

Travaux Dirigés n° 5 : Algèbre linéaire - rappels

*Objectifs : rappel de quelques éléments d'algèbre linéaire nécessaires pour l'analyse factorielle des données.*

### 1 Exercice 1

Soit  $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ . Calculez  $A^8$ .

### 2 Exercice 2

Soit  $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  et  $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ .

1. Montrez que  $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$  est orthogonale.
2. Quelle est la projection de  $\mathbf{y}$  sur l'espace  $V$  engendré par  $S$ ? Ecrivez cette projection dans la base  $S$ .
3. Quelle est la projection de  $\mathbf{y}$  sur  $V^\perp$ ?

### 3 Exercice 3

Soit  $V$  un sous espace de  $\mathbb{R}^n$ . On définit la distance de  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  à  $V$  comme :

$$d(\mathbf{y}, V) = \min_{\mathbf{x} \in V} d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

1. Calculez cette distance si  $V$  est engendré par  $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$  et

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

2. Répétez (1) pour le produit scalaire associé à la métrique  $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

## 4 Exercice 4

Diagonalisez, si possible, la matrice  $A$  suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

## 5 Exercice 5

Soit  $A$  une matrice  $4 \times 4$  dont les valeurs propres sont  $5, 3, -2$ . Si  $\dim(E_3) = 2$ , peut-on diagonaliser  $A$  ?

Rappel : l'espace propre associé à une valeur propre  $\lambda$  de  $A$  est  $E_\lambda = \{\mathbf{x} \mid A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}\}$ . A titre d'exemple, nous avons pour l'exercice 4 :  $\dim(E_{-2}) = 2$ .

## 6 Exercice 6

Déterminez si  $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$  est diagonalisable sachant que :

$$p_A(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda + 2)^2.$$

## 7 Exercice 7

Soit  $A = \begin{bmatrix} 5 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ . Est-elle diagonalisable ?