Une introduction à la modélisation des préférences [1]

Denis Bouyssou [2]
CNRS – LAMSADE

Philippe Vincke [3]
ULB – SMG

mai 2002 – révisé octobre 2002

[1] Cet article est une version révisée et augmentée de Bouyssou et Vincke (1998). Nous tenons à remercier les arbitres anonymes de cette revue pour leurs commentaires constructifs. Nous restons toutefois seuls responsables des erreurs ou omissions qui pourraient subsister.

[2] LAMSADE, Université Paris Dauphine, Place du Maréchal de Lattre de Tassigny, F-75775 Paris Cedex 16, France, tel : +33 1 44 05 48 98, fax : +33 1 44 05 40 91, courriel : `bouyssou@lamsade.dauphine.fr`.

[3] SMG, Université Libre de Bruxelles, CP 210/01, Boulevard du Triomphe, B-1050 Bruxelles, Belgique, tel : +32 2 650 58 89, fax : +32 2 650 59 70, courriel : `pvincke@smg.ulb.ac.be`

Résumé

L'objet de cet article est de proposer un bref tour d'horizon de la littérature sur la modélisation des préférences. Le point de départ de cette analyse est la « théorie classique » de la modélisation des préférences caractérisée principalement par la conjonction d'un *langage* et d'une *syntaxe* spécifiques. On montre ensuite comment cette théorie aborde un certain nombre de questions fondamentales et tire parti de structures particulières. On aborde enfin diverses extensions possibles de la théorie classique.

Mots-clés : Modélisation des préférences, Relation binaire, Préférence, Indifférence, Incomparabilité, Choix, Agrégation.

1 Introduction

Des chercheurs venant d'horizons variés (économistes, mathématiciens, philosophes, chercheurs opérationnels, informaticiens, psychologues, etc.) ont abordé le thème de la modélisation des préférences. On ne s'en étonnera pas. Dès lors que l'on accepte l'idée que des décisions sont prises et que ces décisions ne sont pas indépendantes de « goûts » ou « valeurs » particuliers, s'intéresser à la modélisation des préférences semble inévitable.

Selon les disciplines, cette question sera abordée sous divers angles. Ainsi, un psychologue étudiera le processus conduisant à la formation d'un jugement de préférence et les facteurs pouvant l'influencer. Un économiste s'intéressera à des modèles de préférence pour des participants à un marché permettant d'obtenir des résultats d'équilibre ou de statique comparative. Un philosophe englobera l'étude des préférences dans une interrogation plus générale sur la question de la rationalité. Un chercheur opérationnel développera des outils permettant, dans un contexte donné, d'aider un individu ou un groupe d'individus à prendre une décision et à l'argumenter.

En dépit de cette diversité de préoccupations, on peut schématiquement, mais utilement, structurer l'ensemble de ces travaux autour de trois perspectives fondamentales :

– une perspective *normative* dans laquelle la question centrale est de savoir ce que signifie « agir rationnellement » dans un contexte donné et quels sont les modèles de préférence permettant d'atteindre cet objectif,

– une perspective *descriptive* plaçant au cœur de son analyse la manière dont, en pratique, les décisions sont prises et

– une perspective *prescriptive* visant à fournir des outils permettant d'aider à la décision dans une situation donnée.

Ces trois perspectives, si elles correspondent à des questions et des approches différentes, ne sauraient être complètement indépendantes. Ainsi, concevoir une aide à la décision supposera généralement une référence à un « agir rationnel » et impliquera de s'interroger sur la manière dont les individus prennent leurs décisions. De fait, que l'on se situe dans l'une ou l'autre de ces perspectives, on sera souvent amené à utiliser les mêmes outils et concepts de base. Le but de cet article introductif est d'en donner une présentation synthétique et non technique qui, nous l'espérons, permettra au lecteur de replacer les développements récents de la littérature dans un cadre unifié et simple.

La section 2 sera consacrée à une présentation de ce que l'on appellera la « théorie classique » de la modélisation des préférences. La section 3 montrera comment certains problèmes classiques sont habituellement traités dans le cadre de cette théorie. La section 4 présentera les principales directions dans lesquelles cette théorie a été étendue. En conclusion, nous mentionnerons quelques questions importantes n'ayant pu être abordées dans le cadre de ce bref article introductif. Une liste abondante de références permettra au lecteur d'approfondir les aspects que nous ne ferons qu'aborder.

2 Concepts fondamentaux

Une série d'ouvrages fondamentaux publiés dans les années 1970 (Fishburn, 1970 ; Keeney et Raiffa, 1976 ; Krantz, Luce, Suppes et Tversky, 1971 ; Sen, 1970) a consolidé un vaste ensemble de travaux menés dans l'après-guerre. Elle a donné corps à ce que l'on peut appeler la « théorie classique de la modélisation des préférences ». Cette théorie peut être schématiquement caractérisée par l'utilisation d'un *langage* particulier accompagné d'une *syntaxe* spécifique. On examine ci-après chacun de ces deux points.

2.1 Le langage

La plupart des travaux en modélisation des préférences prennent pour point de départ un ensemble X d'« objets » à comparer ou à évaluer. Selon le contexte, cet ensemble pourra être fini (X est un ensemble de candidats postulant à un emploi) ou infini (X est un ensemble de paniers de biens supposés parfaitement divisibles). Considérons un couple (x, y) d'objets. Dans la théorie classique, on suppose qu'il ne peut y avoir que deux réponses possibles à la question « l'objet x est-il au moins aussi bon que l'objet y ? » : « OUI » ou « NON », ces deux réponses étant exclusives. Poser cette question pour tout couple d'objets amène alors à définir une *relation binaire* $\succsim$ sur X (c'est-à-dire un sous-ensemble de X^2 ; on écrira classiquement $x \succsim y$ au lieu de $(x, y) \in \succsim$) en posant : $x \succsim y$ si et seulement si la réponse à la question « l'objet x est-il au moins aussi bon que l'objet y ? » est OUI. En considérant une paire d'objets $\{x, y\}$, on sera alors confronté à une et une seule des quatre situations suivantes :

1. $[x \succsim y$ et $y \succsim x]$, notée $x \sim y$, que l'on interprète comme « x est *indifférent* à y »,

2. $[Non(x \succsim y)$ et $Non(y \succsim x)]$, notée $x\ ?\ y$, que l'on interprète comme « x est *incomparable* à y »,

3. $[x \succsim y$ et $Non(y \succsim x)]$, notée $x \succ y$, que l'on interprète comme « x est *strictement préféré* à y » et

4. $[Non(x \succsim y)$ et $y \succsim x]$, notée $y \succ x$, que l'on interprète comme « y est *strictement préféré* à x ».

Par construction, il est clair que $\sim$ et ? sont symétriques ($[x \sim y \Rightarrow y \sim x]$ et $[x\ ?\ y \Rightarrow y\ ?\ x]$) et que $\succ$ est asymétrique ($x \succ y \Rightarrow Non(y \succ x)$). Si l'on suppose de plus $\succsim$ réflexive ($x \succsim x$, pour tout x), ce qui semble peu restrictif, alors $\sim$ est réflexive et ? est irréflexive ($Non(x\ ?\ x)$, pour tout x). Le langage de la théorie classique est donc celui des *relations binaires*.

2.2 La syntaxe

Au sein de la « théorie classique » l'utilisation du langage des relations binaires s'accompagne du recours à une syntaxe spécifique. En plus de la réflexivité de la relation $\succsim$ (que nous supposerons toujours vérifiée dans la suite de ce texte) cette syntaxe impose que la relation $\succsim$ soit :

– *complète* (pour tout $x \neq y$, $Non(x \succsim y) \Rightarrow y \succsim x$) et

– *transitive* ($x \succsim y$ et $y \succsim z \Rightarrow x \succsim z$).

Ces deux propriétés font de $\succsim$ un *préordre complet*. Elles entraînent de très nombreuses conséquences et, en particulier, que :

– il n'y a pas d'incomparabilité (? est vide),

– l'indifférence ($\sim$) est transitive,

– la préférence stricte ($\succ$) est transitive et

– l'indifférence et la préférence stricte se combinent simplement ($[x \succ y$ et $y \sim z \Rightarrow x \succ z]$ et $[x \sim y$ et $y \succ z \Rightarrow x \succ z]$).

Lorsque $\succsim$ est un préordre complet, l'indifférence est une relation d'équivalence (relation réflexive, symétrique et transitive) et l'ensemble des classes d'équivalence de $\sim$ est totalement ordonné par $\succ$. La théorie classique définie par son langage et sa syntaxe peut être mobilisée pour aborder un certain nombre de « problèmes classiques ». Nous les examinons ci-après.

3 Problèmes classiques

3.1 Choisir à partir d'une relation binaire

Supposons connu un préordre complet $\succsim$ sur un ensemble X et envisageons la situation (classique en économie) où un choix doit être fait dans un sous-ensemble d'objets $Y \subseteq X$. Comment utiliser l'information contenue dans $\succsim$ pour guider un tel choix ? Une manière naturelle de définir l'ensemble $C(Y, \succsim)$ des objets choisis (remarquons que, puisque nous n'imposons pas à $C(Y, \succsim)$ d'être un singleton, il serait plus approprié de parler d'objets « susceptibles d'être choisis ») dans Y sur la base de $\succsim$ consiste à poser :

$$C(Y, \succsim) = \{x \in Y : Non[y \succ x] \text{ pour tout } y \in Y\},$$

un objet appartenant à l'ensemble de choix si aucun autre objet ne lui est strictement préféré. Il n'est pas difficile de montrer que $C(Y, \succsim)$ est toujours non vide lorsque Y est fini (le cas où Y est infini soulève des difficultés techniques spécifiques, voir Bergstrom (1975)) et $\succsim$ est un préordre complet. Remarquons cependant que, dans le cas où Y est fini, le fait que $\succsim$ soit un préordre complet est une condition suffisante mais non nécessaire pour que $C(Y, \succsim)$ soit non vide.

Un résultat classique (voir Sen, 1970)) montre que, Y étant supposé fini, $C(Y, \succsim)$ est non vide dès lors que $\succ$ n'a pas de circuit dans Y (on n'a jamais, pour tout $x_1, x_2, \ldots, x_k$ appartenant à Y, $x_1 \succ x_2, x_2 \succ x_3, \ldots, x_{k-1} \succ x_k$ et $x_k \succ x_1$). L'utilisation de structures de préférences plus générales que le préordre complet permet donc également de donner une réponse simple au problème faisant l'objet de ce paragraphe.

Mentionnons enfin qu'il existe des situations (le concours d'entrée à une grande école par exemple) où l'on souhaite être en mesure d'ordonner tout sous-ensemble d'objets $Y \subseteq X$ et non pas seulement déterminer l'ensemble $C(Y, \succsim)$ des objets choisis. La syntaxe de la théorie classique permet de donner une réponse triviale à ce problème puisque la restriction d'un préordre complet sur X à un sous-ensemble $Y \subseteq X$ est un préordre complet sur Y.

3.2 Représenter numériquement une relation binaire

Manipuler une relation binaire $\succsim$ sur X peut se révéler fastidieux dès lors que X comprend un grand nombre d'éléments. Représenter l'information véhiculée par $\succsim$ en utilisant des nombres peut permettre de simplifier cette manipulation tout en autorisant l'utilisation de méthodes d'optimisation classiques. Il est clair que la transitivité et la complétude de $\succsim$ sont des conditions nécessaires pour l'existence d'une fonction u de X dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x, y \in X$:

$$x \succsim y \Leftrightarrow u(x) \geq u(y). \qquad (1)$$

Lorsque X est fini ou infini dénombrable, ces deux conditions sont également suffisantes (voir Fishburn, 1970 ; Krantz et al., 1971). La situation est moins simple dans le cas général. En effet, l'existence d'une représentation de type (1) impose que la structure de X ne soit « pas trop éloignée » de celle de $\mathbb{R}$ et que $\succsim$ se comporte dans X de manière « similaire » à $\geq$ dans $\mathbb{R}$. Nous renvoyons à Fishburn (1970) pour la formulation d'une condition (imposant l'existence d'un sous-ensemble dénombrable dense dans X pour $\succsim$) qui, s'ajoutant à la syntaxe de la théorie classique, est nécessaire et suffisante pour obtenir (1).

3.3 Agréger des préférences

Supposons que l'on ait collecté $n \geq 2$ relations de préférence sur X, par exemple parce que les objets sont évalués selon divers points de vue (votants, critères ou experts). Dans une telle situation, il est naturel de chercher à bâtir une relation de préférence « collective » $\succsim$ agrégeant l'information contenue dans $(\succsim_1, \succsim_2, \ldots, \succsim_n)$. En général, on recherchera un « mécanisme » (« système électoral » ou « méthode d'agrégation ») permettant d'agréger *tout* n-uple de relations de préférence sur X en une relation de préférence collective. Dans le cadre de la théorie classique, se donner un tel mécanisme revient à définir une fonction d'agrégation F de $WO(X)^n$ dans $WO(X)$, où $WO(X)$ est l'ensemble des préordres complets sur X. L'ouvrage classique de K.J. Arrow (1963), a mis clairement en lumière la difficulté d'un tel problème. Imposer un petit nombre de conditions sur F, en apparence toutes très raisonnables (respect de l'unanimité, absence de dictateur), conduit rapidement à un résultat d'impossibilité : aucune méthode d'agrégation n'est susceptible de les vérifier simultanément (pour une synthèse très riche de ce type de résultats, voir Sen (1986)). La méthode majoritaire fournit un exemple simple des difficultés mises à jour par le résultat d'Arrow. Cette méthode consiste à déclarer que « x est collectivement au moins aussi bon que y » s'il y a au moins autant de préordres dans lesquels « x est au moins aussi bon que y » que de préordres dans lesquels « y est au moins aussi bon que x ». Une telle méthode semble très raisonnable et parfaitement en accord avec une idée intuitive de « décision démocratique » . Elle ne conduit cependant pas toujours à une relation de préférence collective ayant les propriétés d'un préordre complet ni même à une relation de préférence stricte sans circuit. C'est le célèbre « effet Condorcet » ; $X = \{x, y, z\}$, $n = 3$, $x \succ_1 y \succ_1 z, z \succ_2 x \succ_2 y$ et $y \succ_3 z \succ_3 x$ fournit l'exemple classique d'une telle situation. Utiliser une relation de préférence collective dont la partie asymétrique peut comporter des circuits pour choisir et/ou ranger est loin d'être une tâche aisée. De très nombreuses recherches y ont été consacrées (voir Laslier, 1997 ; Moulin, 1986 ; Schwartz, 1986).

3.4 Structures particulières de l'ensemble d'objets

Dans la théorie classique, la spécification du langage et de la syntaxe utilisée peut s'opérer indépendamment de la nature de l'ensemble des objets X. Dans de nombreuses situations, il est cependant naturel de supposer que la structure de X n'est pas quelconque. Ce sera par exemple le cas avec :

- la décision *multicritère* où les éléments de X sont des vecteurs d'évaluations sur plusieurs dimensions, attributs ou critères ; on a alors $X \subseteq X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ où X_i est l'ensemble des évaluations possibles d'un objet sur la $i^{\text{ème}}$ dimension,
- la décision dans le *risque* où les éléments de X sont regardés comme des distributions de probabilité sur un ensemble de conséquences ; on a alors $X \subseteq \mathcal{P}(Y)$ où $\mathcal{P}(Y)$ est un ensemble de mesures de probabilité sur un ensemble de conséquences Y,
- la décision dans l'*incertain* où les éléments de X sont caractérisés par des conséquences contingentes à l'occurrence d'« états de la nature » ; on a alors $X \subseteq Y^n$ avec Y un ensemble de conséquences en supposant que l'on a retenu n états de la nature distincts.

Dans toutes ces situations, il est tentant de particulariser la théorie classique en utilisant des conditions syntaxiques additionnelles pour tenter de tirer parti de la structure de X. Parmi les conditions les plus fréquemment utilisées, mentionnons :

- *l'indépendance mutuelle au sens des préférences* dans le cas de la décision multicritère impliquant que la préférence entre deux objets ne dépend pas d'une évaluation commune sur un sous-ensemble d'attributs :

$$(x_I, z_{-I}) \succsim (x_I, w_{-I}) \Leftrightarrow (y_I, z_{-I}) \succsim (y_I, w_{-I})$$

  où I est un sous-ensemble de l'ensemble des dimensions $\{1, 2, \ldots, n\}$ et où (x_I, z_{-I}) désigne l'objet $t \in X$ tel que $t_i = x_i$ si $i \in I$ et $t_i = z_i$ sinon.

– *l'indépendance vis-à-vis de mélanges probabilistes* dans le cas de la décision dans le risque impliquant que la préférence entre deux distributions de probabilité n'est pas affectée par une même combinaison probabiliste avec une tierce distribution :

$$x \succsim y \Leftrightarrow (x\alpha z) \succsim (y\alpha z)$$

où $(x\alpha z)$ désigne la combinaison convexe des mesures de probabilité x et z avec le coefficient $\alpha \in]0;1[$,

– *le principe de la chose sûre* dans le cas de la décision dans l'incertain impliquant que la préférence entre deux objets ne dépend pas d'une évaluation commune sur un sous-ensemble d'états de la nature :

$$(x_I, z_{-I}) \succsim (x_I, w_{-I}) \Leftrightarrow (y_I, z_{-I}) \succsim (y_I, w_{-I})$$

où I est un sous-ensemble d'états de la nature et où (x_I, z_{-I}) désigne l'objet $t \in X$ tel que $t_i = x_i$ si $i \in I$ et $t_i = z_i$ sinon.

Lorsque ces conditions syntaxiques additionnelles sont appliquées à des ensembles d'objets « suffisamment riches » (et que l'on impose à $\succsim$ de se comporter de manière cohérente avec cette structure riche, voir Fishburn (1970) ; Wakker (1989)), on obtient alors des modèles célèbres particularisant celui de la théorie classique :

– le modèle d'*utilité additive* dans le cas de la décision multicritère :

$$x \succsim y \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} u_i(x_i) \geq \sum_{i=1}^{n} u_i(y_i)$$

où u_i est une fonction de X_i dans $\mathbb{R}$, en notant x_i l'évaluation de l'objet x sur la $i^{\text{ème}}$ dimension,

– le modèle de l'*utilité espérée* dans le cas de la décision dans le risque,

$$x \succsim y \Leftrightarrow \sum_{t \in Y} p_x(t)u(t) \geq \sum_{t \in Y} p_y(t)u(t)$$

où u est une fonction de Y dans $\mathbb{R}$ et $p_x(t)$ désigne la probabilité d'occurrence de l'élément $t \in Y$ avec l'objet x,

– le modèle de l'*utilité espérée subjective* dans le cas de la décision dans l'incertain :

$$x \succsim y \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} p_i u(x_i) \geq \sum_{i=1}^{n} p_i u(y_i)$$

où u est une fonction de Y dans $\mathbb{R}$ et les p_i sont des nombres non négatifs sommant à 1 pouvant s'interpréter comme les probabilités subjectives des divers états de la nature.

Un des intérêts majeurs de ces modèles est de fournir une représentation numérique de $\succsim$ beaucoup plus spécifique que celle donnée par la théorie classique. Si une fonction u vérifie (1), toute transformation strictement croissante appliquée à u fournit une autre représentation numérique de $\succsim$ vérifiant (1) (u définit ce qu'il est convenu d'appeler une « échelle ordinale »).

Les conditions additionnelles qui viennent d'être mentionnées impliquent que u peut être décomposée de manière additive lorsque la structure de X est suffisamment riche (on suppose généralement par exemple que $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ dans le cas multicritère et que chacun des X_i a une structure « riche », voir Wakker (1989)). On obtient alors une représentation numérique qui définit une « échelle d'intervalle » (unique au choix de l'origine et de l'unité près). On peut dans ce cas mettre en œuvre des techniques spécifiques pour bâtir u et ainsi structurer un modèle de préférence (voir Keeney et Raiffa, 1976 ; Krantz et al., 1971).

Ces conditions additionnelles ont été soumises à de très nombreux tests. En particulier, dans le domaine de la décision dans le risque et dans l'incertain, on a montré que les conditions à la base du modèle de l'utilité espérée (axiome d'indépendance et principe de la chose sûre) étaient falsifiées de manière reproductible et prévisible dans de nombreux schémas expérimentaux (voir Allais, 1953 ; Ellsberg, 1961 ; Kahneman et Tversky, 1979 ; McCrimmon et Larsson, 1979). Cette remise en cause a engendré de très nombreuses études cherchant à affaiblir ces conditions tout en continuant à exploiter la structure particulière de X (voir Fishburn (1988) ; Machina (1982) ; Quiggin (1982, 1993) ; Yaari (1987) pour la décision dans le risque et Gilboa (1987) ; Gilboa et Schmeidler (1989) ; Schmeidler (1989) ; Wakker (1989) pour la décision dans l'incertain).

Des arguments de type « Dutch book » (l'adhésion à ces modèles pouvant transformer un individu en « pompe à argent ») ont souvent été utilisés pour critiquer ces modèles étendus (voir Raiffa, 1970). La validité de tels arguments soulève cependant des questions délicates (voir Machina (1989) et McClennen (1990) pour une critique des ces arguments dans le cas de la décision dans le risque).

Mentionnons enfin que de nombreuses autres structures particulières pour X peuvent être utilement étudiées. Par exemple, lorsque X est muni d'une structure topologique, on pourra chercher à obtenir des représentations numériques de type (1) ayant de bonnes propriétés de continuité. De même si X est muni d'une loi de composition interne permettant de combiner ses éléments (c'est, en particulier, le cas avec la décision dans le risque lorsque l'on envisage des « loteries » sur les éléments de X), on pourra chercher à bâtir une représentation numérique qui soit « compatible » (souvent additivement) avec cette loi de composition interne (voir Krantz et al., 1971).

4 Extensions de la théorie classique

4.1 Changer de langage ?

Le langage de la théorie classique utilise les relations binaires. Bien que l'utilisation d'un tel langage puisse sembler naturelle, voire inévitable, elle soulève des questions délicates. Parmi les plus importantes, mentionnons :

– une question d'*observabilité*. Si les préférences doivent être étudiées, il doit être possible de les « observer » de manière fiable. Poser une question du type « l'objet x est-il au moins aussi bon que l'objet y ? » amène à fonder l'ensemble de la théorie sur une base purement déclarative sans lien direct évident avec un comportement observable. La réponse classique à cette objection consiste à prendre comme primitive les choix faits entre des objets appartenant à divers sous-ensembles Y de X. Ce changement de primitive est à la base de la théorie dite des « préférences révélées » dans laquelle la relation $\succsim$ est inférée à partir de choix, en théorie, observables. Une telle inférence suppose cependant que les choix sont essentiellement « binaires » au sens où les choix faits sur des *paires* d'objets permettent de prédire les choix faits dans des ensembles plus vastes. Les conditions de « rationalisation » d'une fonction de choix qui formalisent cette observation sont classiques (voir par exemple Sen (1970, 1977)). Elles ont été récemment soumises à de virulentes critiques (voir Malishevski, 1993 ; Sen, 1993 ; Sugden, 1985) qui affaiblissent l'attrait du langage utilisé dans la théorie classique.

– une question *informationnelle*. Sans remettre en cause la définition de $\succsim$ via la réponse à une question du type « l'objet x est-il au moins aussi bon que l'objet y ? » il est possible d'envisager des réponses à une telle question autres que OUI ou NON », par exemple :

  – des réponses du type « je ne sais pas » ;

– des réponses incluant une information sur l'*intensité* de la préférence, par exemple, « x est fortement — faiblement, modérément — préféré à y » ;

– des réponses incluant une information sur la *crédibilité* de la proposition "x est au moins aussi bon que y", par exemple « la crédibilité de la proposition "x est au moins aussi bon que y" est supérieure à la crédibilité de la proposition "z est au moins aussi bon que w" » ou même « la crédibilité de la proposition "x est au moins aussi bon que y" est $\alpha \in [0; 1]$ ».

Admettre de telles réponses implique d'abandonner le langage de la théorie classique. Parmi les nombreux autres langages possibles, mentionnons

– le langage des *ensembles flous* (voir Doignon, Monjardet, Roubens et Vincke, 1986 ; Fodor et Roubens, 1994 ; Perny et Roy, 1992) chaque assertion du type $x \succsim y$ étant alors munie d'un *degré de crédibilité*,

– des langages utilisant l'idée d'*intensité* de préférence (voir Bana e Costa et Vansnick, 1994 ; Doignon, 1987), chaque assertion du type $x \succ y$ étant alors munie d'un qualificatif (préférence faible, forte ou extrême, par exemple) ou encore

– des langages utilisant des *logiques non classiques* (voir Tsoukiàs et Vincke, 1992, 1995, 1997)) permettant de modéliser l'absence d'information ou, au contraire, la présence d'informations contradictoires, la valeur de vérité d'une assertion du type $x \succsim y$ pouvant être alors non seulement « vrai » ou « faux » mais aussi « inconnu » ou « contradictoire ».

– une question de *stabilité*. Le langage de la théorie classique ne place pas au cœur de son analyse la question de l'évolution des préférences dans le temps. Son utilisation entraîne souvent l'hypothèse implicite selon laquelle la réponse à la question « l'objet x est-il au moins aussi bon que l'objet y ? » est stable dans le temps. Lorsque cette hypothèse semble inadéquate, il est possible de recourir à d'autres prémisses. Par exemple, on pourra utiliser la fréquence avec laquelle chacune des réponses possibles est obtenue lorsque la question est répétée (voir, par exemple, la référence classique Luce (1959)). Le langage utilisé est alors celui des *probabilités de choix*. Le point de départ est une fonction P de X^2 dans $[0; 1]$ associant à chaque couple $(x, y) \in X^2$ un nombre $P(x, y)$

modélisant, par exemple, la fréquence avec laquelle on a observé que x était au moins aussi bon que y.

4.2 Changer de syntaxe ?

On a déjà évoqué le fait que la syntaxe de la théorie classique était inutilement restrictive du point de vue du problème du choix à partir d'une relation binaire et qu'elle ne se prêtait que difficilement à l'exercice de l'agrégation. Parmi les autres difficultés importantes, mentionnons :

- la possibilité d'obtenir expérimentalement des violations reproductibles de la transitivité de l'indifférence (voir Luce, 1956) ou même de la préférence stricte (voir May, 1954 ; Tversky, 1969) dans des contextes non directement liés à l'agrégation de préférences ;
- l'occurrence fréquente de situations d'incomparabilité dans des situations réelles d'aide à la décision (voir Roy, 1985, 1991 ; Vincke, 1989).

Modifier la syntaxe de la théorie classique tout en conservant son langage amène à deux types distincts d'extensions :

- des *extensions classiques* (quasi-ordres, ordres d'intervalles, ordres partiels, sous-ordres, voir Roubens et Vincke (1985)) autorisant une relation d'indifférence non transitive et/ou la présence d'incomparabilité mais interdisant la présence de circuits dans $\succ$. Dans ces modèles, le lien entre préférence et choix reste simple. La représentation numérique de type (1) est modifiée soit par l'introduction d'un seuil soit en considérant des représentations numériques à « sens unique », par exemple telles que $x \succ y \Rightarrow u(x) > u(y)$ (sur ces extensions classiques, on consultera Fishburn (1985) ; Pirlot et Vincke (1997) ; Roberts (1979) ; Roubens et Vincke (1985)). À titre d'exemple, la représentation numérique d'un quasi-ordre (sur un ensemble fini) amène à considérer qu'à chaque objet n'est plus associé un nombre unique mais un intervalle de la droite réelle de longueur fixe. On a ainsi :

  $$x \succsim y \Leftrightarrow u(x) \geq u(y) - q$$

  où u est une fonction de X dans $\mathbb{R}$ et où q est une constante non négative.

  Mentionnons enfin que ces extensions ne contribuent que très marginalement à résoudre le problème lié à l'agrégation des préférences révélé par le théorème d'Arrow (voir Sen, 1986).

– des *extensions non classiques* tolérant les circuits dans la relation de préférence stricte. Contrairement à l'intuition, il n'est pas impossible de parvenir à une représentation numérique de tels modèles, voire même à lier préférences et choix sur des ensembles X ayant une structure particulière (voir Bouyssou, 1986 ; Bouyssou et Pirlot, 1999, 2002 ; Fishburn, 1982, 1988, 1991a,b, 1992 ; Tversky, 1969 ; Vind, 1991)). Dans les modèles étudiés par Bouyssou et Pirlot (2002), on a ainsi pour des ensembles X ayant une structure de produit cartésien (comme dans le cas de la décision multicritère ou de la décision dans l'incertain) :

$$x \succsim y \Leftrightarrow F(p_1(x_1, y_1), p_2(x_2, y_2), \ldots, p_n(x_n, y_n)) \geq 0$$

où les p_i sont des fonctions de X_i^2 dans $\mathbb{R}$, F est une fonction de $\prod_{i=1}^n p_i(X_i^2)$ dans $\mathbb{R}$ et où, par exemple, F est croissante en chacun de ses arguments.

De même, dans les modèles étudiés par Fishburn (1982) dans le cas de la décision dans le risque, la représentation numérique est du type :

$$x \succsim y \Leftrightarrow \sum_{t \in Y} \sum_{s \in Y} p_x(t) p_y(s) \phi(t, s) \geq 0$$

où ϕ est une fonction de Y^2 dans $\mathbb{R}$ et $p_x(t)$ désigne la probabilité d'occurrence de l'élément $t \in Y$ avec l'objet x.

Une critique fréquente de ces modèles est que la présence d'intransitivité (de l'indifférence ou de la préférence stricte) laisse la porte ouverte à un grand nombre de comportements « irrationnels » et à l'application d'arguments de type « Dutch Book »(Raiffa, 1970). Comme dans le cas de la décision dans le risque déjà évoqué, il n'est pas certain que la portée de ces arguments soit décisive (on consultera à ce sujet Fishburn, 1991b).

5 Conclusion

Ce très rapide tour d'horizon de la théorie classique aura, nous l'espérons, permis au lecteur non-spécialiste de se forger des points de repère dans une littérature très vaste et souvent technique. Notons cependant que notre bref tour d'horizon a laissé de côté bien des questions. Toutes les caractéristiques de la théorie classique n'ont pas été abordées. Par exemple, celle-ci apparaît essentiellement comme une théorie :

– *statique*, c'est-à-dire ne plaçant pas au cœur de ses préoccupations la question de la formation et de la transformation des préférences (voir

Kreps (1979) pour une contribution classique, ou, plus récemment, Falmagne et Doignon (1997)),

- *individuelle*, c'est-à-dire ne donnant pas une place centrale à des interactions stratégiques entre individus et/ou groupes et à leur impact éventuel sur la formation et la transformation des préférences,
- *abstraite*, c'est-à-dire n'accordant que peu d'attention au processus de modélisation de l'ensemble d'objets et/ou à la définition de la nature des objets.

De même, nous avons laissé de côté un certain nombre de questions importantes au sein de la théorie classique, en particulier :

- la manière de recueillir et de valider une information préférentielle dans un contexte donné (voir von Winterfeldt et Edwards, 1986),
- les liens entre le problème de la modélisation des préférences et la question de la signifiance dans la théorie du mesurage (voir Roberts, 1979),
- l'analyse statistique de données de préférences (voir Coombs, 1964 ; Green, Tull et Albaum, 1988),
- des interrogations plus fondamentales sur les liens entre préférences et système de valeurs ainsi que la nature même de ces valeurs (voir Broome, 1991 ; Cowan et Fishburn, 1988 ; Tsoukiàs et Vincke, 1992 ; von Wright, 1963).

Références

Allais, M. (1953), Le comportement de l'homme rationnel devant le risque : Critique des postulats et axiomes de l'école américaine, *Econometrica* **21**, 503–46.

Arrow, K.J. (1963), *Social choice and individual values*, deuxième édition, Wiley, New York.

Bana e Costa, C.A. et Vansnick, J.-C. (1994), Macbeth – An interactive path towards the construction of cardinal value functions, *International Transactions in Operational Research* **1**(4), 489–500.

Bergstrom, T.X. (1975), Maximal elements of acyclic relations on compact sets, *Journal of Economic Theory* **10**, 403–404.

Bouyssou, D. (1986), Some remarks on the notion of compensation in MCDM, *European Journal of Operational Research* **26**, 150–160.

Bouyssou, D. et Pirlot, M. (1999), Conjoint measurement without additivity and transitivity, *in* N. Meskens et M. Roubens (éds), *Advances in Decision Analysis*, Kluwer, Dordrecht, pp. 13–29.

Bouyssou, D. et Pirlot, M. (2002), Non transitive decomposable conjoint measurement, à paraître dans *Journal of Mathematical Psychology* .

Bouyssou, D. et Vincke, P. (1998), Introduction to topics on preference modelling, *Annals of Operations Research* **80**, i–xiv.

Broome, J. (1991), *Weighting goods*, Basil Blackwell, London.

Coombs, C.H. (1964), *A theory of data*, Wiley, New York.

Cowan, T.A. et Fishburn, P.C. (1988), Foundations of preference, *in* G. Eberlein et H. Berghel (éds), *Essays in Honor of Werner Leinfellner*, D. Reidel, Dordrecht, pp. 261–271.

Doignon, J.-P. (1987), Threshold representation of multiple semiorders, *SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods* **8**, 77–84.

Doignon, J.-P., Monjardet, B., Roubens, M. et Vincke, Ph. (1986), Biorder families, valued relations and preference modelling, *Journal of Mathematical Psychology* **30**(4), 435–480.

Ellsberg, D. (1961), Risk, ambiguity and the Savage axioms, *Quarterly Journal of Economics* **75**, 643–669.

Falmagne, J.-C. et Doignon, J.-P. (1997), Stochastic evolution of rationality, *Theory and Decision* **43**, 107–138.

Fishburn, P.C. (1970), *Utility theory for decision-making*, Wiley, New-York.

Fishburn, P.C. (1982), Nontransitive measurable utility, *Journal of Mathematical Psychology* **26**, 31–67.

Fishburn, P.C. (1985), *Interval orders and intervals graphs*, Wiley, New-York.

Fishburn, P.C. (1988), *Nonlinear preference and utility theory*, Johns Hopkins University Press, Baltimore.

Fishburn, P.C. (1991a), Nontransitive additive conjoint measurement, *Journal of Mathematical Psychology* **35**, 1–40.

Fishburn, P.C. (1991b), Nontransitive preferences in decision theory, *Journal of Risk and Uncertainty* **4**, 113–134.

Fishburn, P.C. (1992), Additive differences and simple preference comparisons, *Journal of Mathematical Psychology* **36**, 21–31.

Fodor, J. et Roubens, M. (1994), *Fuzzy preference modelling and multiple criteria decision support*, Kluwer, Dordrecht.

Gilboa, I. (1987), Expected utility with purely subjective non-additive probabilities, *Journal of Mathematical Economics* **16**, 65–68.

Gilboa, I. et Schmeidler, D. (1989), Maxmin expected utility with a non-unique prior, *Journal of Mathematical Economics* **18**, 141–153.

Green, P.E., Tull, D.S. et Albaum, G. (1988), *Research for marketing decisions*, Englewood Cliffs.

Kahneman, D. et Tversky, A. (1979), Prospect theory: An analysis of decision under risk, *Econometrica* **47**, 263–291.

Keeney, R.L. et Raiffa, H. (1976), *Decisions with multiple objectives: Preferences and value tradeoffs*, Wiley, New-York.

Krantz, D.H., Luce, R.D., Suppes, P. et Tversky, A. (1971), *Foundations of measurement,* vol. 1: *Additive and polynomial representations*, Academic Press, New-York.

Kreps, D.M. (1979), A representation theorem for "preference for flexibility", *Econometrica* **47**, 565–577.

Laslier, J.-F. (1997), *Tournament solutions and majority voting*, Springer-Verlag, Berlin.

Luce, R.D. (1956), Semi-orders and a theory of utility discrimination, *Econometrica* **24**, 178–191.

Luce, R.D.. (1959), *Individual choice behavior: A theoretical analysis*, Wiley, New-York.

Machina, M.J. (1982), Expected utility without the independence axiom, *Econometrica* **50**, 277–323.

Machina, M.J. (1989), Dynamic consistency and non-expected utility models of choice under uncertainty, *Journal of Economic Literature* **27**, 1622–1688.

Malishevski, A. (1993), Criteria for judging the rationality of decisions in the presence of vague alternatives, *Mathematical Social Sciences* **26**, 205–247.

May, K.O. (1954), Intransitivity, utility and the aggregation of preference patterns, *Econometrica* **22**, 1–13.

McClennen, E.L. (1990), *Rationality and dynamic choice: Foundational explorations*, Cambridge University Press.

McCrimmon, K.R. et Larsson, S. (1979), Utility theory: Axioms versus paradoxes, *in* M. Allais et O. Hagen (éds), *Expected utility hypotheses and the Allais paradox*, D. Reidel, Dordrecht, pp. 27–145.

Moulin, H. (1986), Choosing from a tournament, *Social Choice and Welfare* **3**, 271–291.

Perny, P. et Roy, B. (1992), The use of fuzzy outranking relations in preference modelling, *Fuzzy Sets and Systems* **49**, 33–53.

Pirlot, M. et Vincke, Ph. (1997), *Semiorders. Properties, representations, applications*, Kluwer, Dordrecht.

Quiggin, J. (1982), A theory of anticipated utility, *Journal of Economic Behaviour and Organization* **3**, 323–343.

Quiggin, J. (1993), *Generalized expected utility theory – The rank-dependent model*, Kluwer, Dordrecht.

Raiffa, H. (1970), *Decision analysis – Introductory lectures on choices under uncertainty*, Addison-Wesley, Reading.

Roberts, F.S. (1979), *Measurement theory with applications to decision making, utility and the social sciences*, Addison-Wesley, Reading.

Roubens, M. et Vincke, Ph. (1985), *Preference modelling*, Springer Verlag, Berlin.

Roy, B. (1985), *Méthodologie multicritère d'aide à la décision*, Economica, Paris. Traduction anglaise : Multicriteria methodology for decision aiding, Kluwer, Dordrecht, 1996.

Roy, B. (1991), The outranking approach and the foundations of ELECTRE methods, *Theory and Decision* **31**, 49–73.

Schmeidler, D. (1989), Subjective probability and expected utility without additivity, *Econometrica* **57**, 571–587.

Schwartz, T. (1986), *The logic of collectice choice*, Columbia University Press.

Sen, A. (1970), *Collective choice and social welfare*, Holden Day, San Francisco.

Sen, A. (1977), Social choice theory: A re-examination, *Econometrica* **45**, 53–89.

Sen, A. (1993), Internal consistency of choice, *Econometrica* **61**, 495–521.

Sen, A.K. (1986), Social choice theory, *in* K.J. Arrow et M.D. Intriligator (éds), *Handbook of mathematical economics*, Vol. 3, North-Holland, Amsterdam, pp. 1073–1181.

Sugden, R. (1985), Why be consistent? a critical analysis of consistency requirements in choice theory, *Economica* **52**, 167–183.

Tsoukiàs, A. et Vincke, Ph. (1992), A survey on nonconventional preference modelling, *Ricerca Operativa* **61**, 5–49.

Tsoukiàs, A. et Vincke, Ph. (1995), A new axiomatic foundation of partial comparability, *Theory and Decision* **39**, 79–114.

Tsoukiàs, A. et Vincke, Ph. (1997), Extended preference structures in mcda, *in* J. Climaco (éd.), *Multicriteria Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, pp. 37–50.

Tversky, A. (1969), Intransitivity of preferences, *Psychological Review* **76**, 31–48.

Vincke, Ph. (1989), *L'aide multicritère à la décision*, Éditions de l'Université de Bruxelles – Éditions Ellipses, Bruxelles – Paris. Traduction anglaise : Multicriteria Decision Aid, Wiley, 1992.

Vind, K. (1991), Independent preferences, *Journal of Mathematical Economics* **20**, 119–135.

von Winterfeldt, D. et Edwards, W. (1986), *Decision analysis and behavioral research*, Cambridge University Press, Cambridge.

von Wright, G.H. (1963), *The logic of preference*, Edinburgh University Press, Edinburgh.

Wakker, P.P. (1989), *Additive representations of preferences: A new foundation of decision analysis*, Kluwer, Dordrecht.

Yaari, M.E. (1987), The dual theory of choice under risk, *Econometrica* **55**, 95–115.