Mémoire présenté pour l'obtention
de l'habilitation à diriger des recherches

Étude et approximation de problèmes d'optimisation combinatoire

CRISTINA BAZGAN

Soutenue le 24 octobre 2003 devant le Jury

Philippe Chrétienne	Président	Université Paris 6
Dominique de Werra	Rapporteur	Ecole Polytechnique Federale de Lausanne
Wenceslas Fernandez de La Vega		Université Paris 11
Dorit Hochbaum	Rapporteur	University of California, Berkeley
Marek Karpinski	Rapporteur	University of Bonn
Vangelis Paschos	Coordinateur	Université Paris 9

Remerciements

Je tiens ici à exprimer ma gratitude envers ceux et celles qui m'ont permis de mener à bien mes travaux de recherche et d'aboutir à la présentation de cette Habilitation à Diriger des Recherches.

Je remercie particulièrement Vangelis Paschos de la confiance qu'il m'a témoignée en m'accueillant dans son groupe, ce qui m'a permis de poursuivre mes recherches après ma thèse. J'ai apprécié sa disponibilité et ses conseils.

Dorit Hochbaum, Dominique de Werra et Marek Karpinski ont eu la gentillesse d'accepter d'être rapporteurs de mon document. Je les remercie d'avoir accepté de faire ce travail difficile.

Je remercie aussi Marek Karpinski et Wenceslas Fernandez de La Vega pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail et pour les nombreuses discussions, suggestions et conseils tout au long de ces années.

Philippe Chrétienne a accepté de faire partie de mon jury. Je l'en remercie vivement.

Je remercie chaleureusement les personnes avec qui j'ai eu le grand plaisir de travailler : Giorgio Ausiello, Marc Demange, Bruno Escoffier, Wenceslas Fernandez de La Vega, Amel Harkat-Benhamdine, Refael Hassin, Marek Karpinski, Hao Li, Jérome Monnot, Vangelis Paschos, Miklos Santha, Fabrice Serriere, Andrea Szipan, Sophie Toulouse, Zsolt Tuza, Daniel Vanderpooten, Mariusz Woźniak. Mon travail a aussi été soutenu par le LAMSADE, les projets ESPRIT RAND-REC, RAND2, PROCOPE et le projet bilatéral entre le CNRS et l'Académie des Sciences de Hongrie.

Je tiens à remercier les personnes qui m'ont accueillie très chaleureusement dans des institutions étrangères. Je pense en particulier à Zsolt Tuza pour les deux sejours passés à Budapest et à Marek Karpinski pour les nombreux courts séjours à Bonn.

Au LAMSADE j'ai partagé le bureau avec Flavien Balbo, Arnaud Durand et Daniel Vanderpooten. Je les remercie pour les moments passés ensemble et pour leur discrétion. Je remercie égalemment Jean Paul Fourmas pour sa disponibilité et son efficacité. Je remercie les autres collègues du LAMSADE avec lesquels j'ai partagé ces dernières années.

Je remercie mes amies rencontrées au LRI, Sophie Laplante, Maria Gradinariu et Sylvie Corteel. Nous nous sommes dispersées il y a 4 ans mais cela fait toujours plaisir de se retrouver.

Enfin, je remercie également toutes les personnes qui m'ont accompagnée, de près et de loin, ces dernières années et qui m'ont apporté gentillesse et disponibilité.

Table des matières

Introduction

Nos travaux de recherche s'inscrivent dans le cadre de l'optimisation combinatoire et concernent particulièrement l'approximation polynomiale de problèmes d'optimisation et la théorie des graphes. L'étude de la complexité de l'approximation des problèmes d'optimisation est un domaine de l'informatique théorique bien étudié [Hoc95, ACG$^+$99, Vaz01]. En général on souhaite trouver l'algorithme le plus *rapide* pour résoudre un problème d'optimisation. Pour certains problèmes il existe des algorithmes qui trouvent une solution optimale *efficacement*, c'est-à-dire en temps polynomial en la taille de l'instance. En revanche, pour la plupart des problèmes d'optimisation intéressants, il n'est pas possible de trouver une solution optimale efficacement. Ces problèmes sont dits *intraitables* et la théorie de la *NP*-complétude due à Cook [Coo71] et Levin [Lev73] fournit un cadre pour décrire et mieux comprendre ce phénomène. Dès lors, quand on s'intéresse à la résolution d'un problème intraitable, il est légitime d'explorer des possibilités moins ambitieuses que celles visant à *résoudre* le problème en temps polynomial. Une approche pour traiter un tel problème d'optimisation consiste à essayer de concevoir des algorithmes polynomiaux qui fournissent des solutions dont on peut garantir qu'elles sont proches de l'optimum.

Pour évaluer la qualité d'une solution déterminée par un algorithme, la plupart des chercheurs ont étudié le rapport standard qui consiste à comparer la valeur de la solution approchée à celle de la valeur optimale. Les travaux autour de l'approximation standard datent des années 70 [Chr76, HS76, IK75, GJ79]. Parallèlement à l'étude de l'approximation standard, certains chercheurs se sont intéressés dans les années 80 [ADP80, Zem81], puis plus récemment [DP96, HK01, MPT01], à un autre rapport qui prend en compte comme référence non seulement la valeur d'une solution optimale mais aussi la valeur d'une pire solution. Ce rapport est appelé rapport différentiel. Encore plus récemment, Håstad et Venkatesh [HV02] ont étudié l'approximation de certains problèmes selon un rapport qui compare la valeur d'une solution à la valeur d'une solution optimale et à la valeur d'une solution obtenue par un algorithme fixé, en particulier un algorithme aléatoire simple.

Le premier chapitre de ce mémoire est consacré exclusivement à l'approximation standard en temps polynomial. Dans cette partie nos propres contributions sont mises en évidence en relation avec les résultats existants. Nous nous sommes principalement intéressés aux instances particulières des problèmes d'optimisation : instances denses, instances satisfaisables de problèmes de satisfaction de contraintes, graphes cubiques, graphes hamiltoniens. Nous avons notamment initié l'étude systématique de la version minimisation des problèmes de satisfaction de contraintes booléennes pour les instances denses. Les résultats obtenus sont des schémas d'approximation pour la plupart des instances uniformément denses. Les instances denses en moyenne sont aussi difficiles à approximer que les problèmes généraux. Nous nous sommes intéressés aux graphes cubiques et hamiltoniens lors de l'étude du problème de la plus longue chaîne (LONGEST PATH). La grande majorité de nos travaux concernent des problèmes *NP*-difficiles. Nous nous sommes aussi intéressés aux problèmes totaux, qui sont des problèmes de recherche associés aux problèmes de *NP*, dont on sait que chaque instance du problème a une solution. Une propriété intéressante des problèmes totaux est qu'ils ne peuvent pas être *FNP*-difficiles sauf si $NP = coNP$ [MP91]. Une fois montré qu'un problème de recherche est total, on pourrait s'intéresser à trouver une solution pour toute instance en temps polynomial. Quand une solution n'est pas facilement trouvable en temps polynomial une démarche possible consiste à engendrer un algorithme d'approximation pour une variante d'optimisation du problème. Nous avons initié l'étude de l'approximation des problèmes totaux pour lesquels aucun algorithme polynomial n'est connu. Les résultats obtenus sont en général des schéma d'approximation. L'existence d'un algorithme polynomial est toujours possible pour les problèmes que nous avons étudiés mais elle n'est pas assurée car il existe au moins un problème total qui n'est pas polynomial [MP91]. Nous terminons le premier chapitre par l'étude de la notion de dureté d'un graphe qui a été introduite par Chvátal dans [Chv73]. Nous avons montré qu'approximer la dureté d'un graphe est un problème très difficile.

Le deuxième chapitre est consacré à l'approximation différentielle. Cette notion, moins étudiée que celle standard, va être présentée brièvement. Nous allons présenter quelques résultats existants dans ce domaine et essayer de les situer par rapport au rapport standard. Ensuite, nous présentons les résultats obtenus. Premièrement nous avons étudié l'approximation de problèmes centraux en la théorie de la complexité, tels que MAX 3SAT, MAX SAT et quelques variantes. Comme dans le cas standard, ces problèmes n'ont pas de schéma d'approximation, par contre aucun résultat positif n'est connu. Nous avons montré qu'un premier problème MIN INDEPENDENT DOMINATING SET n'est pas du tout approximable en différentiel sous une hypothèse acceptée de la théorie de la complexité. Nous avons établi des problèmes difficiles dans la classe des problèmes différentiel approximables à un facteur constant près et dans la classe *NPO* sous des réductions préservant le rapport d'approximation différentiel. Nous avons étudié un problème de tournés de véhicules ainsi que des variantes de celui-ci du point de vue différentiel.

Le dernier chapitre de ce document est consacré à l'étude de différents problèmes de graphes. Partitionner l'ensemble des sommets d'un graphe en deux parties avec des contraintes de degrés est un problème central auquel nous nous sommes intéressés à partir d'un problème introduit par Gerber et Kobler [GK00]. Nous avons établi des algorithmes polynomiaux et des résultats de *NP*-complétude pour différentes variantes. En particulier, pour l'une de ces variantes dont le caractère totale a été prouvé par Stiebitz [Sti96], nous avons conçu un algorithme polynomial. Nous avons étudié un problème de recouvrement des sommets des graphes 1-durs par des chaînes. Nous avons montré qu'une conjecture de Loebl-Komlós-Sós [ELS94] est vraie pour certains cas particuliers d'arbres. Un certain type de coloration d'arêtes a été étudié. Nous avons établi une borne supérieure du nombre minimum de couleurs nécessaires.

En annexe de ce document est donnée une liste de publications, une bibliographie portant sur l'ensemble des travaux présentés ainsi qu'une présentation succincte des activités d'animation de la recherche.

Chapitre 1

Approximation standard

1.1 Définitions

Définition 1.1.1 (Problème d'optimisation) *Un problème d'optimisation est un quadruplet* (I,Sol,val,but) *où :*

1. I *est l'ensemble des instances ;*
2. $Sol(x)$ *est l'ensemble des solutions possibles pour chaque instance* $x \in I$, *;*
3. *val est une fonction qui associe à chaque solution possible d'une instance une valeur ;*
4. *but détermine s'il s'agit de maximiser (but=max) ou de minimiser (but=min) la fonction val.*

Pour une instance x d'un problème d'optimisation, on note $|x|$ la taille de x, $opt(x)$ la valeur d'une solution optimale de x et $wor(x)$ la valeur d'une pire solution de x.

PO est la classe des problèmes d'optimisation qui peuvent être résolus en temps polynomial. *NPO* est la classe des problèmes d'optimisation dont le problème de décision associé est dans *NP*.

Définition 1.1.2 (NPO) *Un problème d'optimisation est dans la classe NPO si :*

1. *Il existe un polynôme p tel que pour toute instance x et pour toute solution* $y \in Sol(x)$, $|y| \leq p(|x|)$ *;*
2. *Pour toute instance x et tout y tel que* $|y| \leq p(|x|)$, *le problème de « décider si* $y \in Sol(x)$ *» peut être résolu en temps polynomial ;*
3. *La fonction val est calculable en temps polynomial.*

MAX NPO et *MIN NPO* représentent les classes des problèmes de maximisation et minimisation de *NPO*.

Un problème d'optimisation est *polynomialement borné* s'il existe un polynôme q tel que, pour chaque instance x et chaque solution y de x, $val(x,y) \leq q(|x|)$.

Définition 1.1.3 (Rapport à l'optimum) *Étant donnée une instance x d'un problème d'optimisation A, une solution possible y de x a le* rapport à l'optimum

$$r(x,y) = \max\left\{\frac{val(x,y)}{opt_A(x)},\frac{opt_A(x)}{val(x,y)}\right\}.$$

Un algorithme donne une *approximation à un facteur $f(n)$ près* en temps polynomial pour un problème d'optimisation si pour toute instance x de taille n du problème il calcule en temps polynomial une solution y telle que $r(x,y) \leq f(n)$. Autrement dit, un algorithme donne une *approximation à un facteur $f(n)$ près*, $f(n) > 1$, en temps polynomial pour un problème de minimisation si pour toute instance x de taille n du problème il calcule en temps polynomial une solution y telle que $val(x,y) \leq f(n)opt(x)$. Un algorithme donne une *approximation à un facteur $f(n)$ près* en temps polynomial pour un problème de maximisation si pour toute instance x de taille n du problème il calcule en temps polynomial une solution y telle que $val(x,y) \geq \frac{opt(x)}{f(n)}$.

Un algorithme donne une *approximation à un terme additif $f(n)$ près* en temps polynomial pour un problème d'optimisation A si pour toute instance x de taille n du problème il calcule en temps polynomial une solution y telle que $|val(x,y) - opt_A(x)| \leq f(n)$.

Un algorithme probabiliste donne une *approximation à un facteur $f(n)$ près* en temps polynomial pour un problème d'optimisation A si pour toute instance x de taille n du problème cet algorithme calcule en temps polynomial une solution y telle que

$$\max\left\{\frac{E[val(x,y)]}{opt_A(x)}, \frac{opt_A(x)}{E[val(x,y)]}\right\} \leq f(n)$$

où $E[val(x,y)]$ est la moyenne de la variable aléatoire $val(x,y)$.

Un problème d'optimisation est *approximable à un facteur $f(n)$ près* en temps polynomial s'il existe un algorithme polynomial qui est une approximation à un facteur $f(n)$ près pour le problème. En particulier, un problème d'optimisation est *approximable à un facteur constant près* en temps polynomial s'il existe une constante $c > 1$ et un algorithme polynomial qui donne une approximation à un facteur c près pour le problème. Un problème d'optimisation a un *schéma d'approximation en temps polynomial* (d'après l'appellation anglaise « **p**olynomial-**t**ime **a**pproximation **s**cheme ») si pour toute constante $\varepsilon > 0$, il existe un algorithme polynomial $\mathcal{A}_\varepsilon$ qui soit une approximation à un facteur $(1 + \varepsilon)$ près du problème. Le temps de calcul de l'algorithme $\mathcal{A}_\varepsilon$ peut dépendre exponentiellement de $1/\varepsilon$. En général, le temps est de la forme : $n^{O(1/\varepsilon)}$ ou $2^{1/\varepsilon^{O(1)}}n^{O(1)}$. Si le temps de calcul de l'algorithme est de la forme $g(1/\varepsilon)n^{O(1)}$, où g est une fonction quelconque, on dit que le problème a un *schéma d'approximation en temps polynomial efficace* (en anglais « **e**fficient **p**olynomial-**t**ime **a**pproximation **s**cheme ») et si le temps de calcul de l'algorithme est aussi polynomial en $1/\varepsilon$ alors on dit que le problème a un *schéma d'approximation en temps complètement polynomial* (en anglais « **f**ully **p**olynomial-**t**ime **a**pproximation **s**cheme »).

Définition 1.1.4 (APX, PTAS, EPTAS, FPTAS) *APX est la classe des problèmes d'optimisation qui sont approximables à un facteur constant près en temps polynomial. L'ensemble des problèmes qui ont un schéma d'approximation en temps polynomial (resp. schéma d'approximation en temps polynomial efficace,schéma d'approximation en temps complètement polynomial) est noté PTAS (resp. EPTAS, FPTAS).*

Étant donnée une classe de fonctions F, un problème d'optimisation $A \in F\text{-}APX$ s'il existe une fonction $f \in F$ telle que A soit approximable à un facteur f près en temps polynomial.

En particulier APX (resp. *log-APX*, *poly-APX*, *exp-APX*) correspond à la classe $F\text{-}APX$ où F est l'ensemble $O(1)$ (resp. $O(\log n)$, $O(n^{O(1)})$, $O(2^{n^{O(1)}})$).

APX-PB (resp. *log-APX-PB*) est la classe des problèmes d'optimisation polynomialement bornés qui sont approximables en temps polynomial à un facteur constant près (resp. à un facteur logarithmique près).

On a clairement les inclusions suivantes :

$$PO \subseteq FPTAS \subseteq EPTAS \subseteq PTAS \subseteq APX \subseteq NPO.$$

Entre *APX* et *NPO*, les inclusions suivantes sont vérifiées :

$$APX \subseteq log\text{-}APX \subseteq poly\text{-}APX \subseteq exp\text{-}APX \subseteq NPO.$$

Ces inclusions sont strictes sous des hypothèses acceptées dans la théorie de la complexité.

A partir de la caractérisation logique donnée par Fagin pour la classe *NP*, qui établit que toute propriété de *NP* peut être exprimée dans la logique existentielle de second ordre, Papadimitriou et Yannakakis [PY88] ont défini la classe de problèmes d'optimisation *MAX SNP*.

Définition 1.1.5 (MAX SNP) *Un problème de maximisation A appartient à MAX SNP s'il existe une séquence de relations* $R_1,\ldots,R_m,S$ *sur un univers* $\mathcal{U}$ *et une formule du premier ordre sans quantificateur* ϕ *telles que la valeur de la solution optimale sur l'entrée x satisfasse :*

$$opt_A(x) = \max_S |\{(y_1,\ldots,y_k) \in \mathcal{U}^k : \phi(x,R_1,\ldots,R_m,S,y_1,\ldots,y_k)\}|.$$

Les problèmes d'optimisation qui appartiennent à la classe *MAX SNP* sont approximables à un facteur constant près [PY88] et ceux qui sont *MAX SNP*-difficiles sous une réduction préservant le schéma d'approximation n'ont pas de schéma d'approximation en temps polynomial si $P \neq NP$ [ALM+92].

La notion de complétude, classique en théorie de la complexité, s'applique également en approximation pour caractériser les problèmes les plus difficiles dans les classes précédentes. Afin de définir une notion de complétude, il convient de préciser le type de réduction utilisée.

On introduit dans la suite une réduction entre deux problèmes d'optimisation qui a la propriété de conserver l'approximation. Il s'agit de la réduction classique qui est appelée la L-réduction (L pour *linéaire*) et qui a été définie par Papadimitriou et Yannakakis [PY88].

Définition 1.1.6 (L-réduction) *Soient A et B deux problèmes d'optimisation. On dit que A est L-réductible à B et on écrit* $A \leq_L B$ *s'il existe deux fonctions calculables en temps polynomial f, g et deux constantes* $\alpha,\beta > 0$ *telles que :*

1. *f transforme une instance x de A en une instance $x' = f(x)$ de B telle que $opt_B(x') \leq \alpha \cdot opt_A(x)$,*
2. *g transforme toute solution y' de x' en une solution $y = g(x,y')$ de x telle que*

$$|val(x,y) - opt_A(x)| \leq \beta \cdot |val(x',y') - opt_B(x')|.$$

La propriété fondamentale de la L-réduction est de préserver le schéma d'approximation.

Lemme 1.1.7 ([PY88]) *Si* $B \in PTAS$ *et* $A \leq_L B$, *alors* $A \in PTAS$.

Définition 1.1.8 (Complétude) *Soit* $\mathcal{C}$ *une classe de problèmes d'optimisation. Un problème d'optimisation A est* $\mathcal{C}$*-difficile sous la L-réduction si tout problème* $B \in \mathcal{C}$ *est L-réductible au problème A. Un problème d'optimisation A est* $\mathcal{C}$*-complet si* $A \in \mathcal{C}$ *et A est* $\mathcal{C}$*-difficile.*

Deux problèmes A et B sont équivalents sous une réduction si A est réductible à B sous cette réduction et réciproquement.

1.2 Instances particulières

Certains problèmes d'optimisation deviennent plus faciles à approximer lorsqu'on se restreint à certaines instances du problème. Quand l'entrée du problème est un graphe, les instances particulières étudiées dans la littérature sont, par exemple, les graphes planaires, denses, de degré borné, réguliers, hamiltoniens, avec des distances métriques sur les arêtes. Quand les problèmes ont comme entrée une formule booléenne, les instances particulières étudiées sont, par exemple, les instances denses, satisfaisables, planaires, avec un nombre borné d'occurrences pour chaque variable.

Par exemple, MAX INDEPENDENT SET n'est pas approximable à un facteur $n^{1-\varepsilon}$ près pour tout $\varepsilon > 0$, à moins que $coRP = NP$ [Hås96]. En revanche, MAX INDEPENDENT SET pour les graphes de degré maximum borné est approximable à un facteur constant près (voir par exemple [Hoc83, BF95, KMSV94]) et admet un schéma d'approximation en temps polynomial pour les graphes planaires [Bak94].

Rappelons brièvement quelques résultats obtenus sur des instances particulières.

Baker [Bak94] a introduit une technique pour montrer que les instances planaires de certains problèmes d'optimisation ont un schéma d'approximation en temps polynomial : MIN VERTEX COVER, MAX INDEPENDENT SET, MIN DOMINATING SET. Ces résultats ont été étendus par Khanna et Motwani [KM96]. En fait, la caractérisation de la classe *APX-PB* comme étant l'ensemble des problèmes *E*-réductibles (réduction préservant les erreurs et donc les schémas d'approximation en temps polynomial) aux problèmes de *MAX SNP* [KMSV94], a incité à chercher une caractérisation similaire pour *PTAS*. Dans cette direction, Khanna et Motwani [KM96] ont défini plusieurs classes de problèmes de satisfiabilité de contraintes et ont montré que les instances planaires des problèmes de ces classes sont dans *PTAS*.

Une catégorie intéressante d'instances particulières découle de la notion de promesse. Une promesse est une garantie qu'une propriété non vérifiable en temps polynomial est satisfaite. On appelle problème de promesse un ensemble d'instances d'un problème sur lequel une promesse a été effectuée. Certains problèmes deviennent plus faciles quand on se restreint à ce type d'instances. Par exemple, MAX CLIQUE, *NP*-difficile dans le cas général [Kar72], devient polynomial sous la promesse que le graphe est parfait [GLS81]. Dans le domaine de l'approximation, Trevisan [Tre97] a étudié les instances de certains problèmes de satisfaction de contraintes sous la promesse de satisfaisabilité. Par exemple, il donne des algorithmes d'approximation pour les instances satisfaisables de MAX 3SAT et MAX SAT avec un meilleur facteur d'approximation que les meilleurs algorithmes connus pour MAX 3SAT et MAX SAT.

Håstad [Hås99] a montré que tout problème de satisfaction de contraintes où chaque variable apparaît un nombre borné de fois admet un algorithme d'approximation polynomial non-trivial.

La plupart des problèmes d'optimisation définis sur des graphes deviennent plus faciles à approximer quand on se restreint aux graphes de degré maximum borné : MAX INDEPENDENT SET, MAX BISECTION, BISECTION, MIN VERTEX COVER. Les instances concernant les graphes réguliers ont été aussi largement étudiées. Alimonti et Kann [AK97, AK00] ont étudié la complexité de l'approximation de quelques problèmes sur les graphes cubiques. Ils ont montré que MIN VERTEX COVER, MAX CUT, MAX INDEPENDENT SET, MIN DOMINATING SET restent *APX*-difficiles sur les graphes cubiques. Feige, Karpinski et Langberg [FKL01] ont établi un meilleur algorithme d'approximation pour MAX BISECTION sur les graphes cubiques. Berman et Karpinski [BK01] ont montré que MIN BISECTION restreint aux graphes cubiques est aussi difficile à approximer que sur les instances générales.

Arora [Aro96] a montré l'existence d'un schéma d'approximation en temps polynomial pour les instances euclidiennes de TSP.

Notre travail se situe particulièrement autour de la complexité de l'approximation des instances particulières de problèmes d'optimisation. Dans une première partie nous allons présenter nos résultats sur les instances denses. Il s'agit en particulier des problèmes de minimisation ayant comme entrée des formules booléennes. Nous avons ensuite étudié la complexité de l'approximation de la recherche d'un plus long cycle dans un graphe cubique et hamiltonien. Observons que ces instances sont particulières non seulement parce que nous avons une restriction sur la structure du graphe, mais aussi parce qu'il s'agit d'un problème de promesse pour lequel la valeur d'une solution optimale est connue et la plus grande possible. Ensuite, nous présenterons les résultats obtenus sur l'approximation des problèmes totaux, problèmes particuliers pour lesquels l'existence d'une solution est garantie et donc la valeur optimale est connue.

1.3 Instances denses

Nous présentons dans cette partie les résultats obtenus sur les instances denses de problèmes de minimisation portant sur des variables booléennes. Plus exactement nous avons étudié avec Wenceslas Fernandez de la Vega [4] le problème MIN EQUIVALENCE. Ensuite, avec Wenceslas Fernandez de la Vega et Marek Karpinski nous avons étendu notre étude aux problème MIN E3-LIN2 [10], MIN kSAT et MIN Ek-LIN2 [13].

1.3.1 Introduction et définitions

En général, un problème d'optimisation *NP*-difficile défini sur un graphe, devient polynomial quand l'entrée est un graphe complet. Dès lors, il semble naturel d'étudier les problèmes d'optimisation sur les classes de graphes s'approchant du graphe complet, appelé instances denses. Les instances denses de problèmes d'optimisation ont été étudiées depuis longtemps. Dirac avait montré en 1952 [Dir52] qu'un graphe non-orienté avec n sommets où chaque sommet comporte au moins $\frac{n}{2}$ voisins admet un cycle hamiltonian. Le cycle hamiltonien peut être trouvé en temps polynomial. Du côté négatif, Dahlhaus, Hajnal et Karpinski [DHK93] ont montré que, pour tout $\alpha < \frac{1}{2}$, décider si un graphe avec n sommets où chaque sommet comporte au moins αn voisins admets un cycle hamiltonian est *NP*-complet.

Il existe deux types d'instances denses étudiées en littérature : les instances uniformément denses et les instances denses en moyenne.

Etant donnée une constante α, $0 < \alpha < 1$, un graphe G avec n sommets est appelé *uniformément α-dense* si son degré minimum est au moins αn et *α-dense en moyenne* s'il contient au moins $\frac{\alpha n^2}{2}$ arêtes.

Une instance d'un problème de maximisation (ou de minimisation) du nombre de clauses satisfaites où chaque clause a au plus k variables est *uniformément α-dense* si pour chaque variable, le nombre total d'occurrences de la variable et de sa négation est au moins αn^{k-1} et il est *α-dense en moyenne* si le nombre de clauses est d'au moins αn^k.

Un ensemble d'instances est *uniformément dense* s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que chaque instance est uniformément α-dense et un ensemble d'instances est *dense en moyenne* s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que chaque instance est α-dense en moyenne. Donc, un ensemble d'instances uniformément dense est dense en moyenne mais le contraire n'est pas vrai.

La plupart des problèmes d'optimisation NP-difficiles restent NP-difficiles sur les instances denses. Le problème Longest Cycle constitue une exception grâce au résultat de Dirac mentionné précédemment.

De nombreux schémas d'approximation ont été construits une fois que l'étude de la complexité d'approximation des problèmes sur les instances denses a commencé.

1.3.2 Problèmes de maximisation

Arora, Karger et Karpinski [AKK95] ont débuté l'étude systématique de la complexité d'approximation d'instances denses de problèmes d'optimisation. Ils ont montré que les instances denses en moyenne (et uniformément denses) de Max Cut, Max DiCut, Max kSat, Dense kSubgraph et plus généralement de tout problème de *MAX SNP* ont un schéma d'approximation en temps polynomial. Ces problèmes appartiennent à la classe *MAX CSP* ou Maximum Constraint Satisfaction Problems, classe qui contient les problèmes qui peuvent s'écrire comme la maximisation du nombre de contraintes satisfaites d'un ensemble de contraintes.

Arora, Karger et Karpinski ont remarqué que les optimum des instances denses en moyenne des problèmes de *MAX SNP* sont "grands" et, que dans ce cas, une approximation additive donne une approximation relative. L'idée de base de [AKK95] est de représenter les problèmes comme des programmes mathématiques en nombres entiers de degré k d'une certaine forme, puis d'appliquer des résultats généraux d'approximation pour ces programmes.

Définition 1.3.1 *Un programme entier de degré d lisse de maximisation est de la forme :*

$$\begin{cases} \max p(x_1,\ldots,x_n) \\ x_i \in \{0,1\}, \quad i = 1,\ldots,n \end{cases}$$

où $p(x_1,\ldots,x_n)$ est un polynôme de degré d dans lequel les coefficients des monômes de degré i sont $O(n^{d-i})$.

Un *programme entier de degré d lisse de minimisation* est défini de manière similaire.

Théorème 1.3.2 (Arora, Karger et Karpinski [AKK95]) *Soit « opt » la valeur optimale d'un programme entier de degré d lisse. Pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe un algorithme polynomial qui retourne une solution x telle que :*

$$p(x_1,\ldots,x_n) \geq opt - \varepsilon n^d$$

dans le cas d'un programme de maximisation et

$$p(x_1,\ldots,x_n) \leq opt + \varepsilon n^d$$

dans le cas d'un programme de minimisation.

L'idée de l'algorithme évoqué dans le théorème précédent dans le cas $d = 2$ est de réduire l'instance du programme quadratique à un programme linéaire puis d'utiliser la technique d'arrondi aléatoire de Raghavan et Thompson [RT87] de transformation d'une solution fractionnaire du programme linéaire en une solution entière. Le temps nécessaire est de $n^{O(1/\varepsilon^2)}$. Pour le cas $d > 2$ on réduit de la même manière les programmes de degré d à des programmes de degré $d - 1$ jusqu'à obtenir un programme linéaire.

D'autres méthodes ont été appliquées pour l'étude des instances denses de problèmes de maximisation. Indépendamment, Fernandez de la Vega [Fer96] a obtenu un schéma d'approximation aléatoire en temps polynomial pour Max Cut sur les instances denses en moyenne.

1.3.3 Problèmes de minimisation

Les instances denses de problèmes de minimisation ont été également étudiées. Dans [AKK95], Arora, Karger et Karpinski ont donné des schéma d'approximation en temps polynomial pour les instances uniformément denses de problèmes de minimisation suivants : Bisection, Separator et Min kCut. Pour ces derniers problèmes ils ont utilisé des idées supplémentaires par rapport à l'algorithme présenté précédemment car les valeurs des solutions optimales des instances denses des problèmes de minimisation peuvent être proches de zéro et dans ce cas une approximation additive ne fournit pas forcément une approximation relative.

Des résultats intéressants ont été démontrés sur les instances denses de quelques problèmes de couverture : Min Set Cover, Min Steiner Tree, Min Vertex Cover. En particulier, dans [KZ96] il est montré que Min Vertex Cover s'approxime mieux en temps polynomial sur les instances denses que sur les instances générales : il est approximable à un facteur $\frac{2}{2-\sqrt{1-\alpha}}$ près dans les graphes α-denses en moyenne et approximable à un facteur $\frac{2}{1+\alpha}$ près dans les graphes uniformément α-denses. De plus, Min Vertex Cover ne peut pas avoir de schéma d'approximation sur les instances denses en moyenne et donc ni sur les instances uniformément denses sous l'hypothèse $P \neq NP$ (résultat obtenu indépendamment par Karpinski et Zelikovsky [KZ96] et par Clementi et Trevisan [CT96]). Karpinski et Zelikovsky [KZ96] ont montré que Set Cover est approximable à un facteur $O(\log n)$ près sur les instances denses en moyenne.

Karpinski, Wirtgen et Zelikovsky [KWZ97] ont donné des algorithmes d'approximation à un facteur constant près pour les instances uniformément denses de Bandwidth sur les graphes orientés et non-orientés. Il reste comme problème ouvert l'étude de l'approximation de ce problème sur les instances denses en moyenne.

Sur les instances générales, TSP(1,2) est *MAX SNP*-difficile [PY93], donc n'a pas de schéma d'approximation en temps polynomial, et il est approximable à un facteur 2 près trivialement. Fernandez de la Vega et Karpinski [FK99] et indépendamment Fotakis et Spirakis [FS98] ont montré que TSP(1,2) restreint aux instances où le graphe formé avec les arêtes de poids 1 est uniformément α-dense et hamiltonien reste *MAX SNP*-difficile pour $\alpha < 1/2$. Ce dernier résultat implique que le problème de maximisation Longest Path est *MAX SNP*-difficile sur les graphes uniformément α-denses et hamiltoniens pour $\alpha < 1/2$. Il est facile de voir que Longest Path est approximable à un facteur constant près sur les graphes uniformément α-denses, constante qui dépend de α. Les instances denses sont mieux approximables que le problème général dans le cas de Longest Path, car ce dernier n'est pas approximable à un facteur constant près, à moins que $P = NP$ [KMR93].

Arora, Frieze et Kaplan [AFK96] ont construit une nouvelle procédure d'arrondi pour les problèmes d'affectation quadratique qu'ils ont utilisée pour établir des schémas pour les instances denses en moyenne de 0-1 QUADRATIC-ASSIGNMENT, MIN LINEAR ARRANGEMENT, MIN CUT LINEAR ARRANGEMENT, 0-1 BETWEENESS. Frieze et Kannan [FK96] ont utilisé le lemme de régularité de Szemerédi pour obtenir des schémas d'approximation.

Dans [Kar97] Karpinski a regroupé des résultats d'approximation et de non-approximation concernant les instances denses de problèmes d'optimisation.

1.3.4 Résultats principaux

Nous avons étudié la complexité d'approximation des instances denses de problèmes de la classe *MIN CSP*, plus exactement de problèmes qui peuvent s'écrire comme la minimisation du nombre de contraintes satisfaites parmi un ensemble de contraintes. Il s'agit des problèmes MIN kSAT, MIN kDNF et MIN Ek-LIN2, $k \geq 2$. Nous définissons ces problèmes formellement ci-après.

Étant données n variables booléennes $x_1, \ldots, x_n$, une *clause* est une expression de la forme $\ell_1 \vee \ldots \vee \ell_k$ où ℓ_i, $1 \leq i \leq k$ sont de littéraux et elle est satisfaite par une assignation si au moins un littéral est *vrai* dans cette assignation. Une conjonction est de la forme $\ell_1 \wedge \ldots \wedge \ell_k$ et elle est satisfaite par une assignation si tous les littéraux ont la valeur *vrai* dans cette assignation.

MIN kSAT
Entrée : Un ensemble de m clauses $C_1, \ldots, C_m$ sur n variables booléennes où chaque C_j contient au plus k variables.
Sortie : Une assignation qui minimise le nombre de clauses satisfaites.

MIN EkSAT est la version de MIN kSAT où chaque clause contient exactement k littéraux.

MIN kDNF
Entrée : Un ensemble de m conjonctions $C_1, \ldots, C_m$ sur n variables booléennes où chaque C_j contient au plus k variables.
Sortie : Une assignation qui minimise le nombre de conjonctions satisfaites.

Soit n variables $x_1, \ldots, x_n$ sur le corps de Galois GF[2] et $\oplus$ l'addition modulo 2. Une *équation* est une expression de la forme $x_{i_1} \oplus \ldots \oplus x_{i_k} = 0$ ou $x_{i_1} \oplus \ldots \oplus x_{i_k} = 1$.

MIN Ek-LIN2
Entrée : Un ensemble m d'équations sur n variables $x_1, \ldots, x_n$ sur GF[2] où chaque équation a exactement k variables.
Sortie : Une assignation aux variables qui minimise le nombre d'équations satisfaites.

Dans [4] nous avons considéré les instances denses d'un premier problème de minimisation portant sur des formules booléennes, il s'agit du problème MIN EQUIVALENCE.

Étant données n variables booléennes $x_1, \ldots, x_n$, une *équivalence* est une expression de la forme $\ell_i \equiv \ell_j$ où ℓ_i, ℓ_j sont des littéraux et elle est satisfaite par une assignation si elle donne la même valeur de vérité (*vrai* ou *faux*) à ℓ_i et ℓ_j.

MIN EQUIVALENCE
Entrée : Un ensemble d'équivalences.
Sortie : Une assignation aux variables qui minimise le nombre d'équivalences satisfaites.

Ce problème, aussi connu sous le nom de MIN EQUIVALENCE DELETION a été montré *MAX SNP*-difficile dans [GVY93] et n'admet donc pas de schéma d'approximation en temps polynomial. En revanche, il est approximable à un facteur $O(\log n)$ près sur les instances générales. Ce problème est aussi clairement équivalent au problème MIN E2-LIN2 mentionné précédemment.

1.3.4.a Instances uniformément denses

La complexité de MIN EQUIVALENCE sur les instances uniformément denses est établie par le théorème suivant:

Théorème 1.3.3 ([4]) *Les instances uniformément denses de* MIN EQUIVALENCE *ont un schéma d'approximation en temps polynomial.*

L'idée pour montrer cela a été de définir un nouveau problème PAIRED BISECTION, assez proche de BISECTION, et équivalent du point de vue approximation (sous la L-réduction) avec MIN EQUIVALENCE et d'établir un schéma d'approximation en temps polynomial pour les instances uniformément denses de ce nouveau problème en utilisant les idées du schéma d'approximation en temps polynomial de [AKK95] pour BISECTION.

Une *bisection* dans un graphe non orienté est une partition de l'ensemble des sommets en deux parties de tailles égales. La valeur de la bisection est le nombre d'arêtes ayant une extrémité dans chaque partie. Le problème BISECTION consiste, étant donné un graphe G, à trouver une bisection de G de valeur minimum. Étant donné une partition de l'ensemble des sommets en paires, une bisection de G est *admissible* si elle coupe chaque paire de l'ensemble des paires. Le problème PAIRED BISECTION consiste, étant donné un graphe $G = (V(G), E(G))$ et une partition de $V(G)$ en paires, à trouver une bisection admissible de G de valeur minimum.

Le schéma d'approximation en temps polynomial que nous avons proposé pour les instances uniformément denses de PAIRED BISECTION [4] est constitué de deux algorithmes (comme dans [AKK95] pour la BISECTION). Le premier garantit une bonne solution quand l'optimum du problème est $O(n^2)$, le second garantit une bonne solution quand l'optimum du problème est $\Omega(n^2)$. Quand l'optimum est grand, l'idée consiste à écrire le problème comme un programme entier de degré 2 lisse puis à utiliser la méthode de [AKK95] qui fournit une solution avec une erreur additive de l'ordre $O(n^2)$. Quand l'optimum est petit, l'idée de l'algorithme est de réaliser un échantillonnage exhaustif, plus exactement de tirer au hasard un ensemble de paires de taille $O(\log n)$ et de prendre comme solution la meilleure obtenue en "complétant" chaque possibilité de placer ces paires. Pour "compléter" une solution partielle nous procédons en deux étapes : premièrement, nous plaçons les paires pour lesquelles nous sommes surs ("avec grande probabilité") puis nous appliquons un algorithme glouton. L'algorithme obtenu est un algorithme aléatoire qui peut être dérandomisé comme dans [AKK95].

Nous avons généralisé le résultat obtenu pour MIN EQUIVALENCE aux deux classes de problèmes MIN kSAT, $k \geq 2$ et MIN Ek-LIN2, $k \geq 3$. Les instances générales des problèmes MIN kSAT sont *MAX SNP*-difficiles pour tout $k \geq 2$ [KKM94], et approximables à un facteur $2(1 - 1/2^k)$ près [BTV96]. A la différence de MIN kSAT, les problèmes MIN Ek-LIN2 sont extrêmement difficiles à approximer pour tout $k \geq 3$, ils ne sont pas approximables en temps polynomial à un facteur $n^{\Omega(1)/\log\log n}$ près à moins que $P = NP$ [ABSS93], [KST97], [DKS98], [DKRS00]. Il est facile de voir que MIN Ek-LIN2 est équivalent à la version d'arité k du problème NEAREST CODEWORD (cf. [KST97], [10]) défini comme suit :

NEAREST CODEWORD
Entrée : Une matrice A de taille $n \times m$ sur $GF[2]$ et un vecteur $y \in GF[2]^m$.
Sortie: Un vecteur $x \in GF[2]^n$ qui minimise la distance de Hamming entre xA et y.

Théorème 1.3.4 ([10]) *Les instances uniformément denses de* MIN E3-LIN2 *ont un schéma d'approximation en temps polynomial.*

La complexité des instances uniformément denses de deux classes de problèmes MIN kSAT et MIN Ek-LIN2 est établie par le théorème suivant:

Théorème 1.3.5 ([13]) *Les instances uniformément denses de* MIN kSAT, $k \geq 2$ *et* MIN Ek-LIN2, $k \geq 3$ *ont un schéma d'approximation en temps polynomial.*

Comme dans le cas de MIN EQUIVALENCE, le schéma d'approximation que nous avons donné pour MIN kSAT, $k \geq 2$ et MIN Ek-LIN2 $k \geq 3$ s'appuie sur deux algorithmes, un qui est bon quand l'optimum est grand (c'est la même idée que précédemment) et un autre qui marche bien quand l'optimum est petit. Dans le cas des optimum petits, l'idée de l'algorithme est la même mais pour MIN E3-LIN2 [10] nous utilisons une nouvelle technique d'échantillonnage pour les graphes. Pour montrer l'existence d'un schéma d'approximation en temps polynomial pour MIN EkSAT et MIN Ek-LIN2 nous avons étendu la technique d'échantillonnage pour les graphes utilisée pour MIN E3-LIN2 au hypergraphes k-uniformes pour $k \geq 3$.

Récemment, un premier algorithme polynomial avec un facteur d'approximation sous-linéaire, $O(n/\log n)$, a été établi pour le problème général MIN Ek-LIN2 [BK01]. Ainsi, l'amélioration en facteur d'approximation pour les instances uniformément denses par rapport aux instances générales pour MIN Ek-LIN2 est la meilleure connue parmi les problèmes de satisfaction de contraintes NP-difficiles.

Certains problèmes d'optimisation portant sur des variables booléennes n'admettent pas de schéma d'approximation en temps polynomial sur les instances uniformément denses. Un exemple d'un tel problème est MIN 2DNF. En fait, on peut rendre uniformément denses les instances de MIN 2DNF, sans changer la valeur de l'optimum, en ajoutant des copies disjointes des variables originales, puis en ajoutant toutes les conjonctions ayant exactement une variable originale et une copie. Comme MIN 2DNF n'a pas de schéma d'approximation en temps polynomial, les instances uniformément denses de MIN 2DNF n'ont pas de schéma d'approximation en temps polynomial. Ainsi le problème plus général MIN GEN2SAT défini par Hochbaum et Pathria dans [HP00] consistant à minimiser le nombre de "genclauses" satisfaites, où une genclause est une fonction booléenne portant sur 2 variables, n'a pas de schéma d'approximation en temps polynomial sur les instances uniformément denses.

1.3.4.b Instances denses en moyenne

Nous avons montré que les instances denses en moyenne de MIN EkSAT et MIN Ek-LIN2, $k \geq 2$, sont aussi difficiles à approximer que les instances générales de ces problèmes [13]. L'idée est de construire une réduction du cas général vers le cas particulier en doublant le nombre de variables et considérant toutes les clauses ou équations sur exactement k variables.

1.4 Instances cubiques particulières

Dans [1, 6] nous avons étudié avec Miklos Santha et Zsolt Tuza l'approximation des instances cubiques et hamiltoniennes du problème LONGEST PATH ainsi que certaines variantes.

1.4.1 Introduction

Les problèmes LONGEST PATH et LONGEST CYCLE ont été montrés *NP*-complets en 1972 par Karp [Kar72]. Monien [Mon84] a donné un algorithme pour trouver une chaîne de longueur k en temps $O(k!nm)$ où n et m sont respectivement le nombre de sommets et le nombre d'arêtes du graphe. Karger, Motwani et Ramkumar [KMR93] ont donné un algorithme polynomial qui trouve une chaîne de longueur $\Omega(\log n)$ dans n'importe quel graphe qui est *1-dur*. Un *graphe* est 1-dur si pour n'importe quel ensemble de sommets non-vide S, le nombre de composantes connexes qui reste en enlevant S du graphe est au plus $|S|$. Un résultat similaire a aussi été obtenu par Fürer et Raghavachari [FR94]. En fait, Fürer et Raghavachari donnent une approximation à un terme additif 1 près en temps polynomial pour le problème qui consiste à trouver dans un graphe un arbre couvrant dont le degré maximum est minimal. Comme un graphe 1-dur contient au moins un arbre couvrant de degré maximum au plus 3 [Win89], leur algorithme trouve une chaîne de longueur $\Omega(\log n)$. Tout graphe hamiltonien étant 1-dur, ces algorithmes peuvent être utilisés en particulier pour trouver de telles chaînes dans les graphes qui contiennent un cycle hamiltonien. Alon, Yuster et Zwick [AYZ94] ont généralisé ce résultat en donnant un algorithme polynomial qui, pour toute constante $c > 0$, trouve une chaîne de longueur $c \log n$ dans n'importe quel graphe qui contient une telle chaîne. Trouver une chaîne de longueur $\omega(\log n)$ en temps polynomial est un problème ouvert même pour les graphes hamiltoniens.

1.4.2 Résultats principaux

D'un point de vue négatif, Karger, Motwani et Ramkumar [KMR93] ont prouvé que, à moins que $P = NP$, LONGEST PATH n'est pas approximable à un facteur constant près en temps polynomial. Leur preuve est constituée de deux parties. Premièrement, ils ont montré que LONGEST PATH n'a pas de schéma d'approximation en temps polynomial, à moins que $P = NP$. Ils ont montré ceci même quand les instances sont restreintes aux graphes hamiltoniens. Ensuite, ils ont donné un schéma d'auto-amélioration pour le problème, en montrant qu'un algorithme polynomial qui donne une approximation à un facteur constant près pour une *certaine* constante peut être transformé en un algorithme polynomial qui donne une approximation à un facteur constant près pour *n'importe quelle* constante. Ces résultats restent valables aussi dans le cas où le degré maximum du graphe est borné par une constante supérieure à quatre. Mais leur schéma d'auto-amélioration ne conserve pas la propriété que le graphe est hamiltonien, et ils se demandent si LONGEST PATH reste non approximable à un facteur constant près en temps polynomial pour les graphes hamiltoniens, sous l'hypothèse où $P \neq NP$.

Nous avons montré un résultat négatif plus fort que la question précédente ouverte jusque là.

Théorème 1.4.1 ([1, 6]) *Si $P \neq NP$, LONGEST PATH dans les graphes cubiques et hamiltoniens n'est pas approximable à un facteur constant près en temps polynomial.*

Pour montrer cela, premièrement, nous avons donné un schéma d'auto-amélioration pour LONGEST PATH qui préserve la propriété que le graphe est hamiltonien quand les graphes sont en plus cubiques. Le fait que LONGEST PATH reste *NP*-complet même pour les graphes cubiques a été montré par Garey, Johnson et Tarjan [GJT76]. De plus nous avons montré que ce problème n'a pas de schéma d'approximation polynomial dans les graphes cubiques et hamiltoniens, à moins que $P = NP$. La technique standard pour montrer qu'un problème d'optimisation n'a pas de schéma d'approximation en temps polynomial consiste à montrer un résultat plus fort, à savoir qu'il est APX-difficile sous la L-réduction. Mais ici on ne peut pas procéder ainsi parce que si $NP \neq coNP$ alors ce résultat plus fort n'est pas vrai pour des problèmes pour lesquels la valeur d'une solution optimum est connue. Cet argument est analogue à celui utilisé dans le résultat de Megiddo et Papadimitriou [MP91] qui ont montré qu'une fonction *FNP*-complet ne peut pas être totale, à moins que $NP = coNP$.

Théorème 1.4.2 ([1, 6]) *Si $NP \neq coNP$ alors un problème d'optimisation pour lequel la valeur d'une solution optimum est connue ne peut pas être APX-difficile sous la L-réduction.*

En utilisant un raffinement du théorème de Cook sur la *NP*-difficulté de 3SAT nous avons prouvé que SATISFIABLE MAX 3SAT n'a pas de schéma d'approximation en temps polynomial, à moins que $P = NP$. L'idée pour montrer maintenant que LONGEST PATH sur les graphes cubiques et hamiltoniens n'a pas de schéma, est de construire une L-réduction des instances satisfaisables de MAX 3SAT à notre problème.

Le résultat précédent avec le schéma d'auto-amélioration impliquent que LONGEST PATH n'est pas approximable à un facteur constant près en temps polynomial pour aucune constante dans les graphes cubiques et hamiltoniens, à moins que $P = NP$. Un résultat similaire suit immédiatement pour LONGEST CYCLE dans les graphes cubiques et hamiltoniens.

Karger, Motwani et Ramkumar [KMR93] ont montré que pour chaque $\varepsilon > 0$, LONGEST PATH n'est pas approximable à un facteur $2^{O(\log^{1-\varepsilon} n)}$ près, à moins que $NP \subseteq DTIME(2^{O(\log^{1/\varepsilon} n)})$. Nous avons montré le même résultat pour LONGEST PATH dans les graphes cubiques et hamiltoniens.

Théorème 1.4.3 ([1, 6]) *Pour chaque $\varepsilon > 0$,* LONGEST PATH *dans les graphes cubiques et hamiltoniens n'est pas approximable à un facteur $2^{O(\log^{1-\varepsilon} n)}$ près, à moins que $NP \subseteq DTIME(2^{O(\log^{1/\varepsilon} n)})$.*

1.5 Problèmes totaux

Outre les problèmes précédemment étudiés où la valeur optimale est connue, nous nous sommes intéressés dans [1, 2, 6, 11] avec Miklos Santha et Zsolt Tuza, aux problèmes totaux pour lesquels l'existence d'une solution est garantie.

1.5.1 Introduction

Pour un problème de décision, on s'intéresse à l'existence d'une solution pour chaque instance. En revanche, pour un problème de recherche associé à un problème de *NP*, on souhaite *trouver* une solution pour chaque instance si une telle solution existe. Selman [Sel88] a montré que pour tous les problèmes *NP*-complets, le problème de décision et le problème de recherche associé sont polynomialement équivalents. Pourtant, en toute généralité, il est possible que le problème de décision et le problème de recherche ne soient pas polynomialement équivalents. C'est le cas, par exemple lorsque, l'existence d'une solution est garantie : le problème de décision est alors trivial, néanmoins on ne connaît pas toujours d'algorithme polynomial pour le problème de recherche.

Définissons plus formellement les problèmes totaux. Un problème de décision de *NP* est caractérisé par une relation décidable en temps polynomial R, plus exactement, étant donnée une instance x le problème consiste à décider s'il existe une solution y telle que $R(x,y)$. *Le problème de recherche associé à ce problème de décision* est le suivant : étant donnée une instance x *trouver* une solution y telle que $R(x,y)$ si une telle solution existe, sinon répondre « non ». Une *relation* R est *totale* si pour n'importe quel x il existe un y tel que $R(x,y)$. Un problème caractérisé par une relation totale est appelé *problème total*.

Parmi les problèmes de recherche on distingue les classes suivantes :
- *FNP* (l'abréviation de « *Fonctional NP* ») est la classe des problèmes de recherche associés aux problèmes de décision de *NP*.
- *TFNP* est la sous-classe des problèmes de *FNP* caractérisés par une relation totale.
- *FP* est la sous-classe des problèmes de *FNP* qui peuvent être résolus en temps polynomial.
- $F(NP \cap coNP)$ est la classe des problèmes de recherche associés aux problèmes de décision de $NP \cap coNP$.

La classe *TFNP* a été introduite et étudiée par Meggido et Papadimitriou [MP91]. Des exemples de problèmes de cette classe appelés problèmes totaux, sont : FACTORING, SECOND HAMILTONIAN CYCLE, PIGEONHOLE SUBSET-SUM, ANOTHER HAMILTONIAN PATH et HAPPYNET. Le problème de factorisation (FACTORING) consiste à trouver la décomposition d'un entier en nombres premiers. Pratt a montré que ce problème est dans $NP \cap coNP$. Les chercheurs continuent à étudier les questions ouvertes autour de ce problème, en particulier assez récemment, Agarwal, Kayal et Saxena [AKS02] ont donné un algorithme qui teste si un nombre entier est premier en temps polynomial. On ne connaît toujours pas d'algorithme pour trouver la décomposition en nombres premiers d'un nombre.

La classe *TFNP*, peu connue dans la littérature, est pourtant très intéressante. C'est une raison pour laquelle nous présenterons ensuite quelques propriétés qui la caractérisent.

Meggido et Papadimitriou ont introduit une réduction, la F-réduction, entre deux problèmes de recherche correspondant à la réduction Karp entre deux problèmes de décision. La Karp-réduction de Cook [Coo71] qui montre que SAT est *NP*-complet est aussi une F-réduction et donc FSAT est *FNP*-complet. En utilisant l'équivalence polynomiale entre SAT et FSAT, Papadimitriou [Pap94b] a montré que $FP = FNP$ si et seulement si $P = NP$. Megiddo et Papadimitriou [MP91] ont établi une caractérisation de la classe *TFNP* : plus exactement $TFNP = F(NP \cap coNP)$. Comme $P \subseteq NP \cap coNP$ nous avons que $FP \subseteq TFNP$ et donc

$$FP \subseteq TFNP \subseteq FNP.$$

En utilisant la caractérisation précédente de *TFNP* on montre que :

Théorème 1.5.1 (Megiddo, Papadimitriou [MP91]) *Si* $NP \neq coNP$ *et* $P \neq NP \cap coNP$ *il existe un problème de TFNP qui n'est pas dans FP et aucun problème de TFNP n'est FNP-difficile.*

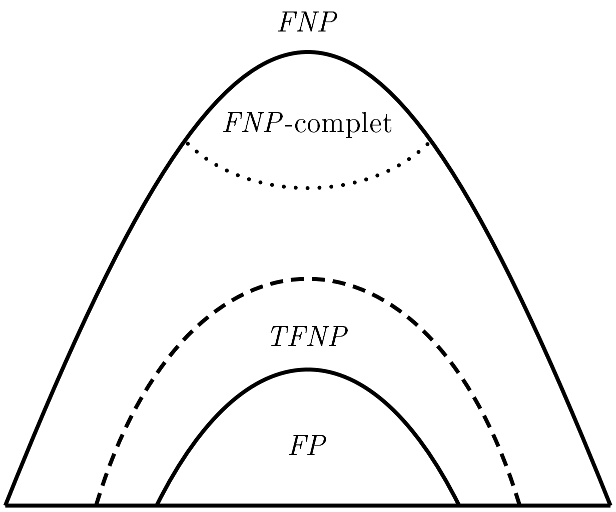

FIG. 1.1 – *Les 3 classes dans l'hypothèse où $NP \neq coNP$ et $P \neq NP \cap coNP$*

La figure 1.1 illustre les inclusions entre les 3 classes *FP*, *FNP*, *TFNP* dans l'hypothèse où $NP \neq coNP$ et $P \neq NP \cap coNP$.

Ladner [Lad75] a montré que sous l'hypothèse où $P \neq NP$, il existe des problèmes qui ne sont ni polynomiaux ni *NP*-complets. La question de l'approximation est aussi intéressante pour ces problèmes pour lesquels aucun algorithme polynomial n'est connu. Dans notre thèse de doctorat [3] et dans [1, 2, 6, 11] nous avons considéré, pour la première fois à notre connaissance, l'approximation de certains problèmes de *TFNP*. Les problèmes étudiés sont parmi les problèmes ci-dessus mentionnés.

1.5.2 Des arguments pour la totalité

Meggido et Papadimitriou [MP91] ont introduit certaines sous-classes de *TFNP* qui regroupent les problèmes en fonction de leur preuve d'existence d'une solution. Parmi ces classes on distingue les classes *PLS*, *PPP* et *PPA*.

Pour *PLS* (qui est une abréviation de l'appellation anglaise « **P**olynomial **L**ocal **S**earch ») on montre l'existence d'une solution en justifiant que sa recherche coïncide avec la recherche d'un optimum local. Cette classe a été introduite et étudiée dans [JPY88], [PSY90], [SY91], [Kre89]. Le problème HAPPYNET de Papadimitriou [Pap94a] est un exemple de problème de *PLS* :

HAPPYNET
Entrée : un graphe $G = (V,E)$ où l'ensemble des sommets $V = \{1,\dots,n\}$ et une fonction w qui associe des poids entiers relatifs aux arêtes de G.
Sortie : une assignation $x \in \{-1,1\}^n$, où x_i est la valeur assignée au sommet i de G, telle que pour chaque sommet i l'inégalité suivante ait lieu :

$$x_i \cdot \sum_{\{i,j\} \in E} x_j w(\{i,j\}) \geq 0.$$

L'appartenance de HAPPYNET à *PLS* est montrée par Hopfield [Hop82] et Papadimitriou [Pap94a, p. 230].

Une autre classe de *TFNP* est la classe *PPP* où *PPP* vient de « **P**olynomial **P**igeonhole **P**rinciple ». On montre l'appartenance d'un problème dans cette classe en justifiant l'existence d'une solution avec le principe des tiroirs. Un exemple d'un problème de *PPP* est :

PIGEONHOLE SUBSET-SUM
Entrée : un ensemble $\{a_1,\ldots,a_n\}$ d'entiers positifs tels que

$$\sum_{i=1}^{n} a_i < 2^n - 1.$$

Sortie : deux sous-ensembles disjoints et non-vides $S_1,S_2 \subseteq \{1,\ldots,n\}$ tels que

$$\sum_{i\in S_1} a_i = \sum_{i\in S_2} a_i \ .$$

PPA vient de l'anglais « **P**olynomial **P**arity **A**rgument » est la classe des problèmes pour lesquels on justifie la totalité en utilisant l'argument que dans un graphe il existe un nombre pair de sommets de degré impair. Smith a montré qu'un graphe avec des sommets de degré impair a un nombre pair de cycles hamiltoniens qui contiennent une certaine arête [Tut46]. Le problème suivant est donc total : étant donné un graphe avec des sommets de degré impair et un cycle hamiltonien C, trouver un autre cycle hamiltonien différent de C. La preuve de Smith n'est pas constructive. Thomason [Tho78] a donné un algorithme simple et élégant pour trouver un deuxième cycle hamiltonien étant donné le premier. Utilisant l'idée de Thomason, Papadimitriou a montré ([Pap94b, p. 501]) que le problème précédent est dans *PPA*. Un autre problème montré dans *PPA* par Papadimitriou ([Pap94b, Théorème 10, p. 516]) est le suivant :

ANOTHER HAMILTONIAN PATH
Entrée : un graphe G et une chaîne hamiltonienne P dans G.
Sortie : soit une autre chaîne hamiltonienne de G différent de P, soit une chaîne hamiltonienne dans le complémentaire de G.

1.5.3 SUBSET-SUM EQUALITY

Le problème SUBSET-SUM EQUALITY est défini ainsi : étant donnés n entiers positifs, décider s'il existe deux sous-ensembles disjoints et non vides avec la même somme. Ce problème introduit par Woeginger et Yu [WY92] a un lien avec le problème SUBSET-SUM, une variante connue de KNAPSACK. L'entrée d'une instance de SUBSET-SUM est constituée d'un ensemble de n entiers positifs $a_1,\ldots,a_n$ ainsi que d'un autre entier positif b. Le problème consiste à décider s'il existe un sous-ensemble de $\{a_1,\ldots,a_n\}$ dont la somme des éléments est égale à b. Dans la version optimisation, le but est de trouver un ensemble d'entiers dont la somme est la plus grande possible tout en ne dépassant pas b. Ibarra et Kim [IK75] ont donné un schéma d'approximation en temps complètement polynomial pour SUBSET-SUM.

Woeginger et Yu [WY92] ont défini un problème d'optimisation lié à SUBSET-SUM EQUALITY que nous appelons SUBSET-SUM RATIO : on demande de trouver deux sous-ensembles disjoints tels que le rapport entre les sommes est le plus proche possible de 1. Woeginger et Yu ont, dans le même article, prouvé la *NP*-complétude de SUBSET-SUM EQUALITY et donné un algorithme polynomial qui est une approximation à un facteur 1,324 près pour SUBSET-SUM RATIO. Savoir si ce problème a un schéma d'approximation en temps polynomial a été laissé comme question ouverte [WY92]. Comme leur preuve de *NP*-complétude ne montre pas que ce problème est *NP*-complet au sens fort, ce problème peut même avoir un schéma d'approximation en temps complètement polynomial. Nous avons répondu à la question de Woeginger et Yu affirmativement, en montrant une assertion plus forte et donnant ainsi le meilleur résultat possible d'approximation pour ce problème.

Théorème 1.5.2 ([2, 11]) SUBSET-SUM RATIO *a un schéma d'approximation en temps complètement polynomial.*

L'idée pour montrer cela a été d'abord d'établir un algorithme pseudo-polynomial pour le problème puis d'utiliser la technique de normalisation appliquée pour KNAPSACK.

Le problème SUBSET-SUM EQUALITY a une instance spéciale intéressante. Considérons le cas où la somme de n nombres est plus petite que $2^n - 1$. Nous avons déjà mentionné ce problème, appelé PIGEONHOLE SUBSET-SUM, dans la section 1.5.2 où nous avons vu qu'en utilisant le principe des tiroirs, il existe toujours deux sous-ensembles disjoints et non vides dont les sommes sont égales. Néanmoins, il n'existe pas à ce jour d'algorithme polynomial pour trouver effectivement de tels sous-ensembles.

Bien que résoudre PIGEONHOLE SUBSET-SUM en temps polynomial reste une question encore ouverte, nous avons montré que, en un certain sens, ce problème s'approxime beaucoup mieux en temps polynomial que SUBSET-SUM EQUALITY. Dans ce but, nous avons défini un nouveau problème d'optimisation que nous appelons SUBSET-SUM DIFFERENCE. La valeur d'une solution est ici la valeur absolue de la différence entre les sommes des éléments de deux sous-ensembles plus 1. Le même problème, avec la contrainte supplémentaire que la somme des nombres est plus petite que $2^n - 1$, est appelé PIGEONHOLE SUBSET-SUM DIFFERENCE.

L'existence d'un schéma d'approximation en temps complètement polynomial pour SUBSET-SUM RATIO implique que, pour chaque constante k, il existe un algorithme polynomial qui donne une approximation à un facteur $2^n/n^k$ près pour PIGEONHOLE SUBSET-SUM DIFFERENCE.

Nous avons établi plus généralement le résultat suivant :

Théorème 1.5.3 ([2, 11]) SUBSET-SUM DIFFERENCE *est approximable à un facteur $K/n^{\Omega(\log n)}$ près en temps polynomial où K est le plus grand entier de l'instance.*

Ce dernier résultat a comme conséquence que PIGEONHOLE SUBSET-SUM DIFFERENCE est approximable à un facteur $2^n/n^{\Omega(\log n)}$ près.

D'autre part, nous avons établi le résultat négatif suivant :

Théorème 1.5.4 ([2, 11]) SUBSET-SUM DIFFERENCE *n'est pas approximable à un facteur 2^{n^k} près en temps polynomial pour chaque constante k, à moins que $P = NP$.*

Ces deux résultats permettent donc de conclure que PIGEONHOLE SUBSET-SUM DIFFERENCE est mieux approximable que SUBSET-SUM DIFFERENCE.

1.5.4 Another Longest Path (Cycle)

Longest Path et Longest Cycle sont deux problèmes bien connus dans la théorie des graphes. Nous avons considé l'approximation de deux problèmes totaux liés à ces derniers qui font partie de la classe *PPA* et donc qui ne sont pas *NP*-difficiles à moins que $NP = coNP$ et pour lesquels aucun algorithme polynomial n'est connu.

Lovász a montré [Lov79] que la somme du nombre de chaînes hamiltoniennes d'un graphe G et du nombre de chaînes hamiltoniennes dans son complément $\bar{G}$ est un nombre pair. Nous avons appelé dans la section 1.5.2 Another Hamiltonian Path le problème qui consiste à trouver une autre chaîne hamiltonienne dans un graphe G ou dans son complément $\bar{G}$ quand on connaît déjà une chaîne hamiltonienne de G. On a vu dans la section 1.5.2 que ce problème est un problème total qui fait partie de la classe *PPA*. Nous avons montré dans [3] qu'on peut obtenir une chaîne de longueur $n-2$ en temps polynomial dans un graphe G avec n sommets ou dans son complément $\bar{G}$ quand une chaîne hamiltonienne de G est déjà connu. Ainsi nous avons le résultat suivant :

Théorème 1.5.5 ([3]) *Le problème de maximisation associé à* Another Hamiltonian Path *a un schéma d'approximation en temps polynomial efficace.*

Papadimitriou [Pap94a] a montré que le problème suivant est *NP*-difficile : étant donnés un graphe G et un cycle hamiltonien C dans G, décider si G a un autre cycle hamiltonien. On a vu dans la section 1.5.2 que si le graphe G est cubique et si il a un cycle hamiltonien alors G contient au moins deux cycles hamiltoniens. Nous appelons Second Hamiltonian Cycle le problème de trouver un autre cycle hamiltonien dans un graphe cubique quand un cycle hamiltonien est donné. Ce problème appartient à la classe *PPA* [Pap94b, p. 501].

Nous avons étudié la complexité du problème d'optimisation associé qui consiste à trouver dans un graphe cubique et hamiltonien dans lequel on connaît un cycle hamiltonien C un cycle différent de C le longueur maximale. Notre résultat principal est :

Théorème 1.5.6 ([1, 6]) *Le problème de maximisation associé à* Second Hamiltonian Cycle *a un schéma d'approximation en temps polynomial efficace.*

1.6 La dureté d'un graphe

Nous terminons ce chapitre en étudiant un problème particulier, celui de la dureté d'un graphe.

Soit $G = (V,E)$ un graphe et soit $S \subset V$. On note par $c(G \setminus S)$ le nombre de composantes connexes du sous-graphe $G(V \setminus S)$. Un graphe G est t-*dur* si pour chaque sous-ensemble de sommets S avec $c(G \setminus S) \geq 2$ on a $c(G \setminus S) \leq \frac{|S|}{t}$. La dureté de G ("toughness" en anglais) introduite par Chvátal [Chv73], notée $\tau(G)$, est la plus grande valeur de t telle que G est t-dur. Donc, $\tau(G) = min\{\frac{|S|}{c(G \setminus S)} : S \subseteq V, c(G \setminus S) \geq 2\}$. Pour un graphe G, $\alpha(G)$ est la taille maximale d'un ensemble stable. La connexité de G, notée $k(G)$, est la taille minimale d'un ensemble de sommets S telle que $c(G \setminus S) \geq 2$.

La dureté d'un graphe est liée à la connexité du graphe. Il est clair qu'un graphe 1-dur est 2 connexe. Chvátal [Chv73] a montré qu'un graphe non complet G de connexité $k(G)$ vérifie $\tau(G) \leq \frac{k(G)}{2}$.

Bauer, Hakimi, Schmeichel ont montré [BHS90] que pour tout nombre rationnel positif fixé k il est *coNP*-complet de décider si un graphe est k-dur. Ce résultat implique que le calcul de la dureté d'un graphe est *NP*-difficile. Lors du groupe de travail sur l'hamiltonicité des graphes 2-durs (EIDMA Workshop on Hamiltonicity of 2-Tough Graphs) de 1995 Brandt a soulevé la question de la difficulté de l'approximation de la dureté d'un graphe. Nous avons répondu à sa question dans [17].

Considérons le problème de minimisation suivant :
MIN TOUGHNESS
Entrée : Un graphe $G = (V,E)$.
Sortie : Un ensemble de sommets S de G avec la propriété $c(G \setminus S) \geq 2$ tel que le rapport $\frac{|S|}{c(G \setminus S)}$ est minimisé.

En utilisant la proposition suivante de Chvátal nous avons montré notre résultat principal :

Proposition 1.6.1 ([Chv73]) *Pour un graphe G avec n sommets, $\frac{k(G)}{\alpha(G)} \leq \tau(G) \leq \frac{n-\alpha(G)}{\alpha(G)}$.*

Théorème 1.6.2 ([17]) *Si NP $\neq$ ZPP, pour tout $\varepsilon > 0$,* MIN TOUGHNESS *n'est pas approximable à un facteur $\frac{1}{2}(\frac{n}{2})^{1-\varepsilon}$ près en temps polynomial où n est le nombre de sommets du graphe.*

Dans la suite nous allons nous restreindre aux graphes avec une dureté bornée. Soit $\Delta^*(G)$ le minimum des degrés maximum des arbres couvrants de G. Calculer $\Delta^*(G)$ est un problème *NP*-difficile. Fürer et Raghavachari ont donné en [FR94] un algorithme d'approximation qui trouve un arbre couvrant de G de degré au plus $\Delta^*(G)+1$. Pour montrer notre résultat positif d'approximation nous utilisons les deux affirmations suivantes :

Théorème 1.6.3 ([FR94]) *Soit G un graphe. Alors $\Delta^*(G) - 3 < \frac{1}{\tau(G)} \leq \Delta^*(G)$.*

Proposition 1.6.4 ([17]) *Si un graphe G vérifie $\tau(G) < \frac{1}{k-1}$ pour un entier $k \geq 2$ alors $\Delta^*(G) \geq k$.*

Théorème 1.6.5 ([17]) MIN TOUGHNESS *est approximable à un facteur 4 près pour les graphes avec une dureté inférieure à $\frac{1}{3}$.*

En opposition avec ce dernier résultat, nous avons montré qu'il n'existe pas d'algorithme d'approximation à un facteur constant près pour déterminer la dureté des graphes avec une dureté bornée.

Théorème 1.6.6 ([17]) *Pour chaque constante $c > 1$ il existe une constante k telle qu'il est NP-difficile de décider si un graphe G avec une dureté bornée vérifie $\tau(G) \leq k$ ou $\tau(G) > kc$.*

Chapitre 2

Approximation différentielle

2.1 Introduction et définitions

Parallèlement à l'étude de l'approximation standard, certains chercheurs [ADP80, Zem81, DP96, HK01, MPT03] se sont intéressés dans les années 80, puis plus récemment, à un autre rapport qui mesure la valeur d'une solution non seulement par rapport à la valeur d'une solution optimale mais aussi par rapport à la valeur d'une pire solution.

Plus précisément la qualité d'une solution est appréhendée selon le rapport suivant :

Définition 2.1.1 (Rapport différentiel) *Étant donnée une instance x d'un problème d'optimisation A, une solution possible y de x a le* rapport différentiel

$$\delta(x,y) = \frac{val(x,y) - wor(x)}{opt(x) - wor(x)}.$$

Ce rapport a été conçu de façon à remédier à certains inconvénients du rapport standard.

Tout d'abord, le rapport standard peut conduire à considérer comme bon un algorithme qui, pour certaines instances, fournirait une pire solution. Par exemple, dans l'algorithme d'approximation à un facteur 2 près pour Min Vertex Cover, on cherche un couplage maximal et on prend comme solution l'ensemble des sommets incidents au couplage. Si le couplage trouvé est un couplage parfait, alors la solution fournie par l'algorithme est l'ensemble de tous les sommets, ce qui est une pire solution pour une instance de Min Vertex Cover.

Par ailleurs, certains problèmes d'optimisation équivalents, au sens où une solution optimale pour l'un définit une solution optimale pour les autres, n'ont pas nécessairement un statut équivalent selon le rapport standard. C'est en particulier le cas lorsqu'on a des problèmes dont la fonction objectif diffère d'une constante, ou deux problèmes dont les solutions réalisables sont complémentaires, ou encore deux problèmes équivalents au sens précédemment défini qui s'expriment pour l'un comme un problème de maximisation et pour l'autre comme un problème de minimisation.

Illustrons chacun de ces trois cas :

- Considérons l'exemple du problème TSP. Sahni et Gonzalez [SG76] ont montré que TSP n'est pas $2^{p(n)}$ approximable pour tout polynôme p, à moins que $P = NP$. Par contre, Metric TSP, la variante de TSP où les valeurs des arêtes satisfont l'inégalité triangulaire, est approximable à un facteur $\frac{3}{2}$ près (Christofides [Chr76]). Il est facile de voir qu'on peut transformer une instance de TSP en une instance de Metric TSP en

ajoutant à chaque arête une valeur au moins égale à la plus grande valeur des arêtes. Cette transformation ne préserve pas le rapport d'approximation standard, par contre elle préserve le rapport d'approximation différentiel ce qui montre que Metric TSP est différentiel équivalent à TSP.
- Considérons les problèmes Min Vertex Cover et Max Independent Set. Du point de vue approximation standard ces problèmes ont un statut très différent : le premier est approximable à un facteur 2 près, par contre le deuxième n'est pas approximable à un facteur $n^{1-\varepsilon}$ près si $coRP \neq NP$. Pourtant, pour tout graphe, le complémentaire d'un ensemble stable est une couverture des arêtes par des sommets et réciproquement. Cela veut dire que du point de vue approximation différentielle les deux problèmes sont équivalents.
- Le problème Max 2Sat consiste à trouver une assignation pour une formule 2Sat maximisant le nombre de clauses satisfaites. Min Delete 2Sat consiste à trouver une assignation pour une telle formule minimisant le nombre de clauses non-satisfaites. Les deux problèmes sont différentiel équivalents. En revanche, les meilleurs rapports d'approximation standard pour ces deux problèmes sont : Max 2Sat est approximable à un facteur 1,0741 près [FG95], par contre Min Delete 2Sat est approximable à un facteur $O(\log n)$ près [GVY93].

L'inconvénient de ce rapport est principalement lié au fait que la notion de pire solution n'est pas toujours facile à définir, plusieurs options étant parfois envisageables. Par exemple, pour le problème Max Independent Set on peut considérer comme pire solution l'ensemble vide ou bien un ensemble stable maximal de cardinalité minimale. Calculer ce dernier est un problème *NP*-difficile. Par conséquent, déterminer une pire valeur peut être *NP*-difficile, le rapport différentiel étant de ce fait plus difficile à étudier.

De façon similaire à l'approximation standard, présentons brièvement les définitions principales ainsi que les classes d'approximation différentielles.

Un algorithme donne une *approximation différentielle à un facteur $f(n)$ près*, $f(n) < 1$ en temps polynomial pour un problème d'optimisation si pour toute instance x de taille n du problème il calcule en temps polynomial une solution y telle que $\delta(x,y) \geq f(n)$. Plus exactement, pour un problème de minimisation un tel algorithme donne une solution y avec une valeur $val(x,y) \leq f(n)opt(x) + (1 - f(n))wor(x)$ et pour un problème de maximisation une solution y avec une valeur $val(x,y) \geq f(n)opt(x) + (1 - f(n))wor(x)$.

Un problème d'optimisation est *différentiel approximable à un facteur $f(n)$ près* en temps polynomial s'il existe un algorithme polynomial qui fournit une approximation différentielle à un facteur $f(n)$ près pour le problème. En particulier, un problème d'optimisation est *différentiel approximable à un facteur constant près* en temps polynomial s'il existe une constante $c < 1$ et un algorithme polynomial qui donne une approximation différentielle à un facteur c près pour le problème. Un problème d'optimisation a un *schéma différentiel d'approximation en temps polynomial* si pour toute constante $\varepsilon > 0$, il existe un algorithme polynomial $\mathcal{A}_\varepsilon$ qui soit une approximation à un facteur $(1 - \varepsilon)$ près du problème. Si le temps de calcul de l'algorithme est aussi polynomial en $1/\varepsilon$ alors on dit que le problème a un *schéma différentiel d'approximation en temps complètement polynomial*.

Définition 2.1.2 (DAPX, DPTAS, DEPTAS, DFPTAS) *DAPX est la classe des problèmes d'optimisation qui sont différentiel approximables à un facteur constant près en temps* *polynomial. L'ensemble des problèmes qui ont un schéma différentiel d'approximation en temps polynomial (respectivement schéma différentiel d'approximation en temps polynomial efficace, schéma différentiel d'approximation en temps complètement polynomial) est noté DPTAS (respectivement DEPTAS, DFPTAS).*

Une proposition facile à établir et qui nous permet de déduire un résultat négatif d'aproximation différentielle pour un problème de maximisation une fois qu'on a déjà un tel résultat en standard est :

Proposition 2.1.3 *Si un problème de maximisation est différentiel approximable à un facteur δ près, $0 < \delta < 1$ alors il est approximable à un facteur $1/\delta$ près.*

En effet, soit x une instance d'un problème de maximisation Q et soit y la solution réalisable de x calculée par un algorithme d'approximation pour Q. Alors,

$$\frac{val(x,y) - wor(x)}{opt(x) - wor(x)} \geqslant \delta \Rightarrow \frac{val(x,y)}{opt(x)} \geqslant \delta + (1-\delta)\frac{wor(x)}{opt(x)} \Rightarrow \frac{val(x,y)}{opt(x)} \geqslant \delta$$

2.2 Autour de SAT

Nous avons étudié avec Vangelis Paschos dans [12] l'approximation différentielle de problèmes de satisfiabilité.

2.2.1 Introduction

Les problèmes d'optimisation MAX et MIN SAT, MAX et MIN DNF, aussi bien que les versions de ces problèmes où la taille des clauses est bornée ou les nombres d'occurrences de chaque littéral est borné, sont bien étudiés du point de vue approximation standard. Pour une constante $k \geqslant 2$, MAX kDNF, est la version de MAX DNF où chaque clause a au plus k littéraux. Pour deux constantes $B,B' \geq 1$, MAX kDNF$(B,\bar{B}')$ est la version de MAX kDNF où chaque littéral positif apparaît au plus B fois et chaque littéral négatif au plus B' fois.

Plus précisément, MAX et MIN SAT sont approximables à un facteur constant près et n'ont pas de schéma [PY88]. MAX kDNF, $k \geq 2$ est approximable à un facteur constant près (voir [Tre96] pour le meilleur facteur d'approximation), et n'a pas de schéma d'approximation en temps polynomial. MAX DNF est équivalent à MAX INDEPENDENT SET donc il n'est pas approximable à un facteur $n^{1-\varepsilon}$ près pour tout $\varepsilon > 0$, à moins que $coRP = NP$ [Hås96]. MIN 2DNF n'a pas de schéma d'approximation en temps polynomial et est approximable à un facteur $\log n \log\log n$ près [ENSS95]. Klauck [Kla96] a montré que MIN 3DNF n'est pas approximable à un facteur $n^{1-\varepsilon}$ près pour tout $\varepsilon > 0$, à moins que $P = NP$. L'étude de l'approximation différentielle des problèmes de satisfiabilité nous a amené à établir des liaisons entre ces problèmes et certains problèmes définis sur des graphes. Il s'agit de MAX et MIN MAXIMAL INDEPENDENT SET (ou MAX et MIN INDEPENDENT DOMINATING SET) et MAX et MIN MINIMAL VERTEX COVER. La différence entre MIN VERTEX COVER et MIN MINIMAL VERTEX COVER est que les solutions réalisables de MIN VERTEX COVER ne sont pas forcément minimales. Ces problèmes sont définis formellement comme suit :

MIN (MAX) MINIMAL VERTEX COVER
Entrée : un graphe $G = (V,E)$.

Sortie : une couverture (un ensemble $S \subseteq V$ tel que $\forall (u,v) \in E$, $u \in S$ ou $v \in S$) minimale de taille minimum (maximum).

MIN (MAX) INDEPENDENT DOMINATING SET
Entrée : un graphe $G = (V,E)$.
Sortie : un ensemble stable (un ensemble $S \subseteq V$ tel que $\forall u,v \in S$, $(u,v) \notin E$) maximal de taille minimum (maximum).

MIN (MAX) INDEPENDENT DOMINATING SET-B et MIN (MAX) MINIMAL VERTEX COVER-B sont les versions des problèmes précédents sur les graphes avec un degree maximum bornée par B.

MIN VERTEX COVER est approximable à un facteur 2 près et MIN INDEPENDENT DOMINATING SET est approximable à un facteur B près, où B est le degré maximum du graphe et n'a pas de schéma d'approximation en temps polynomial [Kan92], alors que MAX MINIMAL VERTEX COVER n'a pas été étudié du point de vue approximation standard.

Les problèmes considérés dans cette partie ont la propriété que calculer les valeurs de la solution optimale et de la pire solution est NP-difficile. Par exemple, considérant une instance ϕ de MAX kSAT, sa pire solution est une assignation satisfaisant un nombre minimum de clauses de ϕ, i.e., une solution optimale pour MIN kSAT sur ϕ. Remarquons aussi que, étant donné un graphe $G = (V,E)$, le complément d'une couverture (resp., ensemble stable) par rapport à V est un ensemble stable (resp., couverture) de G. En d'autres termes, les valeurs de la fonction objectif (optimum et pire) de MIN (MAX) MINIMAL VERTEX COVER et de MIN (MAX) INDEPENDENT DOMINATING SET sont liées par une transformation affine. Comme le rapport différentiel d'approximation est stable sous les transformations affines, nous déduisons que MIN (MAX) MINIMAL VERTEX COVER et MAX (MIN) INDEPENDENT DOMINATING SET sont différentiel équivalents.

2.2.2 Résultats

Il est facile de voir que MAX SAT et MIN DNF aussi bien que MIN SAT et MAX DNF sont différentiel équivalents. L'idée pour voir cela, consiste à associer à chaque clause $C = \ell_1 \vee \ldots \vee \ell_t$ d'une instance de MAX ou MIN SAT la conjonction des négations des littéraux de C, notée $C' = \bar{\ell}_1 \wedge \ldots \wedge \bar{\ell}_t$. C est satisfaisable si et seulement si C' n'est pas. Cette construction nous permet de conclure que toute variante de MAX SAT (respectivement MIN SAT) est différentiel équivalente à la version correspondante de MIN DNF (respectivement MAX DNF). En plus, Toulouse a montré [Tou01] que MAX kSAT et MIN kSAT sont différentiel équivalents.

Utilisant les équivalences entre ces problèmes mentionnées précédemment, la proposition 2.1.3 et le fait que pour $k \geqslant 2$, $B \geqslant 2$ et $B' \geqslant 1$, MAX kSAT$(B,\bar{B}')$ et MAX kDNF$(B,\bar{B}')$ n'ont pas de schéma d'approximation standard en temps polynomial [ACG+99], nous déduisons que : pour $k \geqslant 2$, et $(B,B') \geqslant (2,1)$, ou $(B,B') \geqslant (1,2)$, MAX kSAT$(B,\bar{B}')$, MAX kDNF$(B,\bar{B}')$, MIN kSAT$(B,\bar{B}')$ et MIN kDNF$(B,\bar{B}')$ n'ont pas de schéma d'approximation différentiel en temps polynomial à moins que $P = NP$.

En s'inspirant du résultat de Crescenzi, Silvestri et Trevisan [CST96] de l'équivalence entre l'approximation standard de MIN VERTEX COVER et MIN SAT, nous avons réduit MIN VERTEX COVER à MIN SAT. Utilisant l'équivalence différentielle d'approximation entre MIN VERTEX COVER et MAX INDEPENDENT SET, le fait que la pire solution de toute instance du dernier problème est l'ensemble vide et le résultat d'inapproximation de Hastad [Hås96] nous avons obtenu le résultat suivant :

Théorème 2.2.1 ([12]) *A moins que coRP = NP,* MIN SAT(B,$\bar{B}$), $B \geq 1$ *n'est pas différentiel* $\frac{1}{m^{1-\varepsilon}}$*-approximable pour tout* $\varepsilon > 0$*, où* m *est le nombre des clauses de l'instance.*

La réduction standard entre MIN SAT et MIN VERTEX COVER présentée dans [CST96] n'est pas une réduction en différentiel car pour définir une solution pour la formule de MIN SAT nous avons besoin d'une couverture minimale. Nous avons montré que MIN kSAT(B,$\bar{B}$) est différentiel réductible à MIN MINIMAL VERTEX COVER-B' où $B' = kB$. Une preuve similaire nous permet d'établir que MAX kSAT(B,$\bar{B}$) se réduit à MAX MINIMAL VERTEX COVER-B'. Comme ce dernier problème est différentiel équivalent à MIN INDEPENDENT DOMINATING SET-B' alors MAX kSAT(B,$\bar{B}$) est différentiel réductible à MIN INDEPENDENT DOMINATING SET-B', où $B' = kB$. Cette réduction ne permet pas d'obtenir des résultats d'approximation supplémentaires mais elle pourrait être utilisée quand on obtient un résultat plus fort d'inapproximation pour MAX kSAT(B,$\bar{B}$).

Nous construisons une réduction de SAT à MIN INDEPENDENT DOMINATING SET telle que l'instance de SAT est satisfaisable si et seulement si le graphe obtenu a la valeur optimale égale à n et la pire égale à $n + 1$ (où n est le nombre de variables booléennes de l'instance de SAT) et l'instance de SAT n'est pas satisfaisable si et seulement si le graphe obtenu a la valeur optimale et la pire égale à $n + 1$. Ainsi :

Théorème 2.2.2 ([12]) *Si P ≠ NP, alors pour toute fonction décroissante* $\delta : \mathbb{N} \to (0,1)$*,* MIN INDEPENDENT DOMINATING SET *n'est pas differential* $\delta(n)$*-approximable, où* n *est le nombre de sommets du graphe.*

Donc, à moins que $P = NP$, tout algorithme polynomial d'approximation pour MIN INDEPENDENT DOMINATING SET a un facteur différentiel d'approximation égal à 0. Cela fait de MIN INDEPENDENT DOMINATING SET un des problèmes les plus difficiles du point de vue approximation différentiel. Ce résultat est le premier résultat de ce type, aucun problème vérifiant cette propriété n'était connu auparavant.

En utilisant une borne supérieure pour le facteur d'approximation de MAX 3SAT nous avons établi une borne supérieure pour le facteur d'approximation différentiel de tout algorithme polynomial résolvant MIN INDEPENDENT DOMINATING SET-B.

2.3 Complétude de différentes classes

Nous avons étudié dans [15, 20] avec Giorgio Ausiello, Marc Demange et Vangelis Paschos la complétude dans certaines classes d'approximation différentielle.

2.3.1 Introduction

Depuis le début des années 1980, les chercheurs ont étudié la complétude dans les classes d'approximation standard. Par exemple, dans [OM87], MIN WSAT, MIN W3SAT, TSP ont été montré *MIN NPO*-complets sous une réduction préservant l'approximation standard appelée réduction stricte. Dans [PY88], *MAX SNP* a été introduit et plusieurs problèmes d'optimisation ont été montrés *MAX SNP*-complets sous la L-réduction.

Nous avons obtenu des résultats de complétude dans *NPO*, *DAPX*, *DPTAS*, *DGLO* sous certaines réductions préservant le rapport différentiel.

2.3.2 Résultats

2.3.2.a *NPO*

Max (Min) WSat
Entrée : une formule ϕ sur n variables booléennes $\{x_1, \ldots, x_n\}$ chacune des variables x_i ayant un poids entier, non-négatif associé $w(x_i)$.
Sortie : une assignation qui satisfait ϕ et qui maximise (minimise) la somme des poids des variables à 1.

Orponen et Mannila ont considéré pour Max WSat (respectivement Min WSat) que l'assignation qui attribue 0 (respectivement 1) à toute variable est une assignation réalisable même si ce n'est pas le cas. Dans notre cas, ces assignations sont considérées comme pire solutions.

Max (Min) WSat-B est la version de Max (Min) WSat où les poids des variables sont polynomialement bornés et la somme totale est comprise entre B et $2B$.

Définition 2.3.1 ([OM87]) *Etant donnés deux problèmes de NPO, $A = (I,Sol,val,opt)$ et $B = (I',Sol',val',opt)$, A est strict-réductible à B s'il existe deux fonctions calculables en temps polynomial f et g, $f : I \rightarrow I'$ et $g : I \times Sol' \rightarrow Sol$ telles que*

- *f transforme toute instance $x \in I$ en une instance $f(x) \in I'$;*
- *g transforme toute solution $y \in Sol'(f(x))$ en une solution $g(x,y) \in Sol(x)$ telle que $r(g(x,y)) \leq r(y)$.*

A partir de la définition précédente, nous avons défini la D-réduction comme étant la stricte-réduction en remplaçant la dernière condition par la condition $\delta(g(x,y)) \geq \delta(y)$, $\delta > 0$.

Théorème 2.3.2 ([15, 20]) Max WSat *et* Min WSat *sont D-équivalents.*

Théorème 2.3.3 ([15, 20]) Max WSat *est MAX NPO-complet et* Min WSat *est MIN NPO-complet sous la D-réduction. Les classes des problèmes MAX NPO-difficiles et MIN NPO-difficiles sous la D-réduction coïncident et forment la classe des problèmes NPO-difficiles.*

0-DAPX est la classe de problèmes qui ne sont pas différentiel approximables, plus exactement les problèmes de *NPO* pour lesquels une approximation différentielle à un facteur $\delta > 0$ près implique *P=NP*. Un problème A est *0-DAPX*-difficile sous la D-réduction si tout problème de *0-DAPX* est D-réductible à A.

En utilisant la même idée que pour montrer que Min Independent Dominating Set est dans *0-DAPX* [12], Toulouse a montré dans [Tou01] que pour tout $k > 3$, Max Wk Sat-B est dans *0-DAPX*. Cela nous permet de conclure :

Théorème 2.3.4 ([15, 20]) *Sous la D-réduction, NPO-complet = 0-DAPX-complet $\subseteq$ 0-DAPX.*

2.3.2.b DAPX et DPTAS

La $DPTAS$-réduction a été définie dans [15, 20] à partir de la $PTAS$-réduction. La propriété importante de la $DPTAS$-réduction est qu'elle préserve l'appartenance à $DAPX$.

Théorème 2.3.5 ([15, 20]) Max Independent Set-B, Min Vertex Cover-B, Max Set Packing-B, Min Set Cover-B *sont DAPX-complets sous la DPTAS-réduction.*

Nous avons montré que sous une réduction préservant l'appartenance dans $DPTAS$, une variante de Max WSat, appelée Max Linear WSat-B est difficile dans une sous-classe de $DPTAS$.

2.3.2.c *DGLO*

La classe GLO a été définie dans [AP95] comme la classe des problèmes d'optimisation polynomialement bornés pour lesquels les optimum locaux ont une garantie de qualité (à une constante près) par rapport aux optimum globaux. $DGLO$ est l'équivalent en différentiel. Plusieurs problèmes ont été montrés appartenant à $DGLO$.

Soit $\overline{DGLO}^{DPTAS}$ l'ensemble des problems de NPO qui sont $DPTAS$-réductible aux problèmes de $DGLO$. Dans [AP95] on a montré que $\overline{GLO}^{PTAS} = APX$.

Il est facile de montrer que le même résultat est vrai en différentiel.

Proposition 2.3.6 ([15, 20]) $DAPX = \overline{DGLO}^{DPTAS}$.

En utilisant une réduction qui préserve les optimum locaux, la $DLOP$-réduction, on obtient le résultat suivant :

Proposition 2.3.7 ([15, 20]) Max Cut, Min Vertex Cover-B, Max Set Packing-B, Min Set Cover-B *sont complets sous la DLOP-réduction dans une sous-classe de DGLO.*

2.4 Problèmes de tournées de véhicules

Avec Refael Hassin et Jérome Monnot nous avons étudié dans [14, 18] l'approximation et plus spécifiquement l'approximation différentielle de problèmes de tournées de véhicules, problèmes qui généralisent le problème TRAVELING SALESMAN PROBLEM (TSP) sur les graphes non-orientés.

2.4.1 Introduction

L'approximation de TSP a été bien étudiée. Sahni et Gonzalez [SG76] ont montré que les instances générales de TSP ne sont pas approximables à un facteur $2^{p(n)}$ près à moins que $P = NP$, où n est la taille de l'instance de TSP. METRIC TSP est approximable à un facteur $\frac{3}{2}$ près [Chr76], en particulier TSP(1,2) est approximable à un facteur $\frac{7}{6}$ près [PY93]. Dans le problème TSP, l'ajout d'une constante k aux distances de toutes les arêtes n'affecte pas l'ensemble des solutions optimales ni la valeur du rapport différentiel. La raison est que chaque solution contient exactement n arêtes et donc la valeur de chaque solution augmente d'exactement la même valeur, nk. Cela veut dire que pour établir des algorithmes d'approximation différentiels il n'est pas important que la fonction distance soit une fonction métrique ou pas. Hassin et Khuller [HK01] et indépendamment Monnot [Mon02] ont montré que TSP est différentiel approximable à un facteur $\frac{2}{3}$ près. Nous avons utilisé ces algorithmes pour établir des algorithmes pour certains des problèmes étudiés.

Dans les problèmes de tournées de véhicules, n clients doivent être servis par des véhicules de capacité limitée partant d'un dépôt commun. Une solution consiste en un ensemble de tournées, où chacune commence et se finit au dépôt après avoir visité un ensemble de clients, chaque client étant visité exactement une fois. Ce problème est appelé VEHICLE ROUTING PROBLEM (VRP) s'il y a une contrainte sur le nombre de clients visités par véhicule. Une telle contrainte reflète la supposition qu'un véhicule a une capacité finie quand il distribue ou collecte un produit. Le but est de trouver une solution telle que la distance totale des tournées parcourue est minimale. Nous avons également considéré des variantes de ce problème où la limitation porte plutôt sur la distance totale parcourue par un véhicule que sur le nombre de clients visités et dans ce cas on cherche une solution qui utilise un nombre minimum de véhicules.

Les problèmes que nous avons étudiés sont définis par un graphe complet non-orienté et valué $G = (V,E)$. L'ensemble V consiste en un dépôt noté 0, et les clients notés $\{1,\dots,n\}$. La fonction distance $d : E \to \mathbb{R}$, où $d(i,j) \geq 0$ est la distance de i à j ou la longueur de l'arête $(i,j) \in E$. On cherche des cycles élémentaires $C_1,\dots,C_p$, tels que $V(C_i) \cap V(C_j) = \{0\}$, $\forall i \neq j$, et $\cup_{i=1}^{p} V(C_i) = V$. Nous appelons un tel ensemble de cycles un *p-tour*.

2.4.2 kVRP

kVRP
Entrée : Un graphe complet valué.
Sortie : Un p-tour minimisant la longueur totale des cycles et tel que chaque cycle contient au plus k sommets en plus du dépôt.

Le problème 2VRP est solvable en temps polynomial et pour $k \geq 3$, METRIC kVRP a été montré NP-difficile par Haimovich et Rinnooy Kan [HR85]. Haimovich, Rinnooy Kan et

Stougie [HRS88] ont établi un algorithme qui est une approximation à un facteur $\frac{5}{2} - \frac{3}{2k}$ près pour Metric kVRP, $k \geq 3$.

2.4.2.a General kVRP

Le problème nVRP est standard équivalent à TSP. Donc, utilisant le résultat de Sahni et Gonzalez [SG76] nous déduisons que nVRP n'est pas $2^{p(n)}$ standard approximable pour tout polynôme p, à moins que $P = NP$. En fait nous avons montré que kVRP, pour tout $k \geq 5$ (même si k est une fonction de n) n'est pas $2^{p(n)}$ standard approximable pour tout polynôme p, à moins que $P = NP$.

Calculer *opt* de kVRP est NP-difficile pour $k \geq 3$ [HR85] et nous avons montré que calculer *wor* de kVRP est aussi NP-difficile, pour $k \geq 3$.

Un de nos principaux résultats est :

Théorème 2.4.1 ([14, 18]) kVRP *est différentiel approximable à un facteur* $\frac{1}{2}$ *près.*

Pour montrer cela, nous avons appliqué des idées similaires à celles utilisées par Hassin et Khuller [HK01]. Plus exactement (voir figure 2.1), nous calculons d'abord une borne inférieure LB. Nous construisons deux solutions, une solution réalisable avec une valeur $apx = LB + \delta_1$ et une solution réalisable de valeur $bad = LB + \delta_2$ où $\delta_2 \geq \delta_1$. Ainsi la solution avec une valeur apx est une approximation différentielle à un facteur α près où

$$\alpha = \frac{wor - apx}{wor - opt} \geq \frac{bad - apx}{bad - opt} \geq \frac{\delta_2 - \delta_1}{bad - LB} = \frac{\delta_2 - \delta_1}{\delta_2},$$

car pour un problème de minimisation $wor \geq bad \geq apx \geq opt \geq LB$.

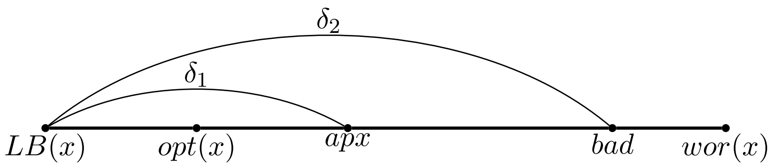

Fig. 2.1 – *L'idée de l'algorithme*

2.4.2.b Metric kVRP

Quand d est une fonction métrique, la pire solution est facile à calculer, elle est formée de n cycles, chacun contenant le dépôt et un sommet i, $i = 1, \ldots, n$. Donc, $wor = 2\sum_{i=1}^{n} d(0,i)$.

L'idée de l'algorithme de [HRS88] qui établit une approximation à un facteur $\frac{5}{2} - \frac{3}{2k}$ près pour Metric kVRP est de réduire ce problème à Metric TSP et d'utiliser l'algorithme de Christofides sur ce dernier problème. En utilisant la même idée, on obtient :

Théorème 2.4.2 ([14, 18]) Metric kVRP *est différentiel approximable à un facteur* $\delta\frac{k-1}{k}$ *près, où* δ *est le facteur d'approximation différentiel de* Metric TSP.

Comme le meilleur algorithme d'approximation différentiel pour TSP fournit une approximation différentielle à un facteur $\frac{2}{3}$ près [HK01, Mon02] nous obtenons un algorithme d'approximation différentiel à un facteur $\frac{2}{3}\frac{k-1}{k}$ près pour Metric kVRP. Pour $k \geq 4$, ce facteur est une amélioration du facteur $\frac{1}{2}$ que nous avons donné pour le cas général.

Nous avons amélioré ces facteurs en utilisant d'autre idées et ainsi nous avons obtenu les résultats suivants :

Théorème 2.4.3 ([18]) Metric 3VRP *est différentiel approximable à un facteur* $\frac{50}{99} - \varepsilon$ *près* $\forall \varepsilon > 0$*,* Metric 4VRP *à un facteur* $\frac{3}{5}$ *près,* Metric kVRP *avec* $5 \leq k \leq 8$ *à un facteur* $\frac{2}{3}$ *près et* Metric kVRP *avec* $k \geq 9$ *à un facteur* $\frac{25(k-1)}{33k} - \varepsilon$ *près,* $\forall \varepsilon > 0$*.*

Nous avons également établi un résultat qui fait la liaison entre le rapport standard et différentiel.

Théorème 2.4.4 ([18]) *Une approximation différentielle à un facteur* δ *près pour* Metric kVRP *est aussi une approximation à un facteur* $k - \delta(k-1)$ *près.*

Ce résultat nous permet d'obtenir une amélioration de l'algorithme de Haimovich et al. [HRS88] pour Metric 3VRP. Plus exactement l'algorithme de Haimovich et al. est une approximation standard à un facteur 2 près et nous obtenons un algorithme avec une approximation à un facteur $\frac{197}{99}$ près.

2.4.3 Autour de VRP

Différentes variantes de VRP ont été étudiées dans la littérature du point de vue approximation standard. Nous avons analysé l'approximation différentielle de quelques variantes. Les résultats que nous avons établis sont généralement des résultats d'approximation à un facteur constant près et de non-existence d'un schéma différentiel d'approximation en temps polynomial.

Constrained VRP
Entrée : Un graphe complet valué et une fonction métrique $\ell : E \to \mathbb{R}_+$ et $\lambda > 0$.
Sortie : Un p-tour minimisant la longueur totale des cycles où $\sum_{(i,j) \in C_q} \ell(i,j) \leq \lambda$, $q = 1, \ldots, p$.

Pour assurer l'existence d'une solution, supposons que $2\ell(0,i) \leq \lambda$ pour $i = 1, \ldots, n$. Il est facile de voir que ce problème est un cas particulier de nVRP et donc n'a pas de schéma différentiel d'approximation, si $P \neq NP$.

Théorème 2.4.5 ([14, 18]) Constrained VRP *est différentiel approximable à un facteur* $\frac{1}{3}$ *près.*

Min-Max kTSP
Entrée : Un graphe complet valué.
Sortie : Un p-tour, où $p \leq k$, minimisant la longueur maximum des cycles.

Le cas métrique de Min-Max kTSP a été étudié par Fredrickson, Hecht et Kim [FHK78] qui ont fourni une approximation à un facteur $\frac{5}{2} - \frac{1}{k}$ près en construisant une réduction de ce problème à Metric TSP et utilisant l'algorithme de Christofides [Chr76].

Théorème 2.4.6 ([18]) Metric Min-Max kTSP*,* $k \geq 2$*, est différentiel approximable à un facteur* $\frac{1}{2}$ *près et n'a pas de schéma différentiel d'approximation si* $P \neq NP$*.*

MIN-SUM EkTSP
Entrée : Un graphe complet valué.
Sortie : Un k-tour minimisant la longueur totale des cycles.

Théorème 2.4.7 ([14, 18]) METRIC MIN-SUM EkTSP, *$k \geq 1$, est différentiel approximable à un facteur $\frac{2}{3}$ près et n'a pas de schéma différentiel d'approximation si $P \neq NP$.*

MIN VEHICLE
Entrée : Un graphe complet valué et $\lambda > 0$.
Sortie : Un p-tour tel que $\sum_{(i,j)\in C_q} d(i,j) \leq \lambda$, $q = 1,\dots,p$ minimisant p.

Dans [LSLD92], Li, Simchi-Levi et Desrochers ont montré que MIN VEHICLE n'est pas approximable à un facteur 2 près, si $P \neq NP$ et est approximable à un facteur $1 + \frac{\alpha}{\alpha-2}$ près, où $\alpha = \frac{\lambda}{d_m}$ et $d_m = \max\{d(0,1),\dots,d(0,n)\}$.

Théorème 2.4.8 ([18]) METRIC MIN VEHICLE, *$k \geq 1$, est différentiel approximable à un facteur $\frac{2}{3}$ près et n'a pas de schéma différentiel d'approximation si $P \neq NP$.*

Chapitre 3

Étude de quelques problèmes de graphes

Depuis le début de notre thèse, nous nous sommes intéressés à divers problèmes de graphes. Nous avons étudié le problème de partitionnement de l'ensemble des sommets en deux ensembles sous une contrainte spécifique, le problème consistant à trouver dans un graphe sous contrainte un arbre, le problème de partitionnement de l'ensemble des sommets d'un graphe 1-dur en chaînes et nous avons donné une borne supérieure pour une coloration spécifique d'un graphe.

Nous passons en revue brièvement nos résultats principaux.

3.1 Partition satisfaisante d'un graphe

Nous présentons les résultats que nous avons obtenus avec Zsolt Tuza et Daniel Vanderpooten dans [16, 19].

Gerber et Kobler ont introduit dans [GK00] le problème de décider si un graphe donné admet une partition de l'ensemble des sommets en deux parties telle que chaque sommet a au moins autant de voisins dans sa partie que dans l'autre. La complexité de ce problème est restée ouverte dans leur article et cela a constitué notre point de départ. Ils ont montré par contre la *NP*-difficulté au sens fort d'une généralisation de ce problème où les sommets ont des poids et on cherche une partition telle que pour chaque sommet la somme des poids des voisins dans la même partie est au moins égale à la somme des poids des voisins dans l'autre ensemble. Le cas où les arêtes ont des poids a été aussi étudié et montré *NP*-difficile au sens fort.

Le problème général auquel nous nous sommes intéressés est le suivant :
SATISFACTORY PARTITION
Entrée : Un graphe $G = (V,E)$ et une fonction $s : V \to \mathbb{N}$ telle que $s(v) \leq d(v)$, $\forall v \in V$.
Question : Existe-t-il une partition V_1,V_2 de V telle que $\forall v \in V$, si $v \in V_i$ alors $d_{V_i}(v) \geq s(v)$?

Considérant $A \subset V$, un sommet $v \in A$ est *satisfait dans* A si $d_A(v) \geq s(v)$. De plus, A est un sous-ensemble satisfait si tous ses sommets sont satisfaits dans A. Etant donnée une partition V_1,V_2 un sommet $v \in V_i$ est *satisfait* si $d_{V_i}(v) \geq s(v)$. Une partition avec tous les sommets satisfaits est appelée *partition satisfaisante* et un graphe qui admet une telle partition est appelé *partitionable*.

Dans notre étude du problème SATISFACTORY PARTITION, la fonction s indique le niveau de satisfaction requis pour que les sommets soient satisfaits. Le problème étudié par Gerber et Kobler correspond à $s = \lceil \frac{d}{2} \rceil$. Comme remarqué dans [GK00], ce problème n'a pas toujours de solution. En particulier, les graphes suivants ne sont pas partitionables : les graphes complets, les étoiles, les graphes bipartis complets avec au moins un des deux ensembles stables de taille impaire. Les graphes suivants sont facilement partitionables : les cycles de taille au moins 4, les arbres qui ne sont pas des étoiles, les graphes non connexes.

Nous avons étudié la complexité de SATISFACTORY PARTITION pour diverses valeurs de la fonction s.

Une condition nécessaire et suffisante pour obtenir une partition satisfaisante, souvent utilisée pour établir nos résultats, est la suivante :

Proposition 3.1.1 ([16]) *Un graphe $G = (V,E)$ est partitionable en temps polynomial si et seulement si il contient deux ensembles de sommets disjoints $A,B \subseteq V$ tels que $\forall v \in A$, $d_A(v) \geq s(v)$ et $\forall v \in B$, $d_B(v) \geq s(v)$ où $s(v) \leq \lceil \frac{d(v)}{2} \rceil$.*

Le cas $s \leq \lceil \frac{d}{2} \rceil - 1$

Stiebitz [Sti96] a montré le résultat suivant :

Théorème 3.1.2 (Stiebitz [Sti96]) *Soit G un graphe et deux fonctions $a,b : V(G) \to \mathbb{N}$ telles ques $d(x) \geq a(x) + b(x) + 1$ pour chaque $x \in V(G)$. Alors, il existe une partition A,B de $V(G)$ telle que pour chaque sommet $x \in A$, $d_A(x) \geq a(x)$ et pour chaque sommet $x \in B$, $d_B(x) \geq b(x)$.*

La preuve de [Sti96] n'est pas constructive. Nous avons conçu un algorithme permettant d'exhiber une telle partition en temps polynomial.

Théorème 3.1.3 ([19]) *Une partition A,B satisfaisant les conditions de degré données en Théorème 3.1.2 peut être trouvée en temps polynomial.*

Évidemment, si on considère $a = b = s$, le résultat de Stiebitz montre l'existence d'une partition satisfaisante pour $s \leq \lceil \frac{d}{2} \rceil - 1$. Le théorème précédent a comme conséquence que SATISFACTORY PARTITION pour $s \leq \lceil \frac{d}{2} \rceil - 1$ est solvable en temps polynomial.

Le cas $s = \lceil \frac{d}{2} \rceil$

Nous avons montré que tout graphe cubique différent de K_4,$K_{3,3}$ est partitionable et tout graphe 4-régulier différent de K_5 est partitionable. Ces résultats ne peuvent pas être généralisés pour les graphes réguliers de degré plus grand que 4 car nous avons exhibé des graphes 5-réguliers, différents de K_6 et $K_{5,5}$ qui ne sont pas partitionables et des graphes 6-réguliers, différents de K_7 qui ne sont pas partitionables (voir figure 3.1).

Nous pouvons montrer un résultat plus fort que le précédent, plus exactement :

Théorème 3.1.4 ([16]) *Dans un graphe G avec $\Delta(G) \leq 4$, on peut décider en temps polynomial si G n'est pas partitionable ou bien trouver une partition satisfaisante de G.*

La complexité du problème général pour $s = \lceil \frac{d}{2} \rceil$ reste ouverte. Par contre nous avons montré que si on demande une partition V_1,V_2 telle que pour tout $v \in V_i$, $d_{V_i}(v) = \lceil \frac{d}{2} \rceil$, alors le problème devient NP-complet.

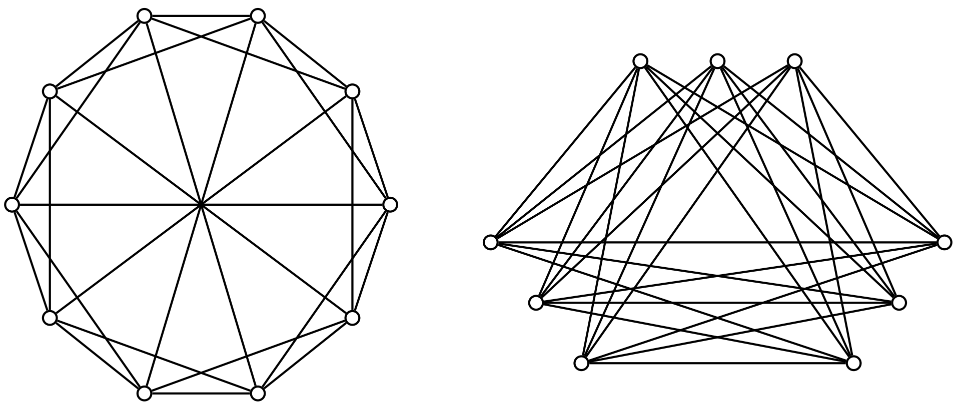

FIG. 3.1 – *Graphes 5-régulier et 6-régulier non-partitionables*

Le cas $s = \lceil \frac{d}{2} \rceil + 1$ and $s = d - 1$

Chvátal a introduit dans [Chv84] un problème de décomposition consistant à bicolorer les sommets d'un graphe tel que chaque sommet a au plus un voisin colorié avec une couleur différente. Chvátal a donné un algorithme polynomial pour ce problème pour les graphes de degré maximum 3. Pour les graphes de degrés 2 et 3, ce problème coïncide avec SATISFACTORY PARTITION avec $s = \lceil \frac{d}{2} \rceil$. Notre Théorème 3.1.4 contient ce résultat. Chvátal a aussi montré la NP-difficulté du ce problème pour les graphes de degré minimum $\delta(G) = 3$ et degré maximum $\Delta(G) = 4$. Ce résultat implique le résultat suivant pour notre problème.

Théorème 3.1.5 ([16]) SATISFACTORY PARTITION *est NP-complet quand $s = d - 1$ même pour les graphes avec degré minimum $\delta(G) = 3$ et degré maximum $\Delta(G) = 4$.*

Le problème de Chvátal coïncide avec SATISFACTORY PARTITION quand $s = \lceil \frac{d}{2} \rceil + 1$ ou $s = d - 1$ pour les graphes G avec degré minimum $\delta(G) = 4$ et degré maximum $\Delta(G) = 5$. Pour montrer la NP-difficulté de SATISFACTORY PARTITION quand $s = \lceil \frac{d}{2} \rceil + 1$ nous avons transformé le graphe de la construction de Chvátal en un graphe avec degré minimum $\delta(G) = 4$ et degré maximum $\Delta(G) = 5$. Adaptant sa preuve nous avons montré le résultat suivant :

Théorème 3.1.6 ([16]) SATISFACTORY PARTITION *avec $s = \lceil \frac{d}{2} \rceil + 1$ est NP-complet même pour les graphes G de degré minimum $\delta(G) = 4$ et degré maximum $\Delta(G) = 5$.*

Le théorème précédent est également valable pour $s = d-1$. Nous avons étendu ce résultat au suivant :

Théorème 3.1.7 ([16]) SATISFACTORY PARTITION *est NP-complet quand $s = d - 1$ sur les graphes avec degré maximum $\Delta(G) = \Delta$ et degré minimum $\delta(G) = \Delta - 1$, pour tout $\Delta \geq 5$.*

Généralisations

Nous avons considéré un problème plus général que SATISFACTORY PARTITION qui devient NP-complet.
SATISFACTORY k-PARTITION
Entrée : Un graphe $G = (V,E)$ et une fonction $s : V \to \mathbb{N}$ telle que $s(v) \leq d(v)$, $\forall v \in V$.

Question : Existe-t-il une partition $V_1, \ldots, V_k$ de V telle que $\forall v \in V$, si $v \in V_i$ alors $d_{V_i}(v) \geq s(v)$?

Théorème 3.1.8 ([16]) SATISFACTORY k-PARTITION *avec* $s = \lceil \frac{d}{k} \rceil$ *est NP-complet pour* $k \geq 3$.

En opposition avec le résultat négatif précédent, nous avons montré que :
Théorème 3.1.9 ([19]) SATISFACTORY k-PARTITION *avec* $s = \lfloor \frac{d+1}{k} \rfloor - 1$ *est décidable en temps polynomial pour chaque* $k \geq 2$*. De plus, si un graphe est* k*-partitionable, alors une* k*-partition satisfaisante peut être trouvée en temps polynomial.*

3.2 Sur la conjecture de Loebl-Komlós-Sós

L'affirmation autour de laquelle se situe notre travail en collaboration avec Hao Li et Mariusz Wozniak [7] est la suivante :

Conjecture 3.2.1 (Loebl-Komlós-Sós [ELS94]) *Si G est un graphe avec n sommets dont au moins $\frac{n}{2}$ sommets de degré au moins k, alors G contient tous les arbres de dimension k.*

La conjecture précédente a été premièrement formulée par Loebl en 1994 dans le cas $k = \frac{n}{2}$, puis a été généralisée par Komlós and Sós.

La conjecture de Loebl-Komlós-Sós a des similarités avec la conjecture de Erdős-Sós suivante :

Conjecture 3.2.2 (Erdős-Sós) *Si G est un graphe avec n sommets comportant plus de $\frac{n(k-1)}{2}$ arêtes, alors G contient tous les arbres de dimension k.*

Comme remarqué dans [KS96], la condition que le degré moyen de G est plus grand que $k-1$ de la conjecture de Erdős-Sós est remplacée dans la conjecture de Loebl-Komlós-Sós par la condition qu'au moins la moitié des sommets de G ont un degré d'au moins k.

Utilisant le lemme de régularité, Ajtai, Komlós et Szemerédi ont montré une forme approximative de la conjecture de Loebl-Komlós-Sós [KS96] où les conditions sur le nombre de sommets et le degré sont relâchées.

Théorème 3.2.1 (Ajtai, Komlós et Szemerédi [KS96]) *Pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, si G est un graphe avec n sommets dont au moins $\frac{(1+\varepsilon)n}{2}$ sommets sont de degré au moins $\frac{(1+\varepsilon)n}{2}$, alors G contient tous les arbres avec au plus $\frac{n}{2}$ arêtes.*

Il est facile de voir que la conjecture de Loebl-Komlós-Sós est vraie pour certains cas particuliers d'arbres comme par exemple les étoiles. Nous avons montré que la conjecture est vraie aussi pour les chaînes et pour $k \geq n-3$. Notre résultat principal est :

Théorème 3.2.2 ([7]) *Si G est un graphe avec n sommets dont au moins $\frac{n}{2}$ sommets de degré au moins k, alors G contient une chaîne de longueur au moins k.*

Observons que le théorème précédent améliore le résultat de Dirac (1952): si G est un graphe de degré minimum k, alors G contient une chaîne de longueur au moins k.

3.3 Partitionnement des sommets d'un graphe 1-dur en chaînes

Avec Amel Harkat-Benhamdine, Hao Li et Mariusz Woźniak nous avons montré dans [9] un résultat de partitionnement des sommets en chaînes pour la classe des graphes 1-durs.

Rappelons qu'un graphe G est *t-dur* si pour chaque sous-ensemble de sommets S avec $c(G \setminus S) \geq 2$ on a $c(G \setminus S) \leq \frac{|S|}{t}$, où $c(G \setminus S)$ représente le nombre de composantes connexes du sous-graphe $G(V \setminus S)$.

Chvátal a conjecturé que :

Conjecture 3.3.1 ([Chv73]) *Il existe une constante t telle que chaque graphe t-dur est hamiltonien.*

Chvátal avait même conjecturé que tout graphe 2-dur est hamiltonien. Bauer, Broersma et Veldman [BBV00] ont montré que cette dernière conjecture était fausse en donnant des exemples de graphes qui sont $(\frac{9}{4} - \epsilon)$-durs pour tout $\epsilon > 0$ et qui ne sont pas hamiltoniens. Il apparaît donc que la conjecture de Chvátal pourrait être vraie pour $t \geq \frac{9}{4}$.

La relation entre la dureté d'un graphe et la possibilité de partitionner son ensemble de sommets en chaînes a été déjà étudiée. Ota [Ota98] a conjecturé que :

Conjecture 3.3.2 ([Ota98]) *Pour $n \equiv 0 \pmod k$, tout graphe $\frac{k}{2}$-dur d'ordre n admet une partition de l'ensemble des sommets en chaînes avec k sommets.*

Nous avons montré un résultat plus fort que la conjecture précédente pour le cas $k = 2$. Notre résultat principal est :

Théorème 3.3.1 ([9]) *Si G est un graphe 1-dur, alors G a une partition de l'ensemble des sommets en chaînes de longueur au moins 2.*

3.4 Coloration propre d'arêtes

Avec Amel Harkat-Benhamdine, Hao Li et Mariusz Woźniak dans [5, 8] nous avons déterminé une borne supérieure du nombre minimum de couleurs à utiliser pour colorer les arêtes d'un graphe avec des contraintes supplémentaires.

Soit $G = (V,E)$ un graphe et soit une fonction $f : E \to \{1,\ldots,m\}$, $f(e)$ étant le nombre ou la couleur associée à l'arête e. Une coloration d'arêtes est *propre* si deux arêtes adjacentes n'ont pas la même couleur. Étant donnée une coloration f, soit $F(v) = \{f(e) \mid e = (u,v) \in E\}$ le multi-ensemble des nombres associés aux arêtes incidentes à v. Une coloration d'arêtes f *distingue les sommets* si $F(u) \neq F(v)$ pour tout couple de sommets $u \neq v$. Le nombre minimum de couleurs nécessaires pour une coloration propre permettant de distinguer les sommets d'un graphe G sans arête isolée et avec au plus un sommet isolé est noté $\tilde{\chi}'(G)$. Ce nombre a été introduit et étudié par Burris et Schelp dans [Bur93, BS97] et indépendamment comme l'observabilité d'un graphe, par Černý, Horňák et Soták dans [ČHS96]. Dans [Bur93, ČHS96, HS95, HS97] $\tilde{\chi}'$ est calculé pour des familles de graphes comme les chaînes P_n, les cycles C_n, les graphes bipartis complets $K_{m,n}$ et les graphes complets K_n. En particulier,

$$\tilde{\chi}'(K_n) = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ est impair} \\ n+1 & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}.$$

Parmi les graphes G pour lesquels on connaît la valeur de $\tilde{\chi}'(G)$, la plus grande valeur $\tilde{\chi}'(G)$ est réalisée quand $G = K_n$ avec n pair.

Burris et Schelp ont conjecturé dans [Bur93] et [BS97] qu'un graphe G avec n sommets, sans arête isolée et avec au plus un sommet isolé vérifie $\tilde{\chi}'(G) \leq n+1$. Il a été montré dans [FLS96] qu'un graphe G avec n sommets sans arête isolée et avec au plus un sommet isolé, satisfait $\tilde{\chi}'(G) \leq n + \Delta(G) - 1$. Dans [FLS96] il est montré qu'un graphe avec n sommets de degré minimum $\delta \geq 5$ et degré maximum $\Delta < \frac{(2c-1)n-4}{3}$, où c est une constante avec $\frac{1}{2} < c \leq 1$ vérifie $\tilde{\chi}'(G) \leq \lceil cn \rceil$. Notre résultat principal est le théorème suivant:

Théorème 3.4.1 ([5]) *Un graphe G avec n sommets, sans arête isolée et avec au plus un sommet isolé, vérifie $\tilde{\chi}'(G) \leq n+1$.*

Évidemment cette dernière borne pour $\tilde{\chi}'$ ne peut pas être améliorée en général comme montré pour les graphes complets.

Pourtant pour certaines familles de graphes, $\tilde{\chi}'$ est plutôt proche du degré maximum et non pas du nombre de sommets du graphe. Nous avons montré en ce sens le théorème suivant :

Théorème 3.4.2 ([8]) *Soit G un graphe avec $n \geq 3$ sommets, sans arête isolée et avec au plus un sommet isolé. Si $\delta(G) > \frac{n}{3}$ alors $\tilde{\chi}'(G) \leq \Delta(G) + 5$.*

Conclusion et perspectives

La motivation essentielle de la plupart des travaux résumés dans ce document était de mieux appréhender la difficulté, et plus particulièrement la difficulté d'approximation, de divers problèmes d'optimisation. Dans cette optique, on peut tenter d'étudier certaines classes sémantiques (problèmes approximables à un facteur fixé près) et identifier les problèmes complets dans ces classes. On peut également, pour un problème d'optimisation spécifique, essayer d'améliorer le meilleur rapport connu d'approximation ou de non-approximation, ou mettre en évidence une classe d'instances mieux approximables que le problème général. Au terme de ce mémoire, nous voulons indiquer quelques directions de recherche que nous trouvons intéressantes.

De nombreux problèmes d'optimisation admettent un schéma d'approximation en temps polynomial sur les instances denses. Élargir la classe des instances denses à une classe admettant toujours un schéma d'approximation est un problème qui mérite d'être étudié en vue d'avoir une meilleure compréhension des instances faciles à approximer. Dans cette direction, Fernandez de la Vega et Karpinski [FK02] ont construit un schéma d'approximation pour les instances sous-denses en moyenne de Max Cut. Un ensemble de graphes est sous-dense en moyenne si chaque graphe de l'ensemble avec n sommets a $\Omega(\frac{n^2}{\log\ n})$ arêtes.

Les problèmes de satisfaction de contraintes jouent un rôle essentiel dans l'étude de la complexité des problèmes d'optimisation. Le statut de ces problèmes du point de vue standard est bien connu. En particulier, Papadimitriou et Yannakakis ont montré que tout problème de *MAX SNP* est approximable à un facteur constant près [PY88]. En revanche, concernant le rapport différentiel, il reste beaucoup de questions ouvertes. Même pour le problème de base Max 3Sat, le statut du point de vue différentiel n'est pas connu. Essayer d'obtenir, dans le cas différentiel, un résultat similaire à celui de Papadimitriou et Yannakakis permettrait de mieux comprendre ce dernier rapport. Il s'agirait d'étudier la liaison entre la caractérisation logique d'un problème d'optimisation et le rapport d'approximation différentiel correspondant à ce problème.

Håstad et Venkatesh [HV02] ont défini un critère général d'évaluation de la performance d'une solution fournie par un algorithme. Plus exactement une solution y d'une instance x a le rapport $\frac{val(x,y)-k}{opt(x)-k}$ où k est un paramètre à choisir. Ce rapport généralise les deux rapports que nous avons étudiés car pour obtenir le rapport standard il suffit de prendre k égal à 0 et pour obtenir le rapport différentiel k est égal à la valeur d'une pire solution de x. Dans [HV02], les auteurs ont étudié la complexité de plusieurs problèmes de satisfaction de contraintes selon un rapport où k est la valeur d'une solution fournie par un algorithme aléatoire simple. Un algorithme aléatoire simple pour Max 3Sat attribue une valeur de vérité aux variables avec une probabilité de $\frac{1}{2}$. Comme il satisfait en moyenne une fraction constante des clauses et peut être facilement dérandomisé, la solution obtenue est une approximation à un facteur constant près selon le rapport standard. Selon le rapport défini par [HV02] où k est la valeur de la solution fournie par ce dernier algorithme aléatoire, pour tout $\varepsilon > 0$, il n'existe pas d'algorithme qui en temps $2^{\log m^{O(1)}}$ approxime Max 3Sat à un facteur $2^{\log m^{1-\varepsilon}}$ près, à moins que $NP \subseteq DTIME[2^{\log m^{O(1)}}]$. Étudier la complexité d'approximation de divers problèmes d'optimisation en fonction de différentes valeurs intéressantes de k est une perspective que nous envisageons.

Annexe A

Bibliographie

Cette bibliographie rassemble nos travaux personnels cités par ordre chronologique, puis les références bibliographiques des travaux cités dans le texte.

1. Travaux personnels

[1] C. Bazgan, M. Santha, et Zs. Tuza. « On the approximation of finding a(nother) Hamiltonian cycle in cubic Hamiltonian graphs ». Dans M. Morvan, C. Meinel, et D. Krob, éditeurs, *Proceedings of the 15th Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS'98), Paris, France*, LNCS 1373, pages 276–286. Springer-Verlag, 1998.

[2] C. Bazgan, M. Santha, et Zs. Tuza. « Efficient approximation algorithms for the Subset-Sums Equality problem ». Dans K. Larsen, S. Skyum, et G. Winskel, éditeurs, *Proceedings of the 25th International Colloquium on Automata, Languages, and Programming (ICALP'98), Aalborg, Danemark*, LNCS 1443, pages 387–396. Springer-Verlag, 1998.

[3] C. Bazgan. « Approximation de problèmes d'optimisation et de fonctions totales de NP ». Thèse de doctorat, Université Paris Sud, 1998.

[4] C. Bazgan et W. Fernandez de la Vega. « A polynomial time approximation scheme for dense Min 2Sat ». Dans G. Ciobanu et G. Paun, éditeurs, *Proceedings of the 12th International Symposium on the Fundamentals of Computation Theory (FCT'99), Iasi, Roumanie*, LNCS 1684, pages 91–99. Springer-Verlag, 1999.

[5] C. Bazgan, A. Harkat-Benhamdine, H. Li, et M. Wozniak. « On the vertex-distinguishing proper edge-colorings of graphs ». *Journal of Combinatorial Theory B*, 75:288–301, 1999.

[6] C. Bazgan, M. Santha, et Zs. Tuza. « On the approximation of finding a(nother) Hamiltonian cycle in cubic Hamiltonian graphs ». *Journal of Algorithms*, 31:249–268, 1999.

[7] C. Bazgan, H. Li, et M. Wozniak. « On the Loebl-Komlós-Sós conjecture ». *Journal of Graph Theory*, 34:269–276, 2000.

[8] C. Bazgan, A. Harkat-Benhamdine, H. Li, et M. Wozniak. « A note on the vertex-distinguishing proper edge-colorings of graphs with large minimum degree ». *Discrete Mathematics*, 236:37–42, 2001.

[9] C. Bazgan, A. Harkat-Benhamdine, H. Li, et M. Wozniak. « Partitionning vertices of 1-tough graphs into paths ». *Theoretical Computer Science*, 263:255–261, 2001.

[10] C. Bazgan, W. Fernandez de la Vega, et M. Karpinski. « Approximability of Dense Instances of Nearest Codeword Problem ». Dans M. Penttonen et E. Meineche Schmidt, éditeurs, *Proceedings of the 8th Scandinavian Workshop on Algorithm Theory (SWAT 2002), Turku, Finland*, LNCS 2368, pages 298–307. Springer-Verlag, 2002.

[11] C. Bazgan, M. Santha, et Zs. Tuza. « Efficient approximation algorithms for the Subset-Sums Equality problem ». *Journal of Computer and System Sciences*, 64(2):160–170, 2002.

[12] C. Bazgan et V. Paschos. « Differential approximation for satisfiability and related problems ». *European Journal of Operation Research*, 147(2):397–404, 2003. Aussi publié dans Proceedings of the 6th Balkan Conference on Operations Research, mai 2002, Thessaloniki, Grèce.

[13] C. Bazgan, W. Fernandez de la Vega, et M. Karpinski. « Polynomial time approximation schemes for dense instances of the minimum constraint satisfaction ». *Random Structures and Algorithms*, 23(1):73–91, 2003.

[14] C. Bazgan, R. Hassin, et J. Monnot. « Differential Approximation for some vehicle routing problems ». Dans R. Petreschi, G. Persiano, et R. Silvestri, éditeurs, *Proceedings of the 5th Conference on Algorithms and Complexity (CIAC 2003), Rome, Italy*, LNCS 2653, pages 277–288. Springer-Verlag, 2003.

[15] G. Ausiello, C. Bazgan, M. Demange, et V. Paschos. « Completeness in differential approximation classes ». Dans B. Rovan et P. Vojtás, éditeurs, *Proceedings of the 28th International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science (MFCS 2003), Bratislava, Slovak Republic*, LNCS 2747, pages 179–188. Springer-Verlag, 2003.

[16] C. Bazgan, Zs. Tuza, et D. Vanderpooten. « On the existence and determination of satisfactory partitions in a graph ». à paraître dans le Proceedings of the 14th Annual International Symposium on Algorithms and Computation (ISAAC 2003), 2003.

[17] C. Bazgan. « A note on the approximability of the toughness of graphs ». à paraître dans Discrete Mathematics, 2003.

[18] C. Bazgan, R. Hassin, et J. Monnot. « Approximation algorithms for some vehicle routing problems ». soumis, 2003.

[19] C. Bazgan, Zs. Tuza, et D. Vanderpooten. « On a theorem of Stiebitz about decomposing graphs under degree constraints ». soumis, 2003.

[20] G. Ausiello, C. Bazgan, M. Demange, et V. Paschos. « Completeness in differential approximation classes ». soumis, 2003.

2. Références

[ABSS93] S. Arora, L. Babai, J. Stern, et Z. Sweedyk. « The Hardness of Approximate Optima in Lattices, Codes, and Systems of Linear Equations ». Dans *Proceedings of the 34th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, pages 724–733, 1993. Also published in Journal of Computer and System Sciences, 54, 1997, 317–331.

[ACG+99] G. Ausiello, P. Crescenzi, G. Gambosi, V. Kann, A. Marchetti-Spaccamela, et M. Protasi. *Complexity and approximation. Combinatorial optimization problems and their approximability properties.* Springer, Heildemberg, 1999.

[ADP80] G. Ausiello, A. D'Atri, et M. Protasi. « Structure Preserving Reductions Among Convex Optimization Problems ». *Journal of Computer and System Sciences*, 21:136–153, 1980.

[AFK96] S. Arora, A. Frieze, et H. Kaplan. « A New Rounding Procedure for the Assignment Problem with Applications to Dense Graph Arrangement Problems ». Dans *Proceedings of the 37th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, pages 21–30, 1996.

[AK97] P. Alimonti et V. Kann. « Hardness of Approximating Problems on Cubic Graphs ». Dans *Proceedings of the 3rd Italian Conference on Algorithms and Complexity*, LNCS 1203, pages 288–298. Springer-Verlag, 1997.

[AK00] P. Alimonti et V. Kann. « Some APX-completeness results for cubic graphs ». *Theoretical Computer Science*, 237(1–2):123–134, 2000.

[AKK95] S. Arora, D. Karger, et M. Karpinski. « Polynomial time approximation schemes for dense instances of NP-hard problems ». Dans *Proceedings of 27th Annual ACM Symposium on the Theory of Computing*, pages 284–293, 1995. Also published in Journal of Computer and System Sciences 58, 1999, 193–210.

[AKS02] M. Agarwal, N. Kayal, et N. Saxena. « PRIMES is in P ». Manuscript, 2002.

[ALM+92] S. Arora, C. Lund, R. Motwani, M. Sudan, et M. Szegedy. « Proof Verification and Hardness of Approximation Problems ». Dans *Proceedings of the 33rd Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, pages 14–23, 1992. Also published in Journal of the Association for Computing Machinery 45(3), 1998, 501–555.

[AP95] G. Ausiello et M. Protasi. « Local search, reducibility and approximability of NP-optimization problems ». *Information Processing Letters*, 54(2):73–79, 1995.

[Aro96] S. Arora. « Polynomial time approximation schemes for Euclidean TSP and other geometric problems ». Dans *Proceedings of the 37th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, pages 2–11, 1996. Also published in Journal of the ACM, 45(5), 1998, 753–782.

[AYZ94] N. Alon, R. Yuster, et U. Zwick. « Color-coding: a new method for finding simple paths, cycles and other small subgraphs within large graphs (Extended Abstract) ». Dans *Proceedings of the 26th Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, pages 326–335, 1994.

[Bak94] B. Baker. « Approximation algorithms for NP-complete problems on planar graphs ». *Journal of the ACM*, 41:153–180, 1994.

[BBV00] D. Bauer, H.J. Broersma, et H.J. Veldman. « Not every 2-tough graph is hamiltonian ». *Discrete Applied Mathematics*, 99:317–321, 2000.

[BF95] P. Berman et T. Fujito. « Approximating independent sets in degree 3 graphs ». Dans *Proceeding of the 4th Workshop on Algorithms and Data Structures*, volume LNCS 955, pages 449–460. Springer-Verlag, 1995.

[BHS90] D. Bauer, S.L. Hakimi, et E. Schmeichel. « Not every 2-tough graph is hamiltonian ». *Discrete Applied Mathematics*, 28:191–195, 1990.

[BK01] P. Berman et M. Karpinski. « Approximation Hardness of Bounded Degree MIN-CSP and MIN-BISECTION ». 2001.

[BS97] A. C. Burris et R. H. Schelp. « Vertex-distinguishing proper edge-colorings ». *Journal of Graph Theory*, 26(2):73–83, 1997.

[BTV96] D. Bertsimas, C-P. Teo, et R. Vohra. « On dependent randomized rounding algorithms ». volume LNCS 1084, pages 330–344. Springer-Verlag, 1996.

[Bur93] A. C. Burris. « Vertex-distinguishing edge-colorings ». Ph.D. Dissertation, Memphis State University, 1993.

[Chr76] N. Christofides. « Worst-case analysis of a new heuristic for the traveling salesman problem ». Technical Report 338, Grad. School of Industrial Administration, CMU, 1976.

[ČHS96] J. Černý, M. Horňák, et R. Soták. « Observability of a graph ». *Math. Slovaca*, 46:21–31, 1996.

[Chv73] V. Chvátal. « Tough graphs and hamiltonian circuits ». *Discrete Mathematics*, 5:215–228, 1973.

[Chv84] V. Chvátal. « Recognizing decomposable graphs ». *Journal of Graph Theory*, 8:51–53, 1984.

[Coo71] S.A. Cook. « The complexity of theorem-proving procedures ». Dans *Proceedings of the 3rd Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, pages 151–158, 1971.

[CST96] P. Crescenzi, R. Silvestri, et L. Trevisan. « To weight or not to weight: where is the question? ». Dans *Proceedings of the 4th Israeli Symposium on Theory of Computing and Systems*, pages 68–77, 1996.

[CT96] A. Clementi et L. Trevisan. « Improved Non-approximability Results for Vertex Cover Problems with Density Constraints ». Dans *Proceedings of the 2nd International Conference on Computing and Combinatorics, COCOON'96*, LNCS 1090, pages 333–342. Springer-Verlag, 1996. Also published in Theoretical Computer Science, 225(1–2), 113-128, 1999.

[DHK93] E. Dahlhaus, P. Hajnal, et M. Karpinski. « On the Parallel Complexity of Hamiltonian Cycle and Matching Problem on Dense Graphs ». *Journal of Algorithms*, 15:367–384, 1993.

[Dir52] G.A. Dirac. « Some theorems on abstract graphs ». *Proc. London Math. Soc.*, 2:69–81, 1952.

[DKRS00] I. Dinur, G. Kindler, R. Raz, et S. Safra. « An Improved Lower Bound for Approximating CVP ». 2000.

[DKS98] I. Dinur, G. Kindler, et S. Safra. « Approximating-CVP to within almost-polynomial factors is NP-hard ». Dans *Proceeding of the 39th IEEE Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, pages 99–109, 1998.

[DP96] M. Demange et V. Paschos. « On an approximation measure founded on the links between optimization and polynomial approximation theory ». *Theoretical Computer Science*, 158:117–141, 1996.

[ELS94] P. Erdős, M. Loebl, et V. Sós. « Discrepancy of Trees ». *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica*, 30, 1994.

[ENSS95] G. Even, J. Naor, B. Schieber, et M. Sudan. « Approximating minimum feedback sets and multicuts in directed graphs. ». Dans *Proceedings of the 4th MPS Conference on Integer Programming and Combinatorial Optimization*, volume LNCS 920, pages 14–24, 1995. Also appeared in Algorithmica, 20(2): 151–174, 1998.

[Fer96] W. Fernandez de la Vega. « Max-Cut has a Randomized Approximations Scheme in Dense Graphs ». *Random Structures and Algorithms*, 8(3):187–198, 1996.

[FG95] U. Feige et M. X. Goemans. « Approximating the value of two prover proof systems, with applications to MAX 2SAT and MAX DICUT ». Dans *Proceedings of the 3rd Istrael Symposium on Theory of Computing and Systems*, pages 182–189, 1995.

[FHK78] G. N. Fredrickson, M. S. Hecht, et C. E. Kim. « Approximation algorithms for some routing problems ». *Journal of Computing*, 7:178–193, 1978.

[FK96] A. Frieze et R. Kannan. « The Regularity Lemma and Approximation Schemes for Dense Problems ». Dans *Proceedings of the 37th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, pages 12–20, 1996.

[FK99] W. Fernandez de la Vega et M. Karpinski. « On the approximation hardness of dense TSP and other path problems ». *Information Processing Letters*, 70(2):53–55, 1999.

[FK02] W. Fernandez de la Vega et M. Karpinski. « A Polynomial Time Approximation Scheme for Subdense MAX-CUT ». Eccc, report no. 44, 2002.

[FKL01] U. Feige, M. Karpinski, et M. Langberg. « A Note on Approximating MAX-BISECTION on Regular Graphs ». *Information Processing Letters*, 79:181–188, 2001.

[FLS96] O. Favaron, H. Li, et R.H. Schelp. « Strong edge coloring of graphs ». *Discrete Mathematics*, 159:103–109, 1996.

[FR94] M. Fürer et B. Raghavachari. « Approximating the Minimum-Degree Steiner Tree to within One of Optimal ». *Journal of Algorithms*, 17:409–423, 1994.

[FS98] D. Fotakis et P. Spirakis. « Graph properties that faciliate travalling ». ECCC Technical Report, TR98-31, 1998.

[GJ79] M. R. Garey et D. S. Johnson. *Computers and Intractability / A Guide to the Theory of NP-Completeness.* W.H. Freeman & Company, San Francisco, 1979.

[GJT76] M. R. Garey, D. S. Johnson, et R. E. Tarjan. « The Planar Hamiltonian Circuit Problem is NP-Complete ». *SIAM Journal on Computing*, 5(4):704–714, 1976.

[GK00] M. Gerber et D. Kobler. « Algorithmic approach to the satisfactory graph partitioning problem ». *European Journal of Operation Research*, 125:283–291, 2000.

[GLS81] M. Grötschel, L. Lovász, et A. Schrijver. « The ellipsoid method and its consequences in combinatorial optimization ». *Combinatorica*, 1:168–198, 1981.

[GVY93] N. Garg, V. Vazirani, et M. Yannakakis. « Approximate Max-flow Min-(multi)cut Theorems and Their Applications ». Dans *Proceedings of the 25th Annual ACM Symposium on the Theory of Computing*, pages 698–707, 1993. Also published in SIAM Journal on Computing, 25, 1996, 235–251.

[Hås96] J. Håstad. « Clique is Hard to Approximate within $n^{1-\varepsilon}$ ». Dans *Proceedings of the 37th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, pages 627–636, 1996. Also published in Acta Mathematica, 1999, 182:105–142.

[Hås99] J. Håstad. « On Approximating CSP-B ». Dans *ECCC Technical Report, TR99-39*, 1999. On bounded occurrence constraint satisfaction. Information Processing Letters 74(1-2): 1-6 (2000).

[HK01] R. Hassin et S. Khuller. « z-approximations ». *Journal of Algorithms*, 41:429–442, 2001.

[Hoc83] D. Hochbaum. « Efficient bounds for the stable set, vertex cover and set packing problems ». *Discrete Applied Mathematics*, 6:243–254, 1983.

[Hoc95] D. Hochbaum. *Approximation Algorithms for NP-hard Problems.* PWS Publishing Company, 1995.

[Hop82] J. J. Hopfield. « Neural Networks and Physical Systems with Emergent Collective Computational Capabilities ». Dans *Proceedings of the National Academy of Sciences of the U.S.A.*, volume 79, pages 2554–2558, 1982.

[HP00] D. Hochbaum et A. Pathria. « Approximating a Generalization of MAX 2SAT and MIN 2SAT ». *Discrete Applied Mathematics*, 107 (1-3):41–59, 2000.

[HR85] M. Haimovich et A. H. G. Rinnooy Kan. « Bounds and heuristics for capacitated routing problems ». *Mathematics of Operations Research*, 10:527–542, 1985.

[HRS88] M. Haimovich, A. H. G. Rinnooy Kan, et L. Stougie. « Analysis of Heuristics for Vehicle Routing Problems ». Dans *Vehicle Routing Methods and Studies*, volume LNCS 1017, pages 47–61. Golden, Assad editors, Elsevier, 1988.

[HS76] E. Horowitz et S. Sahni. « Exact and approximate algorithms for scheduling nonidentical processors ». *Journal of the ACM*, 23:317–327, 1976.

[HS95] M. Horňák et R. Soták. « Observability of complete multipartite graphs with equipotent parts ». *Ars Combinatoria*, 41:289–301, 1995.

[HS97] M. Horňák et R. Soták. « Asymptotic behavior of the observability of Q_n ». *Discrete Mathematics*, 176:139–148, 1997.

[HV02] J. Håstad et S. Venkatesh. « On the advantage over a random assignment ». Dans *Proceedings of the Conference record of 34th Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, pages 43–52, 2002.

[IK75] O. H. Ibarra et C. E. Kim. « Fast approximation algorithms for the Knapsack and Sum of Subset problems ». *Journal of the ACM*, 22(4):463–468, 1975.

[JPY88] D. S. Johnson, C. Papadimitriou, et M. Yannakakis. « How Easy is Local Search? ». *Journal of Computer and System Sciences*, 37:79–100, 1988.

[Kan92] V. Kann. « On the approximability of NP-complete optimization problems ». PhD Dissertation, Dept. of Numerical Analysis and Computing Science, Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden, 1992.

[Kar72] R. M. Karp. « Reducibility among combinatorial problems ». Dans *Complexity of Computer Computations*, pages 85–103, 1972.

[Kar97] M. Karpinski. « Polynomial Time Approximation Schemes for Some Dense Instances of NP-Hard Optimization Problems ». Dans *Proceedings of the International Workshop on Randomization and Approximation Techniques in Computer Science*, LNCS 1269, pages 1–14. Springer-Verlag, 1997. Also published in Algorithmica, 30, 2001, 386–397.

[KKM94] R. Kohli, R. Krishnamurti, et P. Mirchandani. « The Minimum Satisfiability Problem ». *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 7:275–283, 1994.

[Kla96] H. Klauck. « On the hardness of global and local approximation ». Dans *Proceedings of the 5th Scandinavian Workshop on Algorithm Theory (SWAT '96), juillet 1996, Reykjavik, Iceland*, LNCS 1097, pages 88–99. Springer-Verlag, 1996.

[KM96] S. Khanna et R. Motwani. « Towards a syntactic characterization of PTAS ». Dans *Proceedings of the 28th Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, pages 329–337, 1996.

[KMR93] D. Karger, R. Motwani, et G. Ramkumar. « On Approximating the Longest Path in a Graph ». Dans *Proceedings of the 3rd Workshop on Algorithms and Data Structures*, LNCS 709, pages 421–432. Springer-Verlag, 1993. Also published in Algoritmica 18 (1997), 82–98.

[KMSV94] S. Khanna, R. Motwani, M. Sudan, et U. Vazirani. « On syntactic versus computational views of approximability ». Dans *Proceedings of the 35th Annual IEEE Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, pages 819–830, 1994. Also published in SIAM Journal on Computing, 28(1), 1999, 164–191.

[Kre89] M. Krentel. « Structure in Locally Optimal Solutions ». Dans *Proceedings of the 30th Annual IEEE Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, pages 216–221, 1989.

[KS96] J. Komlós et M. Simonovits. *Szemerédi's Regularity Lemma and its Applications in Graph Theory*, volume Combinatorics, Paul Erdős is Eighty, vol. 2. János Bolyai Mathematical Society, Budapest, 1996.

[KST97] S. Khanna, M. Sudan, et L. Trevisan. « Constraint Satisfaction: The Approximability of Minimization Problems ». Dans *Proceedings of the 12th Annual IEEE Conference on Computational Complexity*, pages 282–296, 1997.

[KWZ97] M. Karpinski, J. Wirtgen, et A. Zelikovsky. « An Approximation Algorithm for the Bandwidth Problem on Dense Graphs ». Technical Report 85164-CS, University of Bonn, Department of Computer Science, janvier 1997.

[KZ96] M. Karpinski et A. Zelikovsky. « Approximating Dense Cases of Covering Problems ». Technical Report TR-542-97, Princeton University, Computer Science Department, 1996. Also appeared in DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, vol. 40, 1998, 169–178.

[Lad75] R. E. Ladner. « On the structure of polynomial time reducibility ». *Journal of the ACM*, 22:155–171, 1975.

[Lev73] L. A. Levin. « Universal sorting problems ». *Problems of Information Transmission*, 9:265–266, 1973.

[Lov79] L. Lovász. *Combinatorial Problems an Exercises*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1979.

[LSLD92] C-L. Li, D. Simchi-Levi, et M. Desrochers. « On the distance constrained vehicle routing problem, ». *Operations Research*, 40(4):790–799, 1992.

[Mon84] B. Monien. « How to find long paths efficiently ». *Annals of Discrete Mathematics*, 25:239–254, 1984.

[Mon02] J. Monnot. « Differential approximation results for the traveling salesman and related problems ». *Information Processing Letters*, 82:229–235, 2002.

[MP91] N. Megiddo et C. Papadimitriou. « On total functions, existence theorems and computational complexity ». *Theoretical Computer Science*, 81:317–324, 1991.

[MPT01] J. Monnot, V. Th. Paschos, et S. Toulouse. « Differential Approximation Results for the Traveling Salesman Problem with Distances 1 and 2 ». Dans *Proceedings of the 13th International Symposium on the Fundamentals of Computation Theory (FCT'01)*, LNCS, pages 275–286. Springer-Verlag, 2001.

[MPT03] J. Monnot, V. Th. Paschos, et S. Toulouse. *Approximation polynomiale des problèmes NP-difficiles: Optima locaux et rapport différentiel.* Hermès, 2003.

[OM87] P. Orponen et H. Mannila. « On approximation preserving reductions: complete problems and robust measures ». Technical Report C-1987-28, Department of Computer Science, University of Helsinki, Finland, 1987.

[Ota98] K. Ota. personal communication, 1998.

[Pap94a] C. Papadimitriou. *Computational Complexity.* Addison-Wesley Publishing Company, 1994.

[Pap94b] C. Papadimitriou. « On the Complexity of the Parity Argument and Other Inefficient Proofs of Existence ». *Journal of Computer and System Sciences*, 48:498–532, 1994.

[PSY90] C. Papadimitriou, A. Schäffer, et M. Yannakakis. « On the Complexity of Local Search ». Dans *Proceedings of the 22nd Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, pages 438–445, 1990.

[PY88] C. Papadimitriou et M. Yannakakis. « Optimization, Approximation, and Complexity Classes ». Dans *Proceedings of the 20th Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, pages 229–234, 1988. Also published in Journal of Computer and System Sciences, 43, 1991, 425–440.

[PY93] C. Papadimitriou et M. Yannakakis. « The traveling salesman problem with distances one and two ». *Mathematics of Operations Research*, 18(1):1–11, 1993.

[RT87] P. Raghavan et C. Thompson. « Randomized Rounding: a technique for provably good algorithms and algorithmic proofs ». *Combinatorica*, 7:365–374, 1987.

[Sel88] A. Selman. « Natural self-reducible sets ». *SIAM Journal on Computing*, 17:989–996, 1988.

[SG76] S. Sahni et T. Gonzalez. « P-complete approximation problems ». *Journal of the ACM*, 23:555–565, 1976.

[Sti96] M. Stiebitz. « Decomposing Graphs under Degree Constraints ». *Journal of Graph Theory*, 23:321–324, 1996.

[SY91] A. Schäffer et M. Yannakakis. « Simple Local Search Problems that are hard to solve ». *SIAM Journal on Computing*, pages 56–87, 1991.

[Tho78] A. Thomason. « Hamilton cycles and uniquely edge colourable graphs ». *Annals of Discrete Mathematics*, 3:259–268, 1978.

[Tou01] S. TOULOUSE. « Approximation polynomiale: optima locaux et rapport différentiel ». Thèse de doctorat, Université Paris Dauphine, 2001.

[Tre96] L. TREVISAN. « Parallel Approximation Algorithms by Positive Linear Programming ». Dans *Proceedings of the 4th European Symposium on Algorithms*, LNCS 1136, pages 62–75. Springer-Verlag, 1996. Algorithmica, 21, 72–88, 1998.

[Tre97] L. TREVISAN. « Approximating Satisfiable Satisfiability Problems ». Dans *Proceedings of the 5th European Symposium on Algorithms*, LNCS 1284, pages 472–485. Springer-Verlag, 1997.

[Tut46] W. T. TUTTE. « On Hamiltonian circuits ». *Journal of the London Mathematical Society*, 21:98–101, 1946.

[Vaz01] V. V. VAZIRANI. *Approximation Algorithms*. Springer, 2001.

[Win89] S. WIN. « On the Connection Between the Existence of k-Trees and the Toughness of a Graph ». *Graphs and Combinatorics*, 5:201–205, 1989.

[WY92] G. J. WOEGINGER et Z. YU. « On the equal-subset-sum problem ». *Information Processing Letters*, 42:299–302, 1992.

[Zem81] E. ZEMEL. « Measuring the quality of approximate solution to zero-one programming problems ». *Mathematical Operations Research*, 6:319–332, 1981.

Annexe B

Activités d'animation de la recherche

1. Encadrement de travaux de recherche

Thèses

Je co-dirige depuis novembre 2001, avec Vangelis Paschos, la thèse de Fabrice Serriere, "Approximation de Set Cover". Depuis septembre 2002, j'assure, avec Vangelis Paschos, la co-direction de la thèse de Bruno Escoffier consacrée à l'étude de l'approximation différentielle.

J'ai participé, en juin 2001, au jury de la thèse de Sophie Toulouse, "Approximation polynomiale : optima locaux et rapport différentiel", thèse dirigée par Vangelis Paschos, mention très honorable, avec félicitations. Pendant sa dernière année de thèse, j'ai participé à sa finalisation.

Mémoires de DEA

Depuis l'année universitaire 1999-2000 j'effectue un cours de 12h sur l'approximation polynomiale en DEA MIASH à l'Université Paris 1. Je donne un cours similaire aux étudiants du DEA MSG de l'Université Paris Dauphine depuis l'année 2001-2002. J'assure aussi un cours de 5h dans l'école doctorale de l'Université Paris Dauphine, EDDIMO, sur l'utilisation de la programmation linéaire et programmation semidéfinie pour obtenir des algorithmes d'approximation. A ce titre, j'ai été amenée à participer au suivi de certains mémoires de DEA. En particulier, j'ai encadré entre mars et septembre 2000 le mémoire de Andrea Szipan sur "L'analyse différentielle de certains problèmes de satisfiabilité". Avec Daniel Vanderpooten, j'ai co-encadré en 2002 le mémoire secondaire de Tinaz Ekim concernant l'approximation de la courbe Pareto de problèmes multicritères.

2. Animations scientifiques et diffusion de connaissances

- Membre élu du Conseil Scientifique de l'Université Paris Dauphine (depuis janvier 2001).
- Co-organisation du séminaire du LAMSADE *Algorithmes et Modèles d'Optimisation : Théorie et Applications* depuis septembre 1999 (8-10 réunions par an).
- Organisation de séminaires étudiants dans l'équipe *Algorithmique et Complexité* du LRI pendant l'année universitaire 1998-1999.
- Participation régulière au processus d'arbitrage pour des revues et conférences internationales (STACS, ICALP, Complexity, SODA, FCT, Parallel Processing Letters, RAIRO, EJOR...).

- Co-organisation de la conférence ORP3 (Operational Research Peripatetic Post-graduate Programme), 26-29 septembre 2001, Université Paris Dauphine.
- Co-organisation du groupe de travail " Complexité, Modèles finis et Bases de Données" du GDR ALP, 5-6 juin 2003, Université Paris Dauphine.

3. Liste des communications

Conférences internationales

- août 2003, MFCS'2003, Bratislava, Slovak Republic, *Completeness in differential approximation classes.*
- mai 2003, CIAC'2003, Rome, Italy, *Differential Approximation for some Vehicle Routing Problems.*
- juillet 2002, SWAT'2002, Turku, Finlande, *Approximability of Dense Instances of Nearest Codeword Problem.*
- juin 2002, ECCO'2002, Lugano, Suisse, *Generalized Minimum Spanning Tree.*
- mai 2002, 6th Balkan Conference on Operation Research, Thessaloniki, Grèce, *Differential approximation for satisfiability and related problems.*
- mai 2001, FRANCORO'2001, Quebec, Canada, *Partition satisfaisante d'un graphe.*
- août 99, FCT'99, Iaşi, Roumanie, *A polynomial time approximation scheme for dense* MIN 2SAT.
- juillet 98, ICALP'98, Aalborg, Danemark, *Efficient approximation algorithms for the* SUBSET-SUMS EQUALITY *problem.*
- février 98, STACS'98, Paris, France,*On the approximation of finding a(nother) Hamiltonian cycle in cubic Hamiltonian graphs.*
- septembre 97, Randomized Approximation Algorithms – ESPRIT Working Group RAND2, Leeds, Angleterre, *On the approximation of finding a(nother) Hamiltonian cycle in cubic Hamiltonian graphs.*
- avril 95, ICANNGA'95, Alès, France, *A genetic algorithm for the maximal clique problem.*

Conférences nationales

- mars 99, Atelier printanier de Combinatoire et Structure Aléatoires, LaBri, Bordeaux, France, *Un schéma d'approximation pour* MIN 2SAT DENSE.
- janvier 98, Journées du PRC–AMI : Complexité et Modèles Finis, Paris, France, *A fast approximation scheme for the* SUBSET-SUMS EQUALITY *problem.*
- juin 97, Journées du PRC–AMI : Complexité et Modèles Finis, Fontainebleau, France, LONGEST PATH *is not constant approximable in cubic Hamiltonian graphs.*

Séminaires

- avril 2000, Séminaire du LIFAR de Rouen, *Approximation de problèmes d'optimisation et de fonctions totales de NP.*
- juillet 99, Séminaire du LEIBNIZ, IMAG, Grenoble, *Approximation de problèmes d'optimisation et de fonctions totales de NP.*

- mars 99, Séminaire de l'axe LPCA (Logique, Preuves, résolution de Contraintes et Algorithmes) du LORIA de Nancy, *Approximation de problèmes d'optimisation et de fonctions totales de NP.*
- février 99, Séminaire du GREYC de l'Université de Caen, *Approximation de fonctions totales.*
- janvier 99, Séminaire du Laboratoire Informatique et Parallélisme de ENS Lyon, *Approximation de fonctions totales.*
- février 98, Séminaire du Laboratoire de Méthodes Informatiques de l'Université d'Evry, *Sur la complexité de l'approximation du problème consistant à trouver un et un second cycle Hamiltonien dans un graphe cubique et Hamiltonien.*
- décembre 97, Séminaire RAND de l'Université de Bonn, Allemagne, *Efficient approximation algorithms for the* SUBSET-SUMS EQUALITY *problem.*

4. Participation à des projets internationaux

- Depuis 2001 je fais partie d'un projet bilatéral PROCOPE entre l'Université Paris Sud et l'Université de Bonn sur l'approximation et les algorithmes aléatoires.
- Au cours des années 2000 et 2001 j'ai été membre d'un projet bilatéral entre le CNRS et l'Académie des Sciences de Hongrie sur combinatoire et complexité.
- De 1997 à 2000 j'ai été membre du projet RAND 2, groupe de travail financé par l'Union Européenne sur les algorithmes aléatoires.