert l'évaluation de paramètres préférentiels en vue de construire le modèle de préférences du décideur (DM). Une évaluation directe de ces paramètres fait reposer sur le DM une charge cognitive importante. Une approche d'agrégation-désagrégation qui infère les paramètres indirectement permet de déterminer les paramètres d'ELECTRE TRI qui restituent au mieux les exemples d'affectation.

Dans cet article, nous considérons le sous-problème visant à inférer uniquement les poids des critères. Des expériences numériques sont conduites pour évaluer la qualité de la procédure d'inférence. Les résultats montrent que l'outil est capable d'inférer des coefficients d'importance qui restituent de manière stable les exemples d'affectation et permet d'identifier des "incohérences" dans les exemples donnés par le DM.

Mots-Clés: Problématique de tri, Désagrégation de préférences, Poids, Expériences numériques

Abstract : The sorting (or assignment) problem consists in the assignment of each alternative of a finite set A to one of the pre-defined categories. In this paper, we consider the method ELECTRE TRI that requires the elicitation of preferential parameters in order to construct a preference model that the Decision-Maker (DM) accepts as a working hypothesis. A direct elicitation of these parameters requiring a high cognitive effort from the DM. An aggregation-disaggregation approach that infers the parameters indirectly that best reconstitute the assignment examples.

In this paper, we consider the subproblem of the determination of the weights only. Numerical experiments were conducted so as to check the abilities of this disaggregation tool. Results showed that this tool is able to infer weights that reconstitute in a stable way the assignment examples and that it is able to identify "inconsistencies" in the assignment examples

Keywords: Sorting problem statement, Preference desaggregation, Weights, Numerical experiments

1. Introduction

Lorsque l'on cherche à modéliser un problème de décision dans un contexte réel, il arrive d'être confronté à des situations dans lesquelles la décision peut être formulée en termes d'affectation d'un ensemble d'actions $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ à une des catégories pré-définies. L'affectation d'une action a à une catégorie appropriée doit reposer sur la valeur intrinsèque de l'action a (et non pas sur la comparaison de a avec les autres actions de A).

Dans cet article, nous nous intéressons à la problématique du tri multicritère et, plus précisément, à une méthode multicritère existante appelée ELECTRE TRI (cf. [Yu92a], [Yu92b] et [RB93]). Lorsqu'il met en œuvre cette méthode, l'analyste doit fixer les valeurs de divers paramètres (profils définissant les limites entre les catégories, les poids des critères, des seuils de discrimination,...). L'ensemble π de ces paramètres est utilisé pour construire un modèle de préférences que le décideur (DM) accepte comme hypothèse de travail au cours de l'étude d'aide à la décision. Excepté dans des

¹ LAMSADE, Université Paris Dauphine, Place du Maréchal De Lattre de Tassigny, 75775 Paris cedex 16, France, tel: (33) 01-44-05-44-01, fax: (33) 01-44-05-40-91, e-mail: mousseau@lamsade.dauphine.fr

² School of Economics, University of Coimbra, Av. Dias da Silva 165, 3004-512 Coimbra Portugal, tel: (351) 39-790-590, fax: (351) 3T4035-11, e-mail: figueira@fe.uc.pt

cas très spécifiques, il est irréaliste de supposer que le DM est à même de fournir explicitement des valeurs pour chacun des paramètres de π . Ces valeurs sont très éloignées des termes naturels dans lesquels le DM exprime habituellement ses préférences et son expertise.

Une approche plus réaliste consiste à inférer les valeurs des paramètres du modèle ELECTRE TRI en analysant des exemples d'affectation fournis par le DM, i.e., une information hollistique concernant ses jugements. Cette approche vise donc à obtenir des exemples d'affectation plutôt que de recourir à l'élicitation directe des paramètres du modèle. Les valeurs des paramètres sont inférées à travers une certaine forme de régression sur les exemples d'affectation.

[MS98] ont proposé une approche en vue d'inférer tous les paramètres d'ELECTRE TRI simultanément à partir d'exemples d'affectation. Dans cette approche, la détermination des valeurs des paramètres qui "collent" le mieux aux exemples d'affectation fournis par le DM résulte de la résolution d'un programme mathématique non-linéaire. Cette procédure d'optimisation est intégrée à un outil interactif qui permet au DM (ou à toute autre personne agissant en son nom) de réagir sur le jeu de paramètres obtenu et d'obtenir un nouvel éclairage de ses préférences.

Bien que [MS98] propose d'inférer simultanément les poids des critères, les profils limitant les catégories et les seuils de discrimination, nous ne considérons, dans cet article, que le problème de l'inférence du vecteur poids (dans ce cas particulier, le programme mathématique à résoudre est linéaire). Cet article présente des résultats numériques obtenus dans une expérience de laboratoire visant à valider l'utilité pratique de la procédure d'inférence des poids dans le contexte d'un processus interactif (des résultats préliminaires peuvent être trouvés dans [Nau96]) Les questions expérimentales soulevées sont les suivantes (ces questions sont rendues opérationnelles par le plan d'expérience décrit en section 5):

- Soit ω^{opt} le vecteur poids obtenu en utilisant la procédure d'optimisation linéaire sur la base de l'affectation aux catégories des actions d'un ensemble $A^* \subset A$. Soit ω^{dm} un vecteur poids donné intuitivement par le DM ou inféré par l'analyste à partir d'affirmations du DM sur les poids. Les affectations des actions de A^* sont-elles plus "stables" lorsque l'on utilise ω^{opt} que lorsque l'on considère ω^{dm} (le terme stable est utilisé ici comme invariabilité des affectations à des modifications du jeu de poids). En d'autres termes, la procédure d'optimisation permet-elle d'accroître la stabilité des affectations des actions de A^* ?
- Le jeu de poids obtenu ω^{opt} dépend de l'information donnée en entrée, i.e., de l'ensemble des exemples d'affectation. Quelle est la quantité moyenne d'information nécessaire pour "calibrer" le modèle de manière satisfaisante? Quelle taille doit avoir l'ensemble A^* pour dériver ω^{opt} d'une manière fiable?
- Dans des situations de décision, les décideurs réels ne fournissent pas toujours une information fiable.

Du fait de contraintes de temps et de limitations cognitives, les décideurs expriment des assertions contradictoires, leurs préférences évoluent au cours du temps, ... La procédure d'inférence doit être capable de mettre en lumière les exemples contradictoires ou non représentables dans le cadre du modèle d'agrégation d'ELECTRE TRI. Cette expérience vise à étudier les capacités de la procédure d'inférence à "identifier" les éventuelles incohérences dans les affirmations du décideur pour pouvoir l'aider à réviser ses préférences. La procédure d'optimisation permet-elle d'identifier de manière fiable les incohérences dans les jugements du décideur?

L'article est organisé de la manière suivante. Dans la section qui suit, nous présentons l'approche générale dans laquelle s'insère la procédure d'inférence. Une brève description de la méthode ELECTRE TRI est donnée en section 3; le modèle d'inférence est présenté en section 4. La section 5 décrit le plan d'expérience. Les deux dernières sections regroupent les résultats et les conclusions.

2. Principe Général de l'Approche

Le schéma général dans lequel s'insère notre procédure d'inférence est le suivant. Le but est d'obtenir un modèle ELECTRE TRI aussi compatible que possible avec les exemples d'affectation donné par l'utilisateur. Les exemples d'affectation concernent un sous-ensemble $A^* \subset A$ d'actions pour lesquelles l'utilisateur a des préférences bien établies, i.e., des actions que l'utilisateur peut facilement affecter à une catégorie en se basant sur leurs performances sur chacun des critères. La compatibilité entre le modèle ELECTRE TRI et les exemples d'affectation est évaluée par la capacité de la méthode ELECTRE TRI utilisant ce modèle à réaffecter les actions de A^* de la même manière que l'utilisateur.

Pour minimiser les différences entre les affectations d'ELECTRE TRI et celles de l'utilisateur, une procédure d'optimisation est utilisée. On notera M_x le modèle ELECTRE TRI résultant. L'utilisateur peut alors affiner le modèle dans un processus interactif. Il peut soit modifier les exemples d'affectation, soit fixer des valeurs (ou intervalles de variation) pour certains paramètres du modèle. Dans le premier cas, il peut supprimer et/ou ajouter des actions de/à l'ensemble A^* , changer les affectations de certaines actions de A^* .

Dans le second cas, l'utilisateur peut fournir de l'information additionnelle sur la plage de variation de certains des paramètres du modèle en se basant sur son intuition. Par exemple, il peut spécifier une information ordinaire sur l'importance des critères, des différences significatives sur les échelles des critères, une définition (éventuellement incomplète) des profils définissant les limites entre catégories...

Lorsque le modèle n'est pas parfaitement compatible avec les exemples d'affectation, la procédure est capable de détecter les cas "difficiles", i.e., les actions pour lesquelles l'affectation calculée par le modèle diffère fortement de l'affectation demandée par l'utilisateur. Sur cette base l'utilisateur peut alors reconsidérer son jugement.

Inférer une certaine forme de connaissance à partir d'exemples de décision d'un expert est une approche typique de l'intelligence artificielle. L'attrait de cette approche réside dans le fait que les décideurs/experts prennent leurs décisions de manière plus fiable qu'ils ne les expliquent. En aide multicritère à la décision, cette approche est concordante avec la logique d'agrégation-désagrégation utilisée pour la construction d'un modèle de préférences dans des procédures de type UTA (cf. [JLS82] et [JL90]). Cette approche a aussi été appliquée pour l'élicitation des coefficients d'importance des critères pour la construction d'une relation de surclassement dans la méthode DIVAPIME (cf. [Mou95] et [Mou93]).

3. Présentation de la méthode ELECTRE TRI

ELECTRE TRI est une méthode de tri multicritère, i.e., qui affecte des actions à des catégories prédéfinies ordonnées. La frontière entre deux catégories successives est modélisée à l'aide de profils. Un profil permet donc de limiter deux catégories consécutives. Pour affecter une action a à une catégorie en compare a avec les profils frontières. Soit F l'ensemble des indices des critères $g_1, g_2, \dots, g_m$ ($F = \{1, 2, \dots, m\}$) et B l'ensemble des indices des profils qui définissent $p+1$ catégories ($F = \{1, 2, \dots, p\}$), b_h étant le profil fait de la catégorie C_h et le profil bas de la catégorie C_{h+1} , $h=1, 2, \dots, p$. Dans toute la suite, on supposera, sans perte de généralité, que les préférences du décideur sont croissantes sur chaque critère.

ELECTRE TRI fait appel à une relation de sur classement S (cf. [Roy91]) qui valide ou invalide la proposition aSb_h (et b_hSa), dans la signification est "a est aussi bon que b_h ". Les préférences sur chaque critère sont définies par des pseudo-critère (cf. [Roy85], [RV84] pour des détails). Des seuils d'indifférence et des préférence, $q_j(b_h)$ et $p_j(b_h)$, prennent en compte la nature imprécise des performances. Le seuil d'indifférence $q_j(b_h)$ spécifie la plus grande différence $g_j(a) - g_j(b_h)$ qui préserve l'indifférence entre a et b_h sur le critère g_j ; le seuil de préférence $p_j(b_h)$ représente la plus petite différence $g_j(a) - g_j(b_h)$ compatible avec une préférence en faveur de a .

Au niveau des préférences globales, pour valider une assertion aSb_h (et b_hSa), deux conditions doivent être remplies:

- concordance: pour accepter un surclassement aSb_h (ou b_hSa), une majorité "suffisante" de critères doit être en faveur de cette proposition,
- non-discordance: aucun critère de la "minorité" ne doit s'opposer "trop fortement" à l'assertion aSb_h (ou b_hSa).

ELECTRE TRI construit sur ces deux principes, un indice $\sigma(a,b_h) \in [0,1]$ ($\sigma(b_h,a)$, resp.) qui représente le degré de crédibilité de l'assertion aSb_h (b_hSa , resp.), $\forall a \in A, \forall h \in B$. L'assertion aSb_h (b_hSa , resp.) est considérée comme valide dès lors que $\sigma(a,b_h) \geq \lambda$ ($\sigma(b_h,a) \geq \lambda$, resp.), λ étant un "niveau de coupe" tel que $\lambda \in [0.5,1]$ (cf. [RB93] pour une justification de cet indice). Deux Procédure d'affectation sont alors disponibles.

Procédures pessimiste (ou conjonctive)

- comparer a successivement aux profils b_i , $i = p, p-1, \dots, 0$,
- soit b_h le premier profil tel que aSb_h , affecter a à C_{h+1} ($a \rightarrow C_{h+1}$).

Deux Procédure optimiste (ou disjonctive)

- comparer a successivement aux profils b_i , $i = 1, 2, \dots, p$,
- soit b_h le premier profil tel que $a > b_h$, affecter a à C_h ($a \rightarrow C_h$).

4. La procédure d'inférence

les paramètres d'ELECTRE TRI sont: les profils définis par leurs performances $g_j(b_h), \forall j \in F, \forall h \in B$, les coefficients d'importances $\omega_j, \forall j \in F$, les seuils d'indifférence et de préférence $q_j(b_h), p_j(b_h), \forall j \in F, \forall h \in B$, les seuils des veto $v_j(b_h), \forall j \in F, \forall h \in B$. L'expérience conduite considère le cas où les profils et les seuils sont connus et où les poids doivent être inférés. De plus, nous restreignons notre analyse à la procédure pessimiste.

4.1. Les variables du problème

Dans la procédure d'affectation pessimiste d'ELECTRE TRI, une action a_k est affectée à la catégorie C_h (b_{h-1} et b_h étant respectivement le profil bas et haut de C_h) ssi $\sigma_\pi(a_k, b_{h-1}) \geq \lambda$ et $\sigma_\pi(a_k, b_h) < \lambda$.

Supposons que le décideur affecte l'action $a_k \in A^*$ à la catégorie C_{hk} ($a_k \rightarrow C_{hk}$). Soient x_k et y_k les variables d'écart définies par $\sigma_\pi(a_k, b_{hk-1}) - x_k = \lambda$ et $\sigma_\pi(a_k, b_{hk}) + y_k = \lambda$. Le problème d'optimisation à les variables suivantes:

$x_k, y_k, \forall k : a_k \in A^*$	Les variables d'écart (2n)
λ	Le niveau de coupe (1)
$\omega_j, \forall j \in F$	Les coefficients d'importance (m)

4.2. Le critère à optimiser

Si les variables d'écart x_k et y_k sont toutes les deux positives, alors la procédure ELECTRE TRI pessimiste affectera l'action a_k à la "bonne" catégorie. Si, en revanche, une ou deux de ces variables sont négatives, alors la procédure affectera l'action a_k à une catégorie "incorrecte". Plus le minimum de ces deux valeurs est petit, moindre sera la capacité d'adaptation du modèle M_π pour prendre en compte l'affectation de a_k exprimée par le décideur. Cependant, Si x_k et y_k sont tous les deux positives, alors a_k est affectée de façon cohérente avec l'assertion du décideur pour tout

$$\lambda' \in [\lambda - y_k, \lambda + x_k]$$

Considérons un ensemble d'actions $A^* \subset A$ où $\text{card}(A^*) = n$. Supposons que le décideur a affecté chaque action a_k à la catégorie C_{hk} , $\forall a_k \in A^*$. Le modèle M_{Π} sera cohérent avec les affectations du décideur ssi $x_k \geq 0$ et $y_k \geq 0$, $\forall k$ tel que $a_k \in A^*$.

Conformément avec l'argument précédent, un critère à optimiser peut être défini de la façon suivante:

$$\max_{k: a_k \in A^*} \{ \min \{ x_k, y_k \} \}$$

On obtient donc un problème standard MaxMin. Si le critère à optimiser a une valeur positive, alors toutes les actions appartenant à l'ensemble A^* sont affectées de façon "correcte" pour tout

$$\lambda' \in [\lambda - \min_{k: a_k \in A^*} \{ y_k \}, \lambda + \min_{k: a_k \in A^*} \{ x_k \}]$$

4.3. Les contraintes du problème

Les contraintes du problème à optimiser sont les suivantes:

$$\sigma \pi(a_k, b_{hk} - 1) - x_k = \lambda, \forall k: a_k \in A^* \quad \text{définition des variables d'écart } x_k \text{ (n)}$$

$$\sigma \pi(a_k, b_{hk}) - y_k = \lambda, \forall k: a_k \in A^* \quad \text{définition des variables d'écart } y_k \text{ (n)}$$

$$\alpha \leq x_k, \alpha \leq y_k, \forall k: a_k \in A^* \quad \text{définition de } \alpha \text{ (2n)}$$

$$\lambda \in [0.5, 1] \quad \text{intervalle de variation pour } \lambda \text{ (2)}$$

$$\omega_j \geq 0, \forall j \in F \quad \text{contraintes de non-négativité (m)}$$

On pourra ajouter des contraintes supplémentaires durant le protocole d'interaction pour permettre de prendre en compte les informations intuitives du décideur concernant la valeur de certains des paramètres. Par exemple, si le décideur trouve qu'aucun critère n'est dictateur, on pourra ajouter une contrainte appropriée:

$$\omega_j \leq \sum_{i=1}^m \omega_i, \forall j \in F$$

4.4. Programme à résoudre

Le problème d'optimisation à résoudre est le suivant :

$$\max \alpha$$

$$\text{s.t } \alpha \leq x_k, \forall k: a_k \in A^* \quad (2)$$

$$\alpha \leq y_k, \forall k: a_k \in A^* \quad (3)$$

$$(4)$$

$$\sum_{j=1}^m \omega_j c_j (a_k, b_{hk} - 1) - x_k = \lambda, \forall k: a_k \in A^* \quad (5)$$

$$\sum_{j=1}^m \omega_j c_j (a_k, b_{hk}) + y_k = \lambda, \forall k: a_k \in A^* \quad (6)$$

$$\sum_{j=1}^m \omega_j = 1 \quad (7)$$

$$\lambda \in [0.5, 1] \quad (8)$$

$$\omega_j \geq 0, \forall j \in F \quad (9)$$

Il s'agit d'un problème de programmation linéaire car toutes les contraintes et la fonction-objectif sont linéaires. Ce modèle comporte $2n + m + i$ variables et $4n + m + 2$ contraintes. Remarquons que les variables d'écart x_k et y_k peuvent être éliminées de cette formulation étant définies par les contraintes (5) et (6). Cette élimination réduit la taille du problème.

5. Plan d'expérience

Cette expérience est un travail de laboratoire, i.e., prend comme matériel empirique une étude réelle passée et effectuée des calculs a posteriori en vue de valider de manière opérationnelle le modèle d'inférence proposé en §4. Les données considérées proviennent de l'application réelle décrite dans [Yu92a] et [Yu92b].

Cette application considère un problème d'affectation d'un ensemble A de 100 actions ($A = \{a_1, a_2, \dots, a_{100}\}$) à trois catégories C_1, C_2 et C_3 (deux profils limite b_1 et b_2 définissent les "frontières" C_1 - C_2 et C_2 - C_3) sur la base de 7 critères.

Comme il n'est pas possible d'avoir d'interaction avec le DM, nous considérerons les affectations de la procédure d'affectation pessimiste d'ELECTRE TRI (avec les paramètres donnés dans [Yu92a]) comme des exemples d'affectation exprimés par un décideur fictif. La méthode expérimentale consiste à utiliser la procédure d'optimisation avec différents sous-ensembles d'exemples d'affectation pour inférer les poids qui "collent" au mieux aux exemples (les valeurs des profils et des seuils restant fixés).

De sorte d'obtenir des résultats consistants, nous générons 80 sous-ensembles de A , le cardinal de chacun de ces ensembles étant 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42 ou 48 (10 ensembles de chaque taille ont été générés). Chacun de ces sous-ensemble est conçu de manière à affecter les actions uniformément aux catégories. Soit A_i^j , le j ème ensemble de taille i .

Pour tester la capacité de la procédure d'optimisation à identifier des éventuelles informations incohérentes (cf. §6.3), nous considérons les ensembles Err_i^j dérivés de A_i^j dans lesquels une action est volontairement affectée à une catégorie "erronée". L'erreur introduite consiste à changer l'affectation d'une action.

6 Résultats

Les calculs ont été effectués avec le solveur Cplex sur une station Sparc 5 Sun disposant de 32 Mo de mémoire. Compte tenu de la petite taille des problèmes, les temps de calculs sont toujours très faibles. Avant de présenter les résultats, il est important de souligner que les résultats obtenus dépendent des données considérées. Les implications méthodologiques proposées doivent être comprises en prenant en compte cette restriction.

6.1. L'outil est-il capable d'accroître la "stabilité" des affectation?

Soit ω^{opt} le vecteur des poids obtenu à l'aide de la procédure d'optimisation sur la base des affectations des actions d'un ensemble A_i^j à des catégories prédéfinies. Soit ω^{dm} le vecteur des poids utilisé pour générer les exemples d'affectation. Un premier élément pour valider la procédure d'optimisation consiste à vérifier si l'affectation des actions de l'ensemble A_i^j est plus "stable" lorsqu'on utilise le vecteur ω^{opt} plutôt que le vecteur ω^{dm} , i.e., l'outil sera-t-il capable d'accroître la "stabilité" des affectations de l'ensemble A_i^j ?

Pour répondre à cette question, on suivra la méthodologie suivante. Dans le programme mathématique à résoudre, la variable Q est introduite pour transformer l'objectif MaxMin dans un objectif Max. Cette variable représente donc la valeur minimale des variables d'écart x_k et y_k (§4.2). Plus la valeur de α est

grande, plus les affectations dans A_i^j seront stables. Les affectations sont considérées stables si ne sont pas affectées par une modification du niveau de coupe λ (ou une variation du poids).

Soit $\alpha_{dm}(A_i^j)$ la variation maximal du niveau de coupe λ qui préserve une affectation correcte de toutes les actions de A_i^j en utilisant les poids initiaux, i.e., les coefficients d'importance issus de [Yu92a]. Soit $\alpha_{opt}(A_i^j)$ la variation maximale du niveau de coupe λ qui préserve les affectations exactes de toutes les actions A_i^j avec les poids obtenus avec la procédure d'optimisation. L'amélioration de la stabilité des affectations due à l'utilisation de la procédure peut être mesurée par $\alpha_{op}(A_i^j) - \alpha_{dm}(A_i^j)$. le Tableau 1 présente les résultats numériques

Taille :i	$\bar{\alpha}_{opt}(i)$	$\bar{\alpha}_{dm}(i)$	$\bar{\alpha}_{opt}(i) - \bar{\alpha}_{dm}(i)$
6	0.24	0.08	0.16
12	0.23	0.02	0.21
18	0.21	0.08	0.13
24	0.20	0.02	0.18
30	0.19	0.08	0.11
36	0.18	0.03	0.15
42	0.18	0.02	0.16
48	0.10	0.02	0.08
		Moy.	0.15

TAB.1 - L'amélioration de la "stabilité" des affectations

Dans les résultats, on observe:

- d'une part, les résultats montrent que plus l'ensemble des exemples d'affectation est grand, moins les affectations sont stables, i.e., plus elles sont sensibles aux changements de poids. C'est une évidence puisque chaque exemple d'affectation ajoute deux contraintes au problème (cf. §4.3).
- d'autre part, les résultats montrent une amélioration importante de la stabilité des affectations quelle que soit la taille de l'ensemble des exemples (valeur moyenne: 0.15). Ceci montre la capacité de la procédure d'optimisation pour générer des "bons" poids, qui permettent à ELECTRE TRI de reassigner les actions d'une façon très stable.

6.2. Quelle est la "quantité" d'information nécessaire pour inférer les poids de manière fiable?

Pour inférer le vecteur poids ω^{opt} de façon fiable, la procédure d'optimisation a besoin d'information en entrée, i.e., un ensemble d'exemples d'actions. Quelle est la quantité d'information nécessaire pour "calibrer" le modèle d'une façon satisfaisante? Quelle taille doit avoir A^* de telle manière que le vecteur poids obtenu ω^{opt} soit fiable? Cette question est cruciale d'un point de vue pratique, lorsqu'on utilise le modèle d'inférence dans les situations de décision réelles. L'homme d'étude doit disposer de quelques lignes directrices simples pour travailler en interaction avec le décideur, évitant les questions superflues ou inutiles, mais aussi recueillant une information suffisante.

Pour déterminer une "quantité raisonnable d'information" pour inférer les poids, nous avons suivi le schéma suivant: la procédure d'optimisation est utilisée avec des ensembles d'exemples d'affectation différents. La taille de ces ensembles varie de 6 à 48 (10 ensembles de même taille, cf §5). On observe alors la capacité d'ELECTRE TRI à affecter correctement l'ensemble total des 100 actions sur la base des poids inférés. Il est évident que la capacité d'ELECTRE TRI à reassigner les actions correctement est d'autant meilleure que la taille de l'ensemble à partir duquel les poids sont générés est grand. Cependant, le nombre d'exemples exprimés par le décideur ne doit pas être démesurément élevé.

Soit α_{opt}^{100} la variation maximale du niveau de coupe λ qui préserve l'affectation exacte pour les 100 actions utilisant les poids inférés à partir de A_i^j . Soit $\bar{\alpha}_{opt}^{100}(i)$ la valeur moyenne de $\alpha_{opt}^{100}(A_i^j)$,

pour tous les ensembles A_i^j de taille i . Soit $err_{opt}^{100}(A_i^j)$ le nombre de « mauvaises » affectations parmi les 100 actions avec les poids inférés à partir de A_i^j . Soit $\overline{err}_{opt}^{100}(i)$ la valeur moyenne de $err_{opt}^{100}(A_i^j)$, pour tous les ensembles A_i^j de taille i . Les résultats des expérimentations sont regroupés dans le Tableau 2 :

taille : i	$\overline{\alpha}_{opt}^{100}(i)$	$\overline{err}_{opt}^{100}(i)$
6	-0.093	4.4
12	-0.088	4.0
18	0.076	0.6
24	0.129	0.2
30	0.157	0.0
36	0.112	0.4
42	0.164	0.0

TAB. 2 - Information nécessaire pour inférer les poids de façon fiable

Comme précédemment, les résultats montrent que $\overline{\alpha}_{opt}^{100}(i)$ augmente et que $\overline{err}_{opt}^{100}(i)$ décroît en fonction de la taille i de l'ensemble. Cependant $\overline{\alpha}_{opt}^{100}(A_i^j)$ devient positive dans l'intervalle $12 < i < 18$; cette valeur positive signifie que les poids inférés à partir d'un ensemble de i exemples d'affectation permet (en moyenne) de reassigner correctement toutes les 100 actions.

Le nombre de paramètres à inférer (poids ω_j) dépend seulement du nombre de critères. Si on considère les résultats ci-dessus, $2 \times m$ (m étant le nombre de critères) nous semble être un nombre raisonnable d'exemples d'affectation pour inférer les poids de façon fiable (puisque avec 7 critères, $12 < 2m < 18$). Cependant, il est important de remarquer que lorsqu'on utilise un ensemble A_i^j de $2m$ exemples d'affectation on n'obtient pas nécessairement des poids inférés tels que $err_{opt}^{100}(A_i^j) = 0$. Cela signifie que certaines actions peuvent ne pas être reassignées de façon exacte. Néanmoins, les $2m$ nous semble être un bon équilibre entre le nombre d'exemples demandés au décideur et la fiabilité des poids inférés. Ce résultat devra être renforcé par une réplication de cette expérience, en particulier dans le cas où le nombre de catégories est strictement supérieur à 3.

6.3. L'outil est-il capable d'identifier des incohérences dans les assertions du DM?

La procédure testée dans cette expérience est conçue pour être intégrée dans un outil interactif brièvement présenté en section 2. Dans des situations concrètes de décision, les décideurs ne fournissent pas toujours une information fiable. Du fait de contraintes de temps, de limitations cognitives, les préférences des décideurs évoluent au cours du temps, contiennent des informations contradictoires ou incohérentes. Le rôle d'un outil interactif est d'aider le décideur à apprendre sur ses préférences et sur la possibilité de les représenter dans un modèle d'agrégation spécifique. Des incohérences interviennent lorsque les préférences du décideur (dans notre cas des exemples d'affectation) ne peuvent être représentées à travers le modèle d'agrégation utilisé (ici ELECTRE TRI). Dans de telles situations, il est important d'extraire l'information incohérente des préférences exprimées, i.e., d'identifier les exemples d'affectation les plus atypiques ou contradictoires. Par conséquent, une question expérimentale fondamentale concerne la capacité de l'outil à identifier les incohérences dans les affirmations du décideur: cette identification aidera le décideur à modifier les assertions exprimées pour les rendre compatibles avec le modèle de préférence utilisé.

Pour tester la capacité de la procédure d'inférence à identifier l'information contradictoire, nous considérons les ensembles Err_i dérivés de A_{ij} en affectant volontairement une action à une catégorie « erronée ». L'erreur introduite consiste à changer l'affectation d'une action A_{ij} . Pour savoir si la procédure est capable d'identifier une incohérence, nous nous baserons sur l'idée suivante. Soit a_k l'action affectée incorrectement, x_k et y_k étant les variables d'écart correspondantes (cf. 4.1). Rappelons que la variable α correspond au minimum des x_k et y_k pour

toute action de err_k^m . Les actions les plus difficiles sont celles³ pour lesquelles $x_k = \alpha$ ou $y_k = \alpha$. Ainsi, nous considérons que « l'erreur » ou l'inconsistance est « découverte » dès lors que $x_k^m = \alpha$ ou $y_k^m = \alpha$.

Si a_k^m se trouve parmi les actions les plus difficiles à affectées, ce n'est peut être pas la seule action pour laquelle une des variable d'écart correspondante est égale à α . Soit $n(err_i^j)$ le nombre de telles actions. Plus $n(err_i^j)$ est plus petite, plus l'identification est précise. On notera $\bar{n}(i)$ la moyenne des $n(err_i^j)$, pour tout j.

On observe dans les résultats que l'erreur est toujours identifiée ($x_k^m = \alpha$ ou $y_k^m = \alpha$). Le tableau 3 donne les résultats numériques :

Taille : i	$\bar{\alpha}(i)$	$\bar{n}(i)$	$\frac{\bar{n}(i)}{i}$
6	0.0	403	71.7%
12	0.0	6.9	57.5%
18	-0.01	8.8	48.9%
24	-0.01	8.3	34.6%
30	0.01	15.2	50.7%
36	0.01	13.0	36.1%
42	-0.02	12.4	29.5%
48	-0.02	14.1	29.4%

TAB. 3 - Identification des "erreurs"

On observe sans surprise une dégradation de la valeur de $\alpha(i)$ en comparaison de sa valeur dans les ensembles initiaux, i.e., sans erreur (cE Tableau 1). Deuxièmement, bien que les erreurs soient systématiquement identifiées, le nombre d'actions $n(i)$ croît avec la taille i des ensembles; toutefois, la proportion de ces actions décroît avec i . Au final, les résultats montrent que la procédure possède une bonne capacité à identifier des exemples d'affectation "erronés" ou hors normes.

7. Conclusions

Cet article présente une validation expérimentale de la procédure d'inférence visant à déterminer les coefficients d'importance des critères de la méthode ELECTRE TRI sur la base d'exemples d'affectation (cf. [M598]). Les performances de cette procédure sont testées ainsi que sa capacité à être intégrée dans un processus interactif reposant sur le paradigme d'agrégation-désagrégation. En conclusion, il ressort que:

- les résultats montrent que la procédure d'inférence dérive des poids qui affectent (en utilisant ELECTRE TRI) les exemples aux catégories correctes d'une manière très stable,
- les résultats expérimentaux suggèrent qu'un nombre "raisonnable" d'exemples d'affectation pour inférer les poids de manière fiable est $2m$, m étant le nombre de critères,
- la procédure d'inférence montre une bonne capacité à identifier les incohérences dans les affirmations de l'utilisateur; cette propriété est particulièrement importante dans la perspective de son intégration dans un processus interactif,

³ Dans le processus interactif, ces actions sont celles qui seraient présentées au décideur pour modification.

Bien que ces résultats dépendent des données considérées, les résultats empiriques semblent robustes. Ces bons résultats concernant le comportement de la procédure d'inférence doivent être analysés en relation avec l'usage de cette procédure d'inférence. La phase d'inférence (formalisée par le programme mathématique) n'est pas seulement un simple processus d'ajustement, mais a pour but d'être intégrée à un processus interactif d'agrégation-désagrégation (cf. section 2). Ce processus interactif vise à fournir au décideur un outil qui lui permette d'apprendre et d'approfondir ses préférences et d'étudier leur compatibilité avec le modèle de préférence utilisé. En ce sens, les résultats empiriques présentés sont très prometteurs en termes d'applicabilité de l'approche proposée dans [MS98].

Références

- [JL90] E. Jacquet-Lagrèze. Interactive assessment of preferences using holistic judgments: the PREFCALC system. In Bana e Costa C., editor, *Readings in Multiple Criteria Decision Aid*. Springer-Verlag, 335-350, 1990.
- [JLS82] E. Jacquet-Lagrèze et J. Siskos. Assessing a set of additive utility functions for multicriteria decision-making, the UTA method. *EJOR*, 10(2), 151-164, 1982.
- [Mou93] V. Mousseau. Problèmes liés à l'évaluation de l'importance relative des critères en aide multicritère à la décision: Réflexions théoriques, expérimentations et implémentations informatiques. PhD thesis, Université Paris-Dauphine, 1993.
- [Mou95] V. Mousseau. Eliciting information concerning the relative importance of criteria. In Pardalos P. & Siskos Y. & Zopounidis C., editor, *Advances in multicriteria Analysis, Nonconvex Optimization and its Applications*, pages 17-43. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1995.
- [MS98] V. Mousseau et R. Slowinski. Inferring an ELECTRE TRI Model from Assignment Examples. *Journal of Global Optimization*, 12(2), 157-174, 1998.
- [Nau96] J.-Ph. Naux. Calage d'un modèle ELECTRE TRI à l'aide d'exemples. Mémoire de DEA, Université Paris-Dauphine, 1996.
- [RB93] B. Roy et D. Bouyssou. Aide multicritère à la décision: méthodes et cas. *Economica*, Paris, 1993.
- [Roy85] B. Roy. Méthodologie multicritère d'aide à la décision. *Economica*, Paris, 1985.
- [Roy91] B. Roy. The outranking approach and the foundations of electre methods. *Theory and Decision*, 31(1), 49-73, 1991.
- [RV84] B. Roy et Ph. Vincke. Relational systems of preferences with one or more pseudo-criteria: some new concepts and results. *Management Science*, 30(11), 1323-1334, 1984.
- [Yu92a] W. Yu. Aide multicritère à la décision dans le cadre de la problématique du tri: concepts, méthodes et applications. PhD thesis, Université Paris-Dauphine, 1992.
- [Yu92b] W. Yu. ELECTRE TRI: Aspects méthodologiques et manuel d'utilisation. Document du LAMSADE n°74, Université Paris-Dauphine, 1992.

OPTIMISATION ET DECISION

Actes des deuxièmes Journées Francophones de Recherche Opérationnelle

Francoro' 98

Sousse, 4 au 7 Avril 1998

F. BEN ABDELAZIZ, M. HAOUARI, K. MELLOULI

(Editeurs)

Tunisian Management Science Society

*** TMSS ***

Centre de Publication Universitaire

2000