Centre d'Etudes et de Recherche de l'ESSEC

cereessec

ESSEC Management Research Center

– DR 93032 –

LES RELATIONS DE SURCLASSEMENT ONT-ELLES DES PROPRIÉTÉS REMARQUABLES ?

Denis BOUYSSOU

juin 1993

Ecole Supérieure des Sciences Economiques et Commerciales

Etablissement d'enseignement supérieur privé reconnu par l'Etat. Association loi 1901 affiliée à la Chambre de Commerce et d'Industrie Interdépartementale Val d'Oise-Yvelines

GROUPE ESSEC

LES RELATIONS DE SURCLASSEMENT ONT-ELLES DES PROPRIÉTÉS REMARQUABLES ?

Résumé.

Les relations de surclassement sont, le plus souvent, construites sur la base d'un principe de concordance-discordance. On sait que les relations ainsi construites ne possèdent pas, en général, de propriétés remarquables de transitivité ou de complétude. Ceci n'exclut pas pour autant que ces relations puissent posséder, du fait de leur principe de construction, certaines "propriétés structurelles". On montrera dans un premier temps pourquoi ce problème peut être important pour l'étude des procédures d'exploitation d'une relation de surclassement. On verra ensuite que l'existence de "propriétés structurelles" dépend de la méthode de construction adoptée. On discutera ces propriétés pour les méthodes ELECTRE et PROMETHEE ainsi que leur impact pour l'analyse de procédures d'exploitation.

Mots-clés : Méthodes Multicritères, Relations de Surclassement, Théorie du Choix Social.

SOME REMARKS ON THE PROPERTIES OF OUTRANKING RELATIONS

Abstract.

Outranking relations are often built using a concordance-discordance principle. Such relations are, in general, neither transitive nor complete. This is not to say that the concordance-discordance principle do not impose some restrictions on these relations. We show why this question may be of some importance for analyzing the various techniques designed to build a prescription on the basis of such relations. These restrictions are studied for the ELECTRE and PROMETHEE methods.

Keywords : MCDM, Outranking relations, Social choice Theory.

Denis BOUYSSOU
ESSEC
B.P 105
F-95021 Cergy
e-mail: bouyssou@fresec51.bitnet

1. Introduction.

Les méthodes de surclassement constituent une classe importante de méthodes pour l'aide multicritère à la décision (pour plus de précisions sur ces méthodes on pourra se reporter à Schärlig (1985), Vincke (1989) ou Roy et Bouyssou (1993)). Il est traditionnel de distinguer dans ce type de méthodes :

- une phase construction du surclassement et
- une phase d'exploitation du surclassement.

A partir d'un ensemble d'actions évaluées sur plusieurs critères, la phase de construction du surclassement vise à déterminer dans quelle mesure on peut affirmer qu'une action est au moins aussi bonne qu'une autre en prenant en compte tous les critères. Ceci amène à bâtir une relation binaire (nette ou valuée selon les cas) sur l'ensemble des actions appelée "relation de surclassement". La construction de cette relation s'opère, dans la plupart des méthodes, par application d'un principe de "concordance-discordance" conduisant à considérer qu'une action est au moins aussi bonne qu'une autre si :

- une majorité "suffisante" appuie cette proposition (principe de concordance) et
- l'opposition des critères n'appuyant pas cette proposition n'est pas "trop forte" (principe de non discordance).

On sait qu'un tel principe ne conduit pas, en général, à des relations possédant des propriétés remarquables de transitivité ou de complétude (ceci restant vrai dans le cas valué indépendamment de la façon d'interpréter ces propriétés dans cette situation) que nous appellerons par la suite des "bonnes propriétés" . Élaborer une recommandation sur la base telles relations demande donc un travail spécifique. C'est la raison d'être de la phase d'exploitation du surclassement. Selon la problématique d'aide à la décision retenue (cf. Roy et Bouyssou (1993)) on cherchera dans cette phase à déterminer un sous ensemble d'actions en vue d'un choix final, à trier les actions en diverses catégories ou à ranger les actions suivant un préordre complet ou partiel. Ceci conduit à utiliser une procédure d'exploitation du surclassement prenant la forme d'une procédure de sélection, d'affectation ou de rangement. Les relations de surclassement n'ayant pas, en général, de "bonnes propriétés", mettre au point de "bonnes" procédures d'exploitation n'est pas une tâche facile.

Il n'est pas souhaitable, en général, d'analyser une procédure d'exploitation indépendamment de la procédure de construction à laquelle on envisage de l'associer. En effet, notons tout d'abord que seule la prise en compte de la procédure de construction permet de donner un contenu précis aux relations de surclassement manipulées par les procédures d'exploitation.

Ceci peut se révéler crucial pour ce qui concerne les procédures d'exploitation tirant parti de relations valuées. La nature et les propriétés des "valuations" utilisées et, par conséquent, les opérations qu'il est légitime de leur appliquer, sont, en effet, fortement dépendante d'un mode de construction particulier même si cette dépendance n'est pas toujours facile à cerner avec précision. Nous n'analyserons pas ce premier point plus avant dans ce texte (on trouvera dans Perny (1992) quelques remarques à ce sujet).

En second lieu, même si l'on sait que les relations de surclassement peuvent ne pas avoir de "bonnes propriétés", il n'est pas exclu que leur mode de construction au travers d'un principe de concordance-discordance leur confère certaines "propriétés structurelles". L'existence de telles "propriétés structurelles" rendrait délicat l'interprétation de certaines analyses axiomatiques récentes de procédures d'exploitation qui supposent qu'une procédure d'exploitation aura à traiter toute relation binaire et non pas seulement celles pouvant être obtenues à l'aide d'une technique particulière de construction (c'est le cas par exemple dans Pirlot (1991), Vincke (1992), Bouyssou (1992) ou Bouyssou et Perny (1992)). En effet, on pourrait imaginer des procédures d'exploitation qui soient peu attrayantes si on suppose qu'elles ont à s'appliquer à toute relation mais qui le deviendrait dès lors que leur application serait limitée à des relations possédant certaines "propriétés structurelles".

L'objet de ce texte est de s'interroger sur l'existence de telles "propriétés structurelles". Dans une deuxième section on montre simplement qu'avec ELECTRE I et ELECTRE III les relations de surclassement obtenues ne possèdent pas de telles propriétés. Dans une troisième section, on verra que la question est plus délicate avec d'autre méthodes n'utilisant pas la notion de discordance comme PROMETHEE et on montrera les liens entre ce problème et des questions classiques en théorie du choix social. Une quatrième section montrera, sur la base d'un exemple, comment on peut tirer parti des "propriétés structurelles" des relations de surclassement d'un certain type pour analyser axiomatiquement une procédure d'exploitation. Une dernière section présentera quelques voies ouvertes pour des recherches futures.

2. Un résultat simple à propos d'ELECTRE I et ELECTRE III.

ELECTRE I (cf. Roy (1968)) et ELECTRE III (cf. Roy (1978)) sont parmi les méthodes de surclassement les plus connues et les plus utilisées. ELECTRE I vise à bâtir une relation de surclassement nette à partir d'un ensemble d'action évaluées sur une famille de vrai-critères. ELECTRE III cherche à bâtir une relation de surclassement valuée à partir d'un ensemble d'action évaluées sur une famille de pseudo-critères (sur ces notions nous renvoyons à Roy

(1985)). Rappelons-en brièvement le fonctionnement d'un point de vue purement technique (pour une discussion approfondie de ces méthodes nous renvoyons à Roy et Bouyssou (1993)).

Dans tout ce qui suit, A désignera un ensemble (d'"actions") fini et non vide de cardinal m. Considérons un "jeu de données" constitué de :

- un entier naturel non nul n,
- un réel (niveau exigé de concordance) $s \in [0,5 ; 1]$
- n fonctions (critères) $g_1, g_2, \dots, g_n$ de A dans $\mathbb{R}$,
- n fonctions (seuils de veto) $v_1, v_2, \dots, v_n$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}+$ telles que, $\forall i \in \{1, 2, \dots n\}$ et $\forall a, b \in A$, $g_i(a) \geq g_i(b) \Rightarrow g_i(a) + v_i(g_i(a)) \geq g_i(b) + v_i(g_i(b))$,
- n coefficients réels strictement positifs (coefficients d'importance) $k_1, k_2, \dots, k_n$.

A partir d'un tel jeu de données, ELECTRE I amène à bâtir une relation binaire nette S sur A (c'est-à-dire un sous ensemble de AxA) en posant, pour tout $a, b \in A$:

$a \, S \, b \Leftrightarrow [a \, C \, b$ et Non $(a \, V \, b)]$

où

$$a \, C \, b \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sum_{i \in \{j \in \{1, 2, \dots, n\} : g_j(a) \geq g_j(b)\}} k_i}{\sum_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} k_i} \geq s$$

et

$$a \, V \, b \quad \Leftrightarrow \quad [\exists \, i \in \{1, 2, \dots, n\} \text{ tel que } g_i(b) > g_i(a) + v_i(g_i(a))].$$

Les relations nettes C et V sont respectivement appelées relation de concordance et relation de discordance d'ELECTRE I.

Considérons à présent un "jeu de données" constitué de :

- un entier naturel non nul n,
- n fonctions (critères) $g_1, g_2, \dots, g_n$ de A dans $\mathbb{R}$,
- 3n fonctions (seuils d'indifférence, de préférence et de veto) $q_1, p_1, v_1, q_2, p_2, v_2, \dots, q_n, p_n, v_n$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}+$ telles que, $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall a, b \in A$:
  $q_i(x) \leq p_i(x) \leq v_i(x)$ et
  $g_i(a) \geq g_i(b) \Rightarrow [g_i(a) + q_i(g_i(a)) \geq g_i(b) + q_i(g_i(b))$, $g_i(a) + p_i(g_i(a)) \geq g_i(b) + p_i(g_i(b))$ et $g_i(a) + v_i(g_i(a)) \geq g_i(b) + v_i(g_i(b))]$
- n coefficients réels strictement positifs (coefficients d'importance) $k_1, k_2, \dots, k_n$,

A partir d'un tel jeu de données, ELECTRE III amène à bâtir une relation binaire valuée S sur A (c'est-à-dire une fonction de AxA dans $[0 ; 1]$) en posant, pour tout $a, b \in A$:

$S(a, b) = C(a, b)\cdot(1 - D(a, b))$

où

$$C(a, b) = \frac{\sum_{i \in \{1, 2, \ldots, n\}} k_i \cdot C_i(a, b)}{\sum_{i \in \{1, 2, \ldots, n\}} k_i} \text{ avec } C_i(a, b) = \frac{p_i(g_i(a)) - \mathrm{Min}[g_i(b) - g_i(a) \,;\, p_i(g_i(a))]}{p_i(g_i(a)) - \mathrm{Min}[g_i(b) - g_i(a) \,;\, q_i(g_i(a))]}$$

et

$$D(a, b) = \begin{cases} 0 \text{ si } D_{ab} = \{j \in \{1, 2, \ldots, n\} : D_j(a, b) > C(a, b)\} = \varnothing \\ 1 - \prod_{i \in D_{ab}} \dfrac{1 - D_i(a, b)}{1 - C(a, b)} \text{ sinon} \end{cases}$$

avec

$$D_i(a, b) = \mathrm{Min}[1 \,;\, \mathrm{Max}[0 \,;\, \frac{g_i(b) - g_i(a) - p_i(g_i(a))}{v_i(g_i(a)) - p_i(g_i(a))}]].$$

La relation valuée C est appelée relation de concordance d'ELECTRE III.

Les relations de surclassement construites avec ELECTRE I ou ELECTRE III possèdent-elles certaines propriétés structurelles ? On constate de façon évidente qu'une relation de surclassement bâtie avec l'une où l'autre de ces méthodes est nécessairement réflexive (c'est-à-dire, $\forall\, a \in A$, a S a dans le cas net et $S(a, a) = 1$ dans le cas valué). Hormis la réflexivité, ces relations ont-elles d'autres propriétés ? La proposition, très simple, suivante permet de constater que tel n'est pas le cas.

Proposition 1.

(a) Soit T une relation binaire nette et réflexive sur un ensemble fini A. Il existe toujours un jeu de données pour lequel l'application d'ELECTRE I donne un résultat identique à T.

(b) Soit T une relation binaire valuée et réflexive sur un ensemble fini A. Il existe toujours un jeu de données pour lequel l'application d'ELECTRE III donne un résultat identique à T.

Démonstration. Elle est constructive et consiste à exhiber, dans chacun des cas, un jeu de données adéquat.

(a) Soit T une relation nette et réflexive sur A. Notons $u = m^2 - |T|$ le nombre d'arcs "manquant" dans T. Si $u = 0$, on retrouvera la relation T en utilisant un jeu de données constitué d'un unique critère donnant à toutes les actions de A une performance identique. Si $u \neq 0$, établissons une bijection entre $\{2, 3, \ldots, u+1\}$ et les couples $(a, b) \in A^2$ tels que Non(a T b).

Construisons alors un jeu de données tel que :

- $n = 1 + u$
- $s = 1/2$
- $g_1(c) = g_1(d)$, $\forall$ c, d $\in$ A ; $v_1(x) = k > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$,
- pour $i = 2, 3, \ldots, u+1$, supposons i en correspondance avec le couple (a, b) tel que Non(a T b) et choisissons les fonctions g_i et v_i de telle sorte que :
  $g_i(a) = z_1$, $g_i(c) = z_2$, $\forall c \in A\setminus\{a, b\}$ $g_i(b) = z_3$, avec $z_1 < z_2 < z_3$,
  $v_i(x) = v$, $\forall x \in \mathbb{R}$, avec $v > z_2 - z_1$, $v > z_3 - z_2$ et $v < z_3 - z_1$, ce qui est toujours possible,
- $k_1 = 1/2$, $k_2 = k_3 = \ldots = k_{1+u} = 1/2u$.

Il est évident de constater que l'application d'ELECTRE I à un tel jeu de données conduit à une relation S identique à T. Il consiste en effet simplement à bâtir un critère de "poids fort" sur lequel toutes les actions sont indifférentes. Compte tenu du choix de s, la relation C est alors complète. Pour chaque couple (a, b) tel que Non(a T b) on introduit un critère sur lequel a V b, ce qui permet bien de retrouver la relation T.

(b) Soit T une relation valuée et réflexive sur A. Si $T(a, b) = 1$, $\forall$ a, b $\in$ A, on retrouvera la relation T en utilisant un jeu de données constitué d'un unique critère donnant à toutes les actions de A une performance identique.

Dans le cas contraire, notons :

$$t^{Max} = \max_{\{a, b \in A : T(a, b) \neq 1\}} T(a, b),$$

$U = \{(a, b) \in A^2 : a \neq b \text{ et } T(a, b) \neq 1\}$ et $u = |U|$.

Remarquons que, par hypothèse, $t^{Max} \in [0 ; 1[$ et $u \in \{1, 2, \ldots, m(m-1)\}$.

Choisissons une valeur t telle que $t^{Max} < t < 1$ et considérons une bijection entre U et $\{2, 3, \ldots, u+1\}$.

Bâtissons alors un jeu de données tel que :

- $n = 1 + u$,
- $g_1(c) = g_1(d)$, $\forall$ c, d $\in$ A, $q_1(x) = p_1(x) = 0$, $v_1(x) = v > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$,
- pour $i = 2, 3, \ldots, u+1$, supposons i en correspondance avec le couple $(a, b) \in U$ et choisissons les fonctions g_i, q_i et p_i de manière à vérifier :
  $q_i(x) = p_i(x) = p > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $g_i(c) = z$, $\forall c \in A\setminus\{a, b\}$, $g_i(b) > z > g_i(a)$ avec :
  $g_i(b) > g_i(a) + p$, $g_i(b) < z + p$, $z < g_i(a) + p$, ce qui est toujours possible.
- $k_1 = t$, $k_i = (1-t)/u$ pour $i = 2, 3, \ldots, u+1$.

Appliquons ELECTRE III à un tel jeu de données et notons S la relation valuée obtenue.

Considérons un couple (a, b) tel que $T(a, b) = 1$. Il est aisé de constater qu'alors on a $C_i(a, b) = 1$ et $D_i(a, b) = 0$, $\forall i \in \{1, 2, \ldots, u+1\}$. On a donc $S(a, b) = 1$.

Considérons à présent un couple (a, b) $\in$ U, c'est-à-dire tel que T(a, b) < 1. Notons i l'unique indice de {2, 3, ..., u+1} en correspondance avec ce couple. Le jeu de données choisi conduit alors à :

$C_i(a, b) = 0$, $D_i(a, b) > 0$,

$C_j(a, b) = 1$ et $D_j(a, b) = 0$, $\forall\, j \neq i$.

On a donc :

$$C(a,b) = t + (u-1)\frac{1-t}{u} > T(a, b),$$

$S(a, b) = C(a, b)$ si $D_i(a, b) \leq C(a, b)$ et

$$S(a, b) = C(a, b).\frac{1 - D_i(a, b)}{1 - C(a, b)} \text{ sinon.}$$

Par hypothèse, on sait que T(a, b) < C(a, b) < 1. On peut alors toujours trouver une valeur $\delta \in]0, 1]$ qui soit telle que :

$$C(a, b).\frac{1 - \delta}{1 - C(a, b)} = T(a, b) \text{ et } \delta > C(a, b).$$

Pour obtenir S(a, b) = T(a, b), il suffit donc de choisir $v_i(g_i(a))$ de telle sorte que $D_i(a, b) = \delta$. Puisque $\delta \in]0, 1]$, un tel choix est toujours possible.

On a donc bien montré que l'on peut toujours bâtir un jeu de données tel que le résultat d'ELECTRE III appliquée à ce jeu donne un résultat S identique à T. □

Si l'on souhaite utiliser ELECTRE I ou ELECTRE III comme méthode de construction d'une relation de surclassement, il est donc légitime de s'intéresser à des procédures d'exploitation pouvant s'appliquer à toute relation binaire. C'est ce qui est fait par Vincke (1992) dans le cas net et par Pirlot (1991), Bouyssou (1992) et Bouyssou et Perny (1992), dans le cas valué. Notons cependant que, comme indiqué en introduction, la proposition 1 ne donne aucune information sur la nature et l'interprétation des relations de surclassement obtenues. En particulier, dans le cas d'ELECTRE III, elle laisse complètement ouverte la question des propriétés des "valuations" utilisées ainsi que des opérations qu'il peut être légitime de leur faire subir pour rester cohérent avec leur mode d'obtention. Nous achevons cette section par quelques remarques complétant cette proposition très simple.

i) Le procédé de construction d'ELECTRE I étant un cas particulier de celui d'ELECTRE IS (cf. Roy et Skalka (1984) ou Roy et Bouyssou (1993)), la partie (a) de la proposition implique que l'on peut obtenir toute relation réflexive comme résultat d'ELECTRE IS.

ii) Dans la pire des situations, les procédés proposés conduisent à bâtir une jeu de données comprenant m(m-1) + 1 critères à la fois pour ELECTRE I et ELECTRE III (on verra à la remarque suivante que l'on peut se contenter de m(m-1) critères avec ELECTRE I). Dans bien des cas, il est, bien sûr, possible de bâtir des jeux de données plus "réalistes", c'est-à-dire comprenant un nombre plus limité de critères. Pour chacune des deux méthodes, ceci amène a se poser la question de la détermination du nombre minimum n tel que pour toute relation réflexive il existe un jeu de données comprenant au plus n critères permettant de la retrouver comme résultat. Il s'agit là d'une question difficile et, à notre connaissance, ouverte.

iii) Dans ELECTRE I, la possibilité d'utiliser à loisir l'effet de veto rend évidente la preuve de la partie (a) de la proposition. En s'inspirant d'un résultat célèbre de McGarvey (1953) à propos de la méthode de la majorité simple, montrons que la proposition reste vraie même si l'on s'interdit d'utiliser cet effet de veto.

Soit T une relation nette et réflexive sur A. Soit {a, b} une paire d'actions distinctes de A. On a une et une seule des 3 situations suivantes :

i- [a T b et b T a]

ii- [a T b et Non(b T a)]

iii- [Non(a T b) et b T a].

Établissons une bijection entre {1, 3, ..., m(m-1) - 1} et les m(m-1)/2 paires d'actions distinctes de A. Construisons alors un jeu de données tel que :

- $n = m(m - 1)$
- $1/2 < s < 1/2 + 1/m(m-1)$
- pour i = 1, 3, ..., m(m-1) - 1. Supposons i en correspondance avec la paire d'actions distinctes {a, b}. Établissons une bijection f entre A\{a, b} et {1, 2, ..., m-2} et définissons g_i et g_{i+1} par :

  $g_i(a) = g_i(b) = m - 1$, $g_i(c) = f(c)$, $\forall\ c \in A\backslash\{a, b\}$ et

  $g_{i+1}(a) = g_{i+1}(b) = 0$, $g_{i+1}(c) = m - 1 - f(c)$, $\forall\ c \in A\backslash\{a, b\}$ si [a T b et b T a],

  $g_i(a) = m$, $g_i(b) = m - 1$, $g_i(c) = f(c)$, $\forall\ c \in A\backslash\{a, b\}$ et

  $g_{i+1}(a) = 1$, $g_{i+1}(b) = 0$, $g_{i+1}(c) = m - f(c)$, $\forall\ c \in A\backslash\{a, b\}$ si [a T b et Non(b T a)],

  $g_i(a) = m$, $g_i(b) = m - 1$, $g_i(c) = f(c)$, $\forall\ c \in A\backslash\{a, b\}$ et

  $g_{i+1}(a) = 0$, $g_{i+1}(b) = 1$, $g_{i+1}(c) = m - f(c)$, $\forall\ c \in A\backslash\{a, b\}$ si [Non(a T b) et Non(b T a)],
- $v_1(x) = v_2(x) = \ldots = v_n(x) = v > m$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
- $k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 1$.

Le choix des seuils de veto implique que la relation V est vide. Montrons alors que C = T, C étant la relation de concordance obtenue par application d'ELECTRE I à ce jeu de données. Soit {a, b} une paire d'actions distinctes de A.

Notons $r_{ab} = \sum_{i \in \{j \in \{1, 2, \ldots, n\} : g_j(a) \geq g_j(b)\}} k_i$ et $r_{ba} = \sum_{i \in \{j \in \{1, 2, \ldots, n\} : g_j(b) \geq g_j(a)\}} k_i$

Il est aisé de constater que l'on a :

$r_{ab} = r_{ba} = m(m-1)/2 + 1$ si a T b et b T a,
$r_{ab} = m(m-1)/2 + 1$ et $r_{ba} = m(m-1)/2 - 1$ si a T b et Non(b T a),
$r_{ab} = r_{ba} = m(m-1)/2$ si Non(a T b) et Non(b T a).
On a donc bien T = C pour toute valeur de s comprise strictement entre 1/2 et 1/2 + 1/m(m-1).

iv) Dans ELECTRE I, la structure de préférence sous-jacente à chaque critère est une structure de préordre complet (les définitions des structures de préodre, d'ordre et de quasi-ordre sont rappelées à la section 3). Le procédé utilisé au iii) conduit à toujours utiliser m(m-1) critères et exploite cette structure. Il serait intéressant de savoir si un tel résultat reste valable en utilisant uniquement des ordres complets sur chaque critère ou si cette borne peut être améliorée en utilisant sur chaque critère des structures plus faibles comme celle de quasi-ordre complet.

v) Le raisonnement utilisé au iii) se transpose sans difficulté à d'autres manières de bâtir une relation de concordance. En utilisant un procédé similaire on peut par exemple monter que toute relation nette asymétrique (c'est-à-dire telle que a T b $\Rightarrow$ Non(b T a)) peut s'obtenir comme une relation de concordance dans TACTIC (cf. Vansnick (1986) ; rappelons que les relations de concordance dans TACTIC sont nécessairement asymétriques).

vi) Contrairement à ce qui est cas avec ELECTRE I, on ne peut obtenir toute relation binaire valuée et réflexive avec ELECTRE III si l'on n'utilise pas la partie discordance de la méthode et l'on pose S(a, b) = C(a, b), $\forall$ a, b $\in$ A (ce qui revient à choisir, dans la méthode originale, des seuils de veto v_i "très grands"). Considérons la relation valuée (par convention, on lira toutes les relations valuées de ligne en colonne) définie par :

T	a	b	c
a	1	1	0
b	0	1	1
c	1	0	1

Supposons qu'il existe un jeu de données pour lequel l'application d'ELECTRE III donne une relation de concordance C identique à T (à titre d'exemple on pourra chercher un jeu de données pour lequel S est identique à T, ce qui est possible en vertu de la proposition 1). Dans ce jeu de données on a alors nécessairement, $\forall$ i $\in$ {1, 2, ..., n}, :
$g_i(a) > g_i(b) + p_i(g_i(b))$, $g_i(b) > g_i(c) + p_i(g_i(c))$, $g_i(c) > g_i(a) + p_i(g_i(a))$,
ce qui est contradictoire, la fonction p_i étant à valeur dans $\mathbb{R}+$.
Les relations de concordance issues d'ELECTRE III possèdent donc bien ce que nous avons appelé des "propriétés structurelles". Leur étude fait l'objet de section suivante.

3. Relations de concordance valuées et problème des "probabilité binaires de choix".

Afin d'analyser plus avant la question des "propriétés structurelles" des relations de concordance valuées, plaçons-nous dans le cadre général suivant (on désignera toujours par A un ensemble fini et non vide d'actions de cardinal m).

Considérons un "jeu de données" constitué de :
- un entier naturel non nul n,
- n fonctions (critères) $g_1, g_2, \ldots, g_n$ de A dans $\mathbb{R}$,
- n fonctions $t_1, t_2, \ldots, t_n$ de $\mathbb{R}^2$ dans [0 ; 1] telles que, $\forall\, i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, t_i soit croissante en son premier argument, décroissante en son second argument et $t_i(x, x) = 0, \forall\, x \in \mathbb{R}$,
- n coefficients réels strictement positifs (coefficients d'importance) $k_1, k_2, \ldots, k_n$,

la méthode dite de Concordance Stricte Généralisée ou CSG (inspirée dans sa formulation de Perny (1992) et Perny et Roy (1992)) amène à bâtir une relation binaire valuée P sur A en posant, $\forall\, a, b \in A$, :

$$P(a, b) = \frac{\sum\limits_{i \in \{1, 2, \ldots, n\}} k_i \cdot t_i(g_i(a), g_i(b))}{\sum\limits_{i \in \{1, 2, \ldots, n\}} k_i}.$$

Notons $\mathcal{CSG}$ l'ensemble des relations binaires valuées sur A pouvant être obtenues avec la méthode CSG. Puisque l'on a supposé $t_i(x, x) = 0$, il est clair que toutes les relations de $\mathcal{CSG}$ sont irréflexives (c'est-à-dire telle que $T(a, a) = 0, \forall\, a \in A$).

Il est facile de montrer que la méthode PROMETHEE (cf. Brans et Vincke (1985) ou Brans et al. (1984)) est un cas particulier de la méthode CSG avec $t_i(g_i(a), g_i(b)) = \Delta_i(g_i(a) - g_i(b))$, les fonctions Δ_i utilisée dans PROMETHEE étant croissantes et telles que $\Delta_i(0) = 0$. Considérons un jeu de données ELECTRE III et posons :

$$t_i(g_i(a), g_i(b)) = 1 - \frac{p_i(g_i(b)) - \mathrm{Min}[g_i(a) - g_i(b)\,;\, p_i(g_i(b))]}{p_i(g_i(b)) - \mathrm{Min}[g_i(a) - g_i(b)\,;\, q_i(g_i(b))]}.$$

Il est aisé de constater que de telles fonctions t_i sont bien admissibles pour la méthode CSG. Soit P la relation valuée obtenue avec cette méthode et C la relation de concordance obtenue avec ELECTRE III (pour les mêmes valeurs de coefficients k_i). On a alors simplement, $P(a, b) = 1 - C(b, a), \forall\, a, b \in A$. Dans la suite, nous nous contenterons donc de nous intéresser aux propriétés structurelles des relations de $\mathcal{CSG}$.

Afin de ramener la méthode CSG à une expression plus simple, rappelons (cf. Roubens et Vincke (1985)) les définitions classiques suivantes. Soit T une relation binaire nette sur A. Cette relation T est dite :

- réflexive si [a T a],
- complète si [a T b ou b T a],
- faiblement complète si [a $\neq$ b $\Rightarrow$ a T b ou b T a],
- transitive si [a T b et b T c $\Rightarrow$ a T c],
- antisymétrique si [a T b et b T a $\Rightarrow$ a = b],
- Ferrers si [(a T b et c T d) $\Rightarrow$ (a T d ou d T c)],
- quasi-transitive si [(a T b et b T c) $\Rightarrow$ (a T d ou d T c)],

pour tout a, b, c, d $\in$ A.

Soit T une relation binaire nette sur A. On désignera respectivement par $\iota(T)$ et $\alpha(T)$ la partie symétrique et la partie asymétrique de T, c'est-à-dire les relations définies par :

a $\alpha(T)$ b $\Leftrightarrow$ [a T b et Non(b T a)] et

a $\iota(T)$ b $\Leftrightarrow$ [a T b et b T a].

On dira qu'une relation binaire nette sur A est :

- un ordre complet si elle est complète, antisymétrique et transitive,
- un préordre complet si elle est complète et transitive,
- un quasi ordre complet si elle est complète, Ferrers et quasi-transitive,

et on notera $\mathcal{O}$ (resp. $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$) l'ensemble de tous les ordres complets (resp. préordres complets, quasi-ordres complets) sur A.

Soit K un ensemble de relations binaires nettes sur A et P une relation valuée sur A. Étant donné un coefficient $\beta \in [0, 1]$, on dira que P est β-représentable dans K s'il existe une fonction φ de K dans [0 ; 1] telle que :

$$\sum_{T \in K} \varphi(T) = 1,$$

pour laquelle :

$$P(a, b) = \sum_{T \in K} \varphi(T) \cdot T_\beta(a, b), \ \forall \ a, b \in A \text{ avec } a \neq b,$$

où :

$$T_\beta(a, b) = \begin{cases} 1 \text{ si a } \alpha(T) \text{ b,} \\ \beta \text{ si a } \iota(T) \text{ b,} \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Le résultat suivant permet de caractériser de manière "maniable" les relations pouvant être obtenues avec la méthode CSG.

Proposition 2.
Une relation binaire valuée sur A peut être obtenue par application de la méthode CSG si et seulement si elle est irréflexive et 0-représentable dans l'ensemble des quasi-ordres complets sur A.

Démonstration.
a) P est irréflexive et 0-représentable dans $\mathcal{Q} \Rightarrow P \in \mathcal{CSG}$. Associons un critère i à tout quasi-ordre T pour lequel $\varphi(T) > 0$. L'ensemble A étant fini, il existe toujours (voir, par exemple Fishburn (1970) une fonction g de A dans $\mathbb{R}$ telle que, $\forall$ a, b $\in$ A, :
$[a\ \alpha(T)\ b] \Leftrightarrow [g(a) > g(b) + 1]$.
Pour obtenir P à l'aide de la méthode CSG, il suffit alors de poser :
$k_i = \varphi(T)$, $g_i = g$, $t_i(x, y) = 1$ si $x > y + 1$ et 0 sinon.
b) $P \in \mathcal{CSG} \Rightarrow$ P est irréflexive et 0-représentable dans $\mathcal{Q}$. Compte tenu du mode construction de la relation P, son irréflexivité est évidente. Pour prouver qu'elle est 0-représentable dans $\mathcal{Q}$, il est suffisant de montrer que la relation valuée P_i définie par, $\forall$ a, b $\in$ A, $P_i(a, b) = t_i(g_i(a), g_i(b))$, est 0-représentable dans $\mathcal{Q}$, dès lors que t_i est une fonction admissible pour la méthode CSG. Compte tenu des propriétés classiques de la représentation matricielle des quasi-ordres et de leurs parties asymétriques (voir par exemple Roubens et Vincke (1985)), il est clair que P_i sera 0-représentable dans $\mathcal{Q}$ si sa matrice associée est en escalier, c'est-à-dire s'il existe un ordre complet T sur A tel que :
$a\ T\ b \Rightarrow P_i(a, c) \geq P_i(b, c)$ et $P_i(c, a) \leq P_i(c, b)$, $\forall c \in A$,
et sur-diagonale, c'est-à-dire si :
$a\ T\ b \Rightarrow P_i(b, a) = 0$.
La démonstration du fait que P_i est en escalier et découle directement de Perny (1992) ou Perny et Roy (1992). Puisque P_i est irréflexive elle est alors nécessairement sur-diagonale, ce qui achève la démonstration. □

On a vu que la méthode PROMETHEE était un cas particulier de la méthode CSG. La démonstration de la proposition 2 montre que si une relation est irréflexive et 0-représentable dans $\mathcal{Q}$, elle peut s'obtenir avec la méthode PROMETHEE, les fonctions $t_i(x, y)$ utilisées dans la démonstration ne dépendant que de x - y. On en conclut qu'une relation valuée peut être obtenue avec la méthode CSG si et seulement si elle peut être obtenue avec la méthode PROMETHEE.

La proposition 2 et la remarque précédente se transposent aisément à la méthode de Concordance Large Généralisée (CLG), identique à la méthode CSG à ceci près que $t_i(x, x) = 1$. La partie concordance d'ELECTRE III est un cas particulier de la méthode CLG. Il est clair que les trois propositions suivantes sont équivalentes :

- R peut être obtenue par application de la méthode CLG,
- R peut être obtenue comme une relation de concordance d'ELECTRE III,
- R est réflexive et 1-représentable dans $\mathcal{Q}$.

La proposition 2 invite à s'intéresser aux conditions permettant à une relation binaire valuée d'être 0-représentable dans l'ensemble des quasi-ordres complets. Avant d'aborder ce sujet, rappelons que le problème de la caractérisation des relation valuées 0-représentables dans l'ensemble des ordres complets (la valeur 0 a donc ici peu d'importance et est choisie par convention) a été très étudié dans la littérature sous le nom de "problème des probabilités binaires de choix" (parmi les nombreux travaux abordant la question, qui remonte aux années 1950, mentionnons les contributions récentes de Dridi (1980), Fishburn (1987 et 1990), Fishburn et Falmagne (1989), Gilboa (1990) et Cohen et Falmagne (1990) ; on trouvera une synthèse récente de ces travaux dans Fishburn (1992) et une présentation d'ensemble en langue française dans Bouyaux (1990)). Ce problème est difficile. Il revient à s'intéresser à l'ensemble des facettes d'un polyèdre de $\mathbb{R}^{m(m-1)}$ (les valeurs de la diagonale n'ayant pas d'importance pour le problème de la représentabilité) ayant $|\mathcal{O}| = m!$ sommets. Nous ne chercherons pas ici à tenter une présentation exhaustive des résultats contenus dans les travaux qui viennent d'être mentionnés. On se contentera de mentionner quelques points importants pour notre propos.

Pour tout triplet a, b, c d'actions distinctes de A , les conditions suivantes sont nécessaires pour que P soit 0-représentable dans $\mathcal{O}$:

$P(a, b) + P(b, a) = 1$ et (1)

$P(a, b) + P(b, c) \leq 1 + P(a, c)$. (2)

Soit T un ordre complet. Sa partie asymétrique $\alpha(T)$ est alors faiblement complète, ce qui implique la nécessité de (1), et transitive, ce qui implique la nécessité de (2). Notons que (2) est une condition nécessaire pour la 0-représentabilité dans tout ensemble de relation binaires dont les parties asymétriques sont transitives, ce qui est le cas avec $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$, mais aussi, plus généralement, pour l'ensemble des ordres d'intervalles (relations complètes et ferrers), des ordres partiels (relations réflexives, antisymétriques et transitives), des préordres partiels (relations réflexives et transitives), etc. Cette condition est généralement présentée sous la forme de l'inégalité "triangulaire" :

$P(a, b) + P(b, c) \geq P(a, c)$. (2bis)

qui lui est équivalente compte tenu de (1).

Les conditions (1) et (2) sont suffisantes pour la 0-représentabilité dans $\mathcal{O}$ lorsque $m \leq 5$ (cf. Dridi (1980) et Fishburn (1987)). Elles ne le sont plus dès lors que $m \geq 6$ comme suffit à le montrer l'exemple classique suivant (voir par exemple Gilboa (1990)) :

P	a	b	c	d	e	f
a	•	1/2	1/2	1	1	1/2
b	1/2	•	1/2	1	1/2	1
c	1/2	1/2	•	1/2	1	1
d	0	0	1/2	•	1/2	1/2
e	0	1/2	0	1/2	•	1/2
f	1/2	0	0	1/2	1/2	•

Sur cet exemple, on vérifie aisément que la relation P satisfait bien aux conditions (1) et (2). Il est pourtant impossible qu'elle soit 0-représentable dans $\mathcal{O}$. En effet, seuls les ordres totaux T tels que :

a T d, a T e, b T d, b T f, c T e et c T f, (3)

sont candidats pour représenter T. Or, tout ordre total T vérifiant (3) ne peut satisfaire qu'à au plus l'une des trois relations : f T a, e T b, et d T c. Il est donc impossible d'avoir simultanément P(f, a) = 1/2, P(e, b) = 1/2 et P(d, c) = 1/2.

On sait qu'il est impossible d'obtenir un ensemble fini de conditions nécessaires et suffisantes assurant, pour tout m, qu'une relation valuée soit 0-représentable dans $\mathcal{O}$ (cf. Fishburn (1990) ou Fishburn et Falmagne (1989)). Un tel ensemble de conditions existe cependant pour chaque valeur de m. La découverte de telles conditions pour m = 6, 7, ... est un problème ouvert et difficile (Fishburn (1992) mentionne un résultat récent, obtenu par énumération, de G. Reinelt donnant de telles conditions pour m = 6).

Dans le contexte des travaux qui viennent d'être cités, on suppose que P(a, b) s'interprète comme la probabilité qu'un individu choisisse l'objet a au sein de l'ensemble d'objets distincts {a, b}. Si P est représentable dans $\mathcal{O}$, tout se passe comme si l'individu effectuait son choix en accord avec un ordre complet tiré au sort parmi les éléments de $\mathcal{O}$ avec une certaine distribution de probabilité. Dans un tel contexte, intéressons-nous au problème plus général de le représentation de P dans un ensemble K de relations complètes. Supposons la relation $T \in K$, choisie par l'individu au moment d'effectuer un choix dans {a, b}, a et b étant distincts. Si a $\iota(T)$ b, il est alors naturel de supposer que l'individu choisira a ou b avec une chance sur deux. Hormis le cas de la représentabilité dans $\mathcal{O}$, pour lequel cette question n'a pas d'importance, il est donc naturel dans le contexte des probabilités binaires de choix de s'intéresser à la 1/2-représentation des relations valuées dans un ensemble de relations complètes. Ceci explique que, dans ce contexte, le problème de la 1/2-représentabilité dans $\mathcal{P}$ ne soit jamais mentionnée. En effet si T est un préordre complet, la relation valuée traduisant les "probabilités binaires de choix" naturellement associée à T dans ce contexte (en posant $\forall$ a, b $\in$ A avec a $\neq$ b, T(a, b) = 1 si a α(T) b, T(a, b) = 1/2 si a ι(T) b et T(a, b) = 0 sinon) est toujours 0-représentable dans O, ceci découlant du fait que les préodres sont de dimension 2. On comprend cependant plus difficilement pourquoi (à moins de considérer les quasi-ordres comme des formes peu "rationnelles" d'expression de préférences) le problème de la 1/2-représentabilité dans Q n'a jamais, à notre connaissance, été étudié. En effet, L'existence de quasi-ordres de dimension 3 dès lors que m $\geq$ 7 (cf. Rabinovitch (1978)) implique, dans ce cas, que le problème de la 1/2-représentabilité dans Q (et a fortiori dans l'ensemble des ordres d'intervalles ou des ordres partiels) est distinct de celui de la 0-représentabilité dans O (on le vérifiera aisément sur les trois seuls types de quasi-ordres de dimensions 3 présentés dans Rabinovitch (1978)). Il est aisé de constater que (1) et (2) restent des conditions nécessaires pour la 1/2-représentabilité dans Q. En vertu de ce qui précède, elles ne sont suffisantes que si m $\leq$ 5. Le cas m = 6 est identique au problème de la 0-représentabilité dans O. Lorsque m $\geq$ 7, tout laisse croire que le gain de "degrés de liberté" qu'on opère avec ce problème plus général ne le rend pas beaucoup moins ardu que le problème classique de la 0-représentabilité dans O. Notre problème étant celui de la 0-représentabilité dans Q, nous n'aborderons pas ce point plus avant.

Ce qui précède invite à s'intéresser, pour le problème de la 0-représentabilité dans Q, aux conditions :

$P(a, b) + P(b, a) \leq 1$ et (1bis)

$P(a, b) + P(b, c) \leq 1 + P(a, c)$. (2)

Leur nécessité pour la 0-représentation dans Q est évidente (notons qu'avec (1bis), (2) n'est plus équivalente à l'inégalité triangulaire (2bis)). Le fait qu'elles soient également nécessaires pour la 0-représentabilité dans l'ensemble des ordres d'intervalles ou des ordres partiels, invite à croire qu'elles ne sont pas suffisantes dès lors que m est suffisamment grand pour que Q soit distinct de ces ensembles (ce qui, bien sûr, le cas pour m $\geq$ 4). L'exemple suivant montre qu'il en va bien ainsi :

P	a	b	c	d
a	•	0	1/2	1/2
b	0	•	1/2	0
c	0	1/2	•	1/2
d	1/2	0	0	•

Il est élémentaire de constater que P vérifie bien (1bis) et (2). Supposons que P soit 0-représentable par une famille de quasi-ordres. L'ensemble de ceux pour lesquels b α(T) c doit recevoir un poids de 1/2. Pour ces quasi ordres, il est exclu d'avoir c α(T) d car alors on aurait b α(T) d par transitivité. L'ensemble de ceux pour lesquels c α(T) b doit recevoir tout le "poids restant" c'est-à-dire 1/2. Pour ces quasi ordres, il est exclu d'avoir a $\alpha(T)$ c car alors on aurait a $\alpha(T)$ b par transitivité. Si la relation P est 0-représentable dans $\mathcal{Q}$, elle doit donc l'être par deux familles de quasi-ordres vérifiant respectivement :

b $\alpha(T)$ c, a $\alpha(T)$ c et

c $\alpha(T)$ b, c $\alpha(T)$ d.

Pour aucun quasi-ordre du premier sous-ensemble on ne peut avoir d $\alpha(T)$ a, car alors on aurait d $\alpha(T)$ c par transitivité. Mais d $\alpha(T)$ a est impossible dans le deuxième sous-ensemble puisque la transitivité impliquerait alors c $\alpha(T)$ a. Il est donc impossible que P soir 0-représentable dans $\mathcal{Q}$.

Notons que le raisonnement qui précède n'utilise que la transitivité de la partie asymétrique. Cet exemple montre donc également que (1bis) et (2) ne sont pas suffisantes pour assurer la 0-représentabilité d'une relation valuée dans tout sous-ensemble de relations nettes dont la partie asymétrique est transitive dès lors que $m \geq 4$. Une preuve fastidieuse mais simple montre que (1bis) et (2) deviennent suffisantes pour la 0-représentabilité dans $\mathcal{Q}$ lorsque $m = 3$ (et donc par conséquent dans tout ensemble de relations nettes dont la partie asymétrique est transitive). Nous ne la reproduisons pas ici.

Il y a donc tout lieu de croire que, de même que pour le problème des "probabilités binaires de choix", la caractérisation de $\mathcal{CSG}$ se heurte a des problèmes difficiles dès lors que m dépasse quelques unités. Compte tenu de l'exemple avec $m = 4$ qui vient d'être donné, nous ne poursuivrons pas plus avant dans cette voie.

Le fait de ne pas disposer de caractérisation simple de $\mathcal{CSG}$ pour toute valeur de m invite à chercher à tirer directement parti des propriétés de $\mathcal{CSG}$ telles que l'on peut les inférer à partir de la proposition 2. En particulier, notons que si l'on impose dans la méthode CSG aux fonctions t_i et aux coefficients k_i de prendre leurs valeurs dans l'ensemble des rationnels, hypothèse fort peu restrictive en pratique, toute relation P de $\mathcal{CSG}$ peut s'interpréter de manière simple comme le résumé d'un "scrutin" où chaque votant indiquerait sa préférence sur les objets de A par un quasi-ordre complet. Les valeurs P(a, b) représentent alors simplement le pourcentage de votant ayant déclaré que "a est strictement préféré à b". Dans un tel contexte, la procédure d'exploitation utilisée dans PROMETHEE II qui pré-ordonne complètement les actions de A sur la base de leur "flot net" apparaît comme le résultat de la méthode de Borda appliqué au scrutin dont il vient d'être question. Cette analogie est exploitée à la section suivante, où, à titre d'exemple, l'on montre que l'on peut transposer dans notre cadre, de manière immédiate, les résultats en théorie du choix social caractérisant la méthode de Borda.

4. Une caractérisation de la procédure de rangement du flot net.

Dans le contexte de la théorie du choix social, la méthode de Borda, en tant que procédure de choix, a été caractérisée par Young (1974) (sa démonstration a été considérablement simplifiée par Hansson et Sahlquist (1976) et Debord (1987) ; pour une approche alternative, utilisant un procédé de démonstration fort différent, on pourra se reporter à Nitzan et Rubinstein (1981)). Montrons ici, à titre d'exemple, comment on peut adapter ce résultat de manière immédiate pour caractériser la procédure du flot net d'une manière qui soit adaptée à la méthode CSG. Dans tout ce qui suit A désignera toujours un ensemble d'actions fini et non vide.

Notons $\mathcal{V}$ l'ensemble des relations binaires valuées sur A. Étant donné un ensemble $K \subset \mathcal{V}$ de relations valuées, une K-procédure de rangement est une fonction F associant à tout élément de K un préordre complet sur A.

La procédure du flot net F^{NF} est une K-procédure de rangement telle que, $\forall P \in K, \forall a, b \in A$:

$$a\, F^{NF}(P)\, b \Leftrightarrow s_{NF}(a, P, A) \geq s_{NF}(b, P, A)$$

où

$$s_{NF}(a, P, A) = \sum_{c \in A} (P(a, c) - P(c, a)).$$

Cette procédure de rangement (sur l'utilisation du flot net en tant que procédure de choix, on pourra se reporter à Barret et al. (1990)) suppose, bien sûr, que les valuations manipulées possèdent certaines propriétés "cardinales". On ne se posera pas ici la question de relier l'existence de ces propriétés à un mode particulier d'obtention des élément de K.

La procédure du flot net en tant que $\mathcal{V}$-procédure de rangement a été caractérisée par Bouyssou (1992). Cette caractérisation utilise toute la richesse de l'ensemble de toutes les relations valuées et donc ne se transpose pas de façon évidente au cas des K-procédures de rangement avec $K \neq \mathcal{V}$. Nous caractériserons ici la procédure du flot net en tant que K-procédure de rangement pour tout ensemble K qui :

- soit **stable par permutation**, c'est-à-dire tel que :
  $P \in K \Rightarrow P^{\phi} \in K$,
  où ϕ est une bijection de A dans A et P^{ϕ} est une relation valuée telle que, $\forall a, b \in A$, $P^{\phi}(a, b) = P(\phi^{-1}(a), \phi^{-1}(b))$,
- soit **stable par transposition**, c'est-à-dire tel que :
  $\forall P \in K, \exists P^t \in K$ tel que, $\forall a, b \in A$ avec $a \neq b$, $P^t(a, b) = P(b, a)$.

– soit **convexe**, c'est-à-dire tel que, $\forall \gamma \in]0, 1[$, :
$P, P' \in K \Rightarrow P\gamma P' \in K$,
où $P\gamma P'$ est une relation valuée telle que, $\forall$ a, b $\in$ A, $P\gamma P'(a, b) = \gamma P(a, b) + (1 - \gamma)P'(a, b)$,
– **contiennent les ordres complets**, c'est-à-dire tel que :
$\forall T \in \mathcal{O}, \exists T^* \in K$ tel que, $\forall$ a, b $\in$ A avec $a \neq b$, $a\,T\,b \Leftrightarrow T^*(a, b) = 1$ et Non(a T b) $\Leftrightarrow$ $T^*(a, b) = 0$.

Il est clair que $\mathcal{V}$ est stable par permutation, stable par transposition, convexe et contient les ordres complets. En vertu de la proposition 2, il en va de même pour $\mathcal{CSG}$. Dans tout ce qui suit, K désignera un sous-ensemble de $\mathcal{V}$ stable par permutation, stable par transposition, convexe et contenant les ordres complets.

On dira qu'une K-procédure de rangement F est **neutre** si, $\forall$ P $\in$ K, $\forall \phi \in \Gamma(A)$, $\forall$ a, b $\in$ A,
$a\,F(P)\,b \Leftrightarrow \phi(a)\,F(P^{\phi})\,\phi(b)$,
où $\Gamma(A)$ désigne l'ensemble des bijections de A dans A.
Cet axiome impose qu'une procédure de rangement ne prenne pas en compte l'"identité" des actions pour bâtir un préordre (une procédure non neutre consisterait, par exemple, à toujours ranger les actions dans l'ordre lexicographique de leurs noms). Il s'agit d'une propriété classique dans ce contexte. Il est évident que la procédure du flot net est neutre.

On dira qu'une K-procédure de rangement F est **égalitaire** si, $\forall$ P $\in$ K,
$[P(a, b) = P(b, a), \forall a, b \in A] \Rightarrow [F(P) = Id]$,
où Id désigne le préordre complet sur A ne comportant qu'une seule classe d'équivalence (c'est-à-dire tel que a Id b et b Id a, $\forall$ a, b $\in$ A).
L'ensemble K étant convexe et contenant les ordres complets, il contient bien des relations pour lesquelles l'axiome d'égalitarisme trouve à s'appliquer. Cet axiome impose qu'une relation valuée symétrique conduise à placer toutes les actions A dans une même classe d'équivalence. Ceci semble raisonnable dès lors que l'on cherche une préordre complet comme résultat, ce qui est bien le cas ici. Notons que cet axiome paraît, en revanche, critiquable pour ce qui concerne les procédures visant à obtenir un préordre partiel, c'est-à-dire une relation réflexive et transitive. Il interdirait alors de distinguer les situations d'indifférence des situations d'incomparabilité. La procédure du flot net est, bien sûr, égalitaire.

Soit T une relation appartenant à l'ensemble $\mathcal{O}$ des ordres complets sur A. L'ensemble K contient par hypothèse une relation T^* correspondant à T (qui n'est autre que la fonction caractéristique de T aux problèmes de réflexivité près). Dans un tel cas il semble raisonnable

pour le "respect des données" (cf. Vincke (1992)) que $F(T^*)$ coïncide avec T. C'est ce qu'impose l'axiome de loyauté. De façon formelle, une K-procédure de rangement F sera dite **loyale** si, $\forall P \in K$,
$P \in \mathcal{O}$ et, $\forall a, b \in A$ avec $a \neq b$, $[a P b \Leftrightarrow P^*(a, b) = 1]$ et $[\text{Non}(a T b) \Leftrightarrow T^*(a, b) = 0] \Rightarrow F(P^*) = P$.
Il est clair que la procédure du flot net est loyale.

La convexité de K est utilisée pour introduire un axiome portant sur le résultat de la combinaison linéaire de deux relations valuées. On dira qu'une K-procédure de rangement F est **cohérente** si, $\forall P, P' \in K, \forall a, b \in A, \forall \gamma \in]0, 1[$,
$[a F(P) b$ et $a F(P') b] \Rightarrow a F(P\gamma P') b$ et
$[a F(P) b$ et $a \alpha(F(P')) b] \Rightarrow a \alpha(F(P\gamma P')) b$.
où $P\gamma P'$ désigne la relation de K obtenue par combinaison linéaire de P et P′ avec les coefficients γ et $(1-\gamma)$.
Puisque, $s_{NF}(a, P\gamma P', A) = \gamma s_{NF}(a, P, A) + (1 - \gamma) s_{NF}(a, P', A)$, il est évident que la procédure du flot net est cohérente. L'axiome de cohérence se justifie aisément dans le cadre des méthodes CSG et CLG. Soit P la relation valuée obtenue avec une de ces méthodes sur une famille de n critères et F(P) le préordre résultat. Partitionnons la famille de critères en deux sous-ensembles et appliquons maintenant la même méthode à chacun d'entre eux, ce qui donne des relations valuées P′ et P″ et des préordres résultats F(P′) et F(P″). Si ces deux préordres comparent deux actions de façon identiques, il semble raisonnable d'imposer que cette comparaison soit préservée dans le préordre obtenu en considérant l'ensemble des critères. Puisque, dans le cadre des méthodes CSG et CLG, $P = P'\gamma P''$, on voit alors l'intérêt de l'axiome de cohérence. Notons qu'avec ELECTRE III, s'il est tout aussi raisonnable d'imposer une même cohérence entre les comparaisons sur des sous-familles et la comparaison globale, l'axiome de cohérence ne se justifie plus puisque, du fait de la prise en compte de la discordance, on n'a pas $P = P'\gamma P''$.

On a introduit quatre axiomes à propos des K-procédures de rangement. La proposition suivante montre qu'ils caractérisent la procédure du flot net.

Proposition 3.
Pour tout ensemble K stable par permutation, stable par transposition, convexe et contenant les ordres complets, la procédure du flot net est la seule K-procédure de rangement qui soit neutre, égalitaire, loyale et cohérente.

On a déjà observé que la procédure du flot net était neutre, égalitaire, loyale et cohérente. La démonstration du fait qu'elle soit la seule K-procédure de rangement à satisfaire ces axiomes revient à transposer les démonstrations de Young (1974), Hansson et Sahlquist (1976) et Debord (1987) à notre cadre ; on la donnera en annexe.

Complétons cette proposition par quelques remarques.

i) Les quatre axiomes utilisés pour caractériser la procédure du flot net sont indépendants comme le montrent les exemples suivants.

1- Soit $\Phi : A \to \{1, 2, ..., m\}$ une bijection.

Définissons une procédure de rangement F telle que :

$a\ F(P)\ b \Leftrightarrow s(a, P, A) \geq s(b, P, A)$,

avec, $\forall\ c \in A$,

$$s(c, P, A) = \sum_{d \in A} \Phi(d).(P(c, d) - P(d, c)).$$

Cette procédure de rangement est égalitaire, loyale et cohérente mais n'est pas neutre.

2- Définissons une procédure de rangement F telle que :

$a\ F(P)\ b \Leftrightarrow s(a, P, A) \geq s(b, P, A)$,

avec, $\forall\ c \in A$,

$$s(c, P, A) = \sum_{d \in A} P(c, d).$$

Cette procédure de rangement est neutre, loyale et cohérente mais n'est pas égalitaire.

3- Définissons une procédure de rangement F telle que :

$a\ F(P)\ b \Leftrightarrow s(a, P, A) \geq s(b, P, A)$,

avec, $\forall\ c \in A$,

$s(a, P, A) = - s_{NF}(a, P, A)$.

Cette procédure de rangement est neutre, égalitaire et cohérente mais loyale.

4- Définissons une procédure de rangement F telle que :

$a\ F(P)\ b \Leftrightarrow s(a, P, A) \geq s(b, P, A)$,

avec, $\forall\ c \in A$,

$$s(c, P, A) = \sum_{d \in A} (P(c, d)^2 - P(d, c)^2).$$

Cette procédure de rangement est neutre, égalitaire et loyale mais n'est pas cohérente.

Il n'est difficile, sur la base des exemples qui viennent d'être présentés, de montrer que ces quatre axiomes sont complètement indépendants.

ii) La proposition 3 permet de caractériser la procédure du flot net en tant que $\mathcal{V}$-procédure de rangement. On détaillera en annexe les liens existants entre cette caractérisation et celle proposée dans Bouyssou (1992).

iii) Comme le montre Debord (1987), dans le cadre de le théorie du choix social, on peut utiliser la proposition 3 pour caractériser la procédure du flot net itéré. Cette procédure de rangement conduit, dans sa version descendante, à un préordre complet où sont classées en tête toutes les actions ayant un flot net maximal puis en deuxième position celles ayant flot net maximal, ce flot net étant calculé sur l'ensemble des actions non encore rangées, et ainsi de suite. La procédure du flot net itéré descendant est, de façon évidente, neutre, égalitaire et loyale. Des exemples simples permettent de s'assurer qu'elle pas cohérente. Elle cependant "cohérente en tête" au sens où, si une action appartient à la fois à la première classe d'équivalence de F(P) et F(P′), elle appartiendra également à la première classe d'équivalence de F(PγP′). Les axiomes de neutralité, d'égalitarisme, de loyauté et de cohérence en tête sont cependant insuffisants pour caractériser la procédure du flot net itéré descendant : la cohérence impliquant la cohérence en tête, la procédure du flot net satisfait bien à ces quatre axiomes. Pour parvenir à caractériser cette procédure, il faut introduire un axiome "capturant" son coté itératif. On utilisera pour cela un axiome de "décomposabilité vers le bas", imposant que le retrait de l'ensemble A des actions classées en tête dans F(P) ne modifie pas le classement des autres actions. On trouvera l'énoncé formel de cette propriété dans Debord (1987). Si elle peut apparaître très exigeante, elle n'est pas sans intérêt dans les problèmes réels lorsque des "désistements" sont susceptibles de se produire. Ce nouvel axiome ajouté aux quatre déjà présentés permet de caractériser la procédure du flot net itéré descendant. La démonstration de cette proposition découle de façon simple de le proposition 3. On l'omettra donc ici. Précisions enfin que nous ne connaissons pas de système d'axiomes caractérisant cette procédure où l'on peut faire l'économie de la "décomposabilité" et qui permettrait de faire ressortir de manière moins triviale le caractère itératif de la procédure.

iv) Considérons à présent la procédure de rangement fondée sur la "distillation" du flot net. Elle opère comme la procédure du flot net itéré à ceci près que si, à une étape donnée du processus, plusieurs actions ont un flot net maximal, on tentera de les départager sur la base de leur flot net calculé entre elles, de façon analogue à ce qui est fait dans la procédure d'exploitation d'ELECTRE III. De façon évidente, cette procédure est neutre, égalitaire, loyale et décomposable vers le bas. Elle n'est cependant pas cohérente en tête comme le montre l'exemple suivant (on notera que les relations utilisées dans cet exemple appartiennent bien à $\mathcal{CSG}$).

P	a	b	c	d
a	0	0	1/4	0
b	1/8	0	0	1/4
c	0	1/4	0	1/8
d	0	0	0	0

Avec la relation P, a, b et c ont un flot net maximal de 1/8. Si on cherche à départager a, b, et c sur la base de leur flot net, a arrive seule en tête.

P′	a	b	c	d
a	0	0	0	1/4
b	1/8	0	1/4	0
c	0	0	0	0
d	0	1/4	1/8	0

Avec la relation P′, a, b et d ont un flot net maximal de 1/8. Encore une fois chercher à départager a, b et d sur la base de leur flot net conduit à placer a seule en tête.
Considérons à présent la relation $P_{1/2}P'$. Dans cette relation a et b ont un flot net maximal de 1/8. Chercher à les départager conduit alors à placer b seule en tête.
La caractérisation de la procédure du flot net distillé soulève des problèmes délicats. Nous ne les avons pas résolus à ce jour.

5. Conclusion.

Ces quelques remarques à propos des méthodes de construction et d'exploitation de relations de surclassement laissent bien des questions ouvertes. Nous soulignons brièvement ici les quelques directions qui nous semblent les plus importantes et/ou prometteuses.

On a souligné à plusieurs reprises que les résultats des propositions 1 et 2 étaient loin d'épuiser tous les liens qu'il serait utile d'analyser pour assurer une "bonne interface" entre méthodes de construction et procédures d'exploitation de relations de surclassement. Le problème de l'interprétation des valuations dans les méthodes bâtissant une relation valuée et son corollaire en termes d'opérations admissibles sur ces valuations reste largement ouvert. Il s'agit là d'un point essentiel pour l'analyse des méthodes de surclassement prises dans leur ensemble.

Pour ce qui concerne la caractérisation des relations de surclassement pouvant être obtenue avec une méthode donnée, bien des problèmes restent ouverts. On a mentionné la question de la taille minimale des jeux de données à propos de la proposition 1. De plus, beaucoup reste à faire pour aller au delà de la proposition 2. On trouvera dans Fishburn (1987) une liste de problèmes ouverts à propos de la question de la représentabilité. À cette liste, il faut ajouter ceux mentionnés à la section 3 : problème de 0-représentabilité dans l'ensemble des quasi-ordres, des ordres d'intervalles et des ordres partiels dès lors que $m \geq 4$, problème de la 1/2-représentabilté dans l'ensemble des quasi-ordres lorsque $m \geq 7$. Enfin, notre analyse ne couvre qu'une partie des méthodes existant pour construire une relation de surclassement.

L'analyse présentée au 4 pourrait être étendue à d'autres procédures de rangement. Cependant il serait plus satisfaisant de parvenir à axiomatiser l'ensemble d'une méthode de surclassement, c'est-à-dire un couple méthode de construction, procédure d'exploitation. Un tel travail réglerait du même coup les problèmes d'"interprétation" et d'"opérations admissibles" déjà mentionnés.

Annexes

I. Démonstration de la Proposition 3.

Elle repose sur deux lemmes.

Lemme 1. Si F est une K-procédure de rangement neutre, égalitaire et cohérente alors, $\forall$ P $\in$ K, $[s_{NF}(a, P, A) = 0, \forall a \in A] \Rightarrow [F(P) = Id]$.

Démonstration du Lemme 1. Soit $P \in K$ telle que $s_{NF}(c, P, A) = 0, \forall c \in A$. Supposons, en contradiction avec la thèse, que $U(F(P)) \neq A$, $U(F(P))$ désignant les éléments de la première classe d'équivalence de P. Soit $a \in U(F(P))$ et notons $\Gamma^a(A)$ l'ensemble des bijections ϕ de A dans A telles que $\phi(a) = a$. Notons P^a l'élément de K barycentre de l'ensemble des relations P^ϕ avec $\phi \in \Gamma^a(A)$. Puisque, par hypothèse, $s_{NF}(a, P, A) = 0$, il n'est pas difficile de constater que P^a est symétrique. L'axiome d'égalitarisme implique alors $F(P^a) = Id$.
Appliquons à présent l'axiome de neutralité à chacune des relations P^ϕ avec $\phi \in \Gamma^a(A)$. Par construction, $\forall \phi \in \Gamma^a(A)$, $a \in U(F(P^\phi))$. Compte tenu du mode de construction de P^a permutant toutes les actions autres que a, l'axiome de cohérence implique $\{a\} = U(F(P^a))$, ce qui est contradictoire et achève la preuve du Lemme 1. □

Lemme 2. Si F est une K-procédure de rangement neutre, égalitaire et cohérente alors, $\forall$ P, Q $\in$ K, $[s_{NF}(a, P, A) = s_{NF}(a, Q, A), \forall a \in A] \Rightarrow [F(P) = F(Q)]$.

Démonstration du Lemme 2. Par construction, $P_{1/2}Q^t$ et $Q_{1/2}P^t$ satisfont aux conditions du Lemme 1. On a alors $F(P_{1/2}Q^t) = F(Q_{1/2}P^t) = Id$. L'axiome de cohérence implique :
$F(P) = F(P_{1/2}(Q_{1/2}P^t)) = F((P_{1/2}Q)_{1/2}(P_{1/2}P^t))$ et
$F(Q) = F(Q_{1/2}(P_{1/2}Q^t)) = F((Q_{1/2}P)_{1/2}(Q_{1/2}Q^t))$.
Par construction, les relations $P_{1/2}P^t$ et $Q_{1/2}Q^t$ sont symétriques et donc, d'après l'axiome d'égalitarisme, $F(P_{1/2}P^t) = F(Q_{1/2}Q^t) = Id$. L'axiome de cohérence implique alors $F(P) = F(Q)$, ce qui achève la preuve du Lemme 2. □

Démonstration de la Proposition 3. Il nous faut montrer que si F est neutre, égalitaire, cohérente et loyale alors, $\forall P \in K, \forall a, b \in A$, $a\, F(P)\, b \Leftrightarrow s_{NF}(a, P, A) \geq s_{NF}(b, P, A)$, ce qui est équivalent à :

$s_{NF}(a, P, A) = s_{NF}(b, P, A) \Rightarrow a\, \iota[F(P)]\, b$ et (a)

$s_{NF}(a, P, A) > s_{NF}(b, P, A) \Rightarrow a\, \alpha[F(P)]\, b$. (b)

Supposons tout d'abord que $s_{NF}(a, P, A) = s_{NF}(b, P, A)$ et posons a F(P) b, sans perte de généralité. Soit θ la bijection de A dans A telle que $\theta(a) = b$, $\theta(b) = a$ et $\theta(c) = c$, $\forall$ c $\in$ A\{a, b}. On a, $\forall$ c $\in$ A, $s_{NF}(c, P, A) = s_{NF}(c, P^{\theta}, A)$. Le Lemme 2 implique alors $F(P) = F(P^{\theta})$. On a donc a $F(P^{\theta})$ b et l'axiome de neutralité implique b F(P) a, ce qui démontre (a).

Supposons à présent que $s_{NF}(a, P, A) > s_{NF}(b, P, A)$ et b F(P) a. Posons $\delta = s_{NF}(a, P, A) - s_{NF}(b, P, A)$. Considérons alors un ordre complet T sur A où b occupe l'avant dernière place juste avant a. L'axiome de loyauté implique F(T*) = T et donc b α[F(T*)] a.

On a $s_{NF}(a, T^*, A) = (1 - p)$ et $s_{NF}(b, T^*, A) = (3 - p)$. Posons $\gamma = 2/(2 + \delta)$. On a $\gamma \in]0 ; 1[$ et, par construction, $s_{NF}(a, P\gamma T^*, A) = s_{NF}(b, P\gamma T^*, A)$. Le point (a) implique alors a $\iota[F(P\gamma T^*)]$ b. Puisque b F(P) a et b $\alpha[F(T^*)]$ a, l'axiome de cohérence implique b $\alpha[F(P\gamma T^*)]$ a, ce qui est contradictoire. On a donc établi (b) ce qui achève la démonstration de la proposition 3. □

II. Procédures de rangement sur l'ensemble des relations valuées.

Pour caractériser la procédure du flot net en tant que $\mathcal{V}$-procédure de rangement, Bouyssou (1992) introduit les axiomes suivants.

Une $\mathcal{V}$-procédure de rangement F est **strictement monotone** si, $\forall$ R $\in \mathcal{V}$, $\forall$ a, b $\in$ A,
a F(R) b $\Rightarrow$ a α[F(R′)] b,
où R′ $\in \mathcal{V}$ est identique à R à l'exception de :
$\exists$ c $\in$ A\{a} tel que $R(a, c) < R'(a, c)$ ou $R(c, a) > R'(c, a)$.

Une $\mathcal{V}$-procédure de rangement F est **indépendante des circuits** si, $\forall$ R $\in \mathcal{V}$,
F(R) = F(R′),
où R′ $\in \mathcal{V}$ est identique à R à l'exception de :
$\exists$ a, b $\in$ A, $a \neq b$ et $R(a, b) - R'(a, b) = R(b, a) - R'(b, a)$ ou
$\exists$ a, b, c $\in$ A, $a \neq b$, $b \neq c$, $a \neq c$ et $R(a, b) - R'(a, b) = R(b, c) - R'(b, c) = R(c, a) - R'(c, a)$.

On a alors :

Proposition (Bouyssou (1992). La procédure du flot net est la seule $\mathcal{V}$-procédure de rangement neutre, strictement monotone et indépendante des circuits.

La proposition suivante précise les liens entre ces axiomes et ceux utilisés à la section 4.

Proposition. Soit F une $\mathcal{V}$-procédure de rangement.
(a) Si F est neutre, égalitaire et cohérente alors elle est indépendante des circuits.
(b) Si F est neutre, égalitaire, cohérente et loyale alors elle est strictement monotone.
(c) Si F est neutre et indépendante des circuits alors elle est égalitaire.
(d) Si F est neutre et strictement monotone alors elle est loyale.
(e) Si F est neutre, strictement monotone et indépendante des circuits alors elle est cohérente.

Démonstration.
(a) Soit F une procédure de rangement neutre, égalitaire et cohérente. Soit $R \in \mathcal{V}$. Considérons la relation $R' \in \mathcal{V}$ identique à R à l'exception d'un couple (a, b) avec $a \neq b$ sur lequel $R(a, b) - R'(a, b) = R(b, a) - R'(b, a)$. On peut supposer sans perte de généralité que $R(a, b) - R'(a, b) = \varepsilon > 0$. Considérons la relation identiquement nulle $Nu \in \mathcal{V}$ et la relation $T \in \mathcal{V}$ identique à Nu à l'exception de $T(a, b) = T(b, a) = \varepsilon$. Si F est égalitaire on a $F(T) = F(Nu) = Id$. L'axiome de cohérence implique alors $F(R_{1/2}T) = F(R)$ et $F(R'_{1/2}Nu) = F(R')$. Par construction on a $R_{1/2}T = R'_{1/2}Nu$ d'où $F(R) = F(R')$. F est donc indépendante des circuits de longueur 2 si elle est égalitaire et cohérente.
Considérons maintenant la relation $R'' \in \mathcal{V}$ identique à R à l'exception d'un triplet (a, b, c) avec $a \neq b$, $b \neq c$, $c \neq a$, sur lequel $R(a, b) - R''(a, b) = R(b, c) - R''(b, c) = R(c, a) - R''(c, a)$. On peut supposer sans perte de généralité que $R(a, b) - R''(a, b) = \varepsilon > 0$. Considérons les relations $S', S'' \in \mathcal{V}$, toutes deux identiques à Nu à l'exception de :
$S'(a, b) = S'(b, c) = S'(c, a) = \varepsilon$ d'une part et
$S''(b, a) = S''(c, b) = S''(a, c) = \varepsilon$ d'autre part.
L'axiome de neutralité implique que dans $F(S')$:
- les actions a, b et c sont nécessairement dans une même classe d'équivalence.
- toutes les autres actions sont dans la même classe d'équivalence.

Appliquons l'axiome de neutralité à S' en échangeant a et c. Il en résulte $F(S') = F(S'')$. La relation $S'_{1/2}S''$ est symétrique par construction. L'axiome d'égalitarisme implique donc que $F(S'_{1/2}S'') = Id$. Si $F(S') \neq Id$, on aboutit alors à une contradiction en utilisant l'axiome de cohérence. On a donc $F(S') = Id$. L'axiome de cohérence implique alors $F(R_{1/2}S') = F(R)$ et $F(R''_{1/2}Nu) = F(R'')$. Puisque, par construction, $R_{1/2}S' = R''_{1/2}Nu$ on a $F(R) = F(R'')$.

(b) Soit F une procédure de rangement est neutre, égalitaire, cohérente et loyale.
Le fait que F soit strictement monotone résulte de façon immédiate de la proposition 3. Contentons nous de montrer ici que la monotonie stricte ne peut se déduire à moins de considérer simultanément les quatre axiomes. Quatre exemples suffiront.

1- Définissons une procédure de rangement F telle que :

a F(R) b $\Leftrightarrow$ s(a, R, A) $\geq$ s(b, R, A),

avec, $\forall$ c $\in$ A,

$$s(c, R, A) = \sum_{d \in A} R(c, d).$$

Cette procédure de rangement est neutre, loyale et cohérente. Elle n'est ni égalitaire ni strictement monotone.

2- Définissons une procédure de rangement F telle que :

a F(R) b $\Leftrightarrow$ s(a, R, A) $\geq$ s(b, R, A),

avec, $\forall$ c $\in$ A,

s(a, R, A) = - s_{NF}(a, R, A).

Cette procédure de rangement est neutre, égalitaire et cohérente. Elle n'est ni loyale ni strictement monotone.

3- Définissons une procédure de rangement F telle que :

$$F(R) = \begin{cases} R \text{ si } R \text{ est un ordre complet,} \\ Id \text{ sinon.} \end{cases}$$

Cette procédure de rangement est neutre, égalitaire et loyale. Elle n'est ni cohérente ni strictement monotone.

4- Particularisons un couple d'action a, b $\in$ A. Définissons une procédure de rangement F telle que :

$$F(R) = \begin{cases} Id \text{ si } R(c, d) = R(d, c), \forall c, d \in A, \\ \text{est telle que } c\, F(R)\, d \Leftrightarrow s(c, R, A) \geq s(d, R, A) \text{ sinon,} \end{cases}$$

avec

s(a, R, A) = s_{NF}(a, R, A) + R(b, a) et

s(c, R, A) = s_{NF}(c, R, A) + R(a, b), $\forall$ c $\in$ A\{a}.

Cette procédure de rangement est égalitaire, loyale et cohérente. Elle n'est ni neutre ni strictement monotone.

(c) Soit F une procédure de rangement est neutre et indépendante des circuits. F étant neutre on a F(Nu) = Id. De plus si R $\in \mathcal{V}$ est telle que R(a, b) = R(b, a), $\forall$ a, b $\in$ A, l'indépendance des circuits implique F(R) = F(Nu). On a donc F(R) = Id.

(d) Soit F une procédure de rangement est neutre et strictement monotone.

Il est aisé de montrer que si F est strictement monotone, on a, $\forall$ R $\in \mathcal{V}$, $\forall$ a, b $\in$ A,

a F(R) b $\Rightarrow$ a α[F(R′)] b,

où R′ $\in \mathcal{V}$ est identique à R à l'exception de :

$\exists$ d $\in$ A\{b} tel que R(b, d) > R′(b, d) ou R(d, b) < R′(d, b).

Soit T un ordre complet sur A. Supposons qu'il existe a, b $\in$ A tel que a T b et b F(T) a, en contradiction avec l'axiome de loyauté. Considérons la relation T′ identique à T à l'exception de :

$T'(b, c) = T(a, c)$, $T'(c, b) = T(c, a)$, $\forall\, c \in A$ et

$T'(a, d) = T(b, d)$, $T'(d, a) = T(d, b)$, $\forall\, d \in A$.

Puisque a T b, on peut passer de T à T′ en faisant usage de l'axiome de monotonie stricte. Puisque, par hypothèse, b F(T) a, on a donc b $\alpha[F(T')]$ a. En considérant la permutation échangeant a et b, l'axiome de neutralité implique a F(T′) b, ce qui est contradictoire. F est donc loyale.

(e) Soit F une procédure de rangement est neutre, strictement monotone et indépendante des circuits. Le fait que F soit cohérente résulte de façon immédiate de la proposition démontrée dans Bouyssou (1992). On montrera ici que la cohérence ne peut se déduire à moins de considérer simultanément les trois axiomes. Trois exemples suffiront.

1- Définissons une procédure de rangement F telle que :

a F(P) b $\Leftrightarrow$ $s(a, P, A) \geq s(b, P, A)$,

avec, $\forall\, c \in A$,

$$s(c, P, A) = \sum_{d \in A} (P(c, d)^2 - P(d, c)^2).$$

Cette procédure de rangement est neutre et strictement monotone. Elle n'est ni indépendante des circuits ni cohérente.

2- Définissons une procédure de rangement F telle que :

$$F(R) = \begin{cases} R \text{ si } R \text{ est un ordre complet,} \\ Id \text{ sinon.} \end{cases}$$

Cette procédure de rangement est neutre et indépendante des circuits. Elle n'est ni strictement monotone ni cohérente.

3- Soit $\Phi : A \to \{1, 2, ..., m\}$ une bijection.

Définissons une procédure de rangement F telle que :

a F(P) b $\Leftrightarrow$ $s(a, P, A) \geq s(b, P, A)$,

avec, $\forall\, c \in A$,

$$s(c, R, A) = (s_{NF}(c, R, A) + m)^{\Phi(c)}.$$

Cette procédure de rangement est strictement monotone et indépendante des circuits. Elle n'est ni neutre ni cohérente.

Références

Barrett, C.R., P.K. Pattanaik et M. Salles (1990), On choosing rationally when preferences are fuzzy, *Fuzzy Sets and Systems*, **34**, 197-212.

Bouyaux, P. (1990), Préférences et rationalité stochastiques, *Mathématique, Informatique et Sciences Humaines*, n° 28, 17-40.

Bouyssou, D. (1992), Ranking methods based on valued preference relations: a characterization of the net flow method, *European Journal of Operational Research*, **60**, 61-68, 1992.

Bouyssou D. et P. Perny (1992), Ranking methods for valued preference relations: a characterization of a method based on entering and leaving flows, *European Journal of Operational Research*, **61**, 186-194, 1992.

Brans, J. P, B. Mareschal et Ph. Vincke (1984), PROMETHEE: a new family of outranking methods in multicriteria analysis, in J.P. Brans (Ed.), *OR'84*, North Holland, Amsterdam.

Brans, J. P et Ph. Vincke (1985), A preference ranking organization method, *Management Science*, **31**, 647-656.

Cohen, M. et J.C. Falmagne (1990), Random utility representation of binary choice: a new class of necessary conditions, *Journal of Mathematical Psychology*, **34**, 88-94.

Debord, B. (1987), *Axiomatisation de procédures d'agrégation de préférences*, Thèse, Université de Grenoble.

Dridi, T. (1980), Sur les distributions binaires associées à des distributions ordinales, *Mathématiques et Sciences Humaines*, n° 69, 15-31.

Fishburn, P.C. (1970), *Utility theory for decision making*, Wiley, New-York.

Fishburn, P.C. (1987), Decomposing weighted digraphs into sums of chains, *Discrete Apllied Mathematics*, **16**, 223-238.

Fishburn, P.C. (1990), Binary probabilities induced by rankings, *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, **3**, 478-488.

Fishburn, P.C. (1992), Induced binary probabilities and the linear ordering polytope: a status report, *Mathematical Social Science*, **23**, 67-80.

Fishburn, P.C. et J.C. Falmagne (1989), Binary choice probabilities and rankings, *Economic Letters*, **31**, 113-117.

Gilboa, I. (1990), A necessary but insufficient condition for the stochastic binary choice problem, *Journal of Mathematical Psychology*, **34**, 371-392.

Hansson, B. et H. Sahlquist (1976), A proof technique for social choice with variable electorate, *Journal of Economic Theory*, **13**, 193-200.

McGarvey, D.C. (1953), A theorem on the construction of voting paradoxes, *Econometrica*, **21**, 608-610.

Nitzan, S. et A. Rubinstein (1981), A further characterization of the Borda ranking method, *Public Choice*, **36**, 153-158.

Perny, P. (1992), *Modélisation, exploitation et exploitation de préférences floues dans une problématique de rangement*, Thèse, Université de Paris-Dauphine, Paris.

Perny, P. et B. Roy (1992), The use of fuzzy outranking relations in preference modelling, *Fuzzy Sets and Systems*, **49**, 33-53.

Pirlot, M. (1991), *Une caractérisation de la procédure Max Min*, Document de Travail, Faculté Polytechnique de Mons, Belgique.

Rabinovitch, I. (1978), The dimension of semiorders, *Journal of Combinatorial Theory*, Series A, **25**, 50-61.

Roubens, M. et Ph. Vincke (1985), *Preference Modelling*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems n° 250, Springer Verlag, Berlin.

Roy, B. (1968), Classement et choix en présence de points de vue multiples (la méthode ELECTRE), *RIRO*, 2e année, 57-75.

Roy, B. (1978), ELECTRE III : un algorithme de classement fondé sur une représentation floue des préférences en présence de critères multiples, *Cahiers du CERO*, **20**, 3-24.

Roy, B. (1985), *Méthodologie multicritère d'aide à la décision*, Economica, Paris.

Roy, B. et D. Bouyssou (1993), *Aide Multicritère à la Décision : Méthodes et Cas*, Economica, Paris.

Roy et Skalka (1984), *ELECTRE IS - Aspects méthodologiques et guide d'utilisation*, Document du LAMSADE n°30, Université de Paris-Dauphine, Paris.

Schärlig, A. (1985), *Décider sur plusieurs critères - Panorama de l'aide à la décision multi-critère*, Presses Polytechniques Romandes, Lausanne.

Vansnick, J.C. (1986), On the problem of weights in multiple criteria decision-making (the noncompensatory approach), *European Journal of Operational Research*, **24**, 288-94.

Vincke, Ph. (1989), *L'aide multicritère à la décision*, Editions de l'Université de Bruxelles - Editions Ellipses.

Vincke, Ph. (1992), Exploitation of a crisp relation in a ranking problem, *Theory and Decision*, **32**, 221-240.

Young, H.P. (1974), An axiomatization of Borda's rule, *Journal of Economic Theory*, **9**, 43-52.