

# Problèmes de « mesure »

Denis Bouyssou

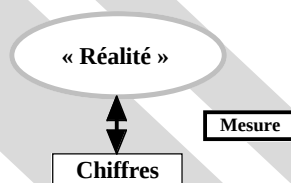
ESSEC  
Cergy – France



Mesure - Doctorat - novembre 1999 - 1

## Introduction

### ■ Démarche « quantitative » en Sciences Sociales



### ■ Associer des Nombres à des objets humains/sociaux

- Pourquoi ?
- Comment ?
- Problèmes ?

Mesure - Doctorat - novembre 1999 - 2

## Introduction

### ■ Sciences « dures » vs. Sciences « molles »

Physique

Chimie

Biologie

Psychologie

Sociologie

Economie

### ■ Problèmes de mesure

Masse

Longueur

Temps

Force

Energie

Satisfaction

Intelligence

Flexibilité

Risque

Propension à l'alcoolisme

Mesure - Doctorat - novembre 1999 - 3

## Introduction

### ■ Définition : Mesurer = « Affectation de nombres à des objets en fonctions de règles précises » (S.S. Stevens)

- Quelles règles ? Pour quoi faire ?

### ■ Le résultat de la mesure (et ce que l'on peut en faire) dépend du type de mesure effectué

- Échelles de mesure

Mesure - Doctorat - novembre 1999 - 4

## Introduction

- Qu'est-ce que mesurer ?
- Y-a-t-il plusieurs façon de mesurer ?
- Peut-on faire de la mesure dans les Sciences « molles » ?
- Pourquoi faire des mesures ?
- Quels traitements statistiques ?
  
- Pas de consensus
- Littérature considérable
- Gestion : littérature de « seconde main »

Mesure - Doctorat - novembre 1999 - 5

## Plan

- Problèmes de mesure en Physique
- Problèmes de mesure en Psychologie : 3 écoles
  - Psychologie Mathématique
  - Psycho-Physique
  - Psychométrie
- Conclusion
  - Application à la Statistique
  - Voies de recherche

Mesure - Doctorat - novembre 1999 - 6

## Problèmes de mesure en Physique

### ■ Cadre Général

Individu isolé sur une île déserte sans appareils d'aucune sorte ayant tout oublié sauf un peu de mathématiques

### ■ Comment bâtir à nouveau un système de mesure ?

### ■ Trois niveaux

- Mesurage ordinal
- Mesurage par inégalité
- Mesurage extensif

### ■ Reconstruction de la problématique du « mesurage fondamental » tel que donnée par Krantz et al. 1971 (École de la « représentation »)

Mesure - Doctorat - novembre 1999 - 7

## Pourquoi Mesurer ?

- Représentation objective des faits
- Représentation commode des faits
- Comprendre : Loi des Gaz Parfaits

$$\frac{PV}{T} = \text{cte}$$

- Agir : Surveiller son poids
- Commercer
- Manipulations « arithmético-statistiques »
- etc.

Mesure - Doctorat - novembre 1999 - 8

## Mesurage Ordinal

- Objets (pierres, bâtons, etc.)
- Ces objets ont des « qualités » (intrinsèques)
- Choix d'une « qualité »
- Outils pour dire si un objet a « plus ou moins » d'une qualité qu'un autre
  - Balance
  - Bâtons (rectilignes) alignés
  - $>$     $\sim$     $\geq$
- Mesurage
  - $a \succ b \Leftrightarrow \phi(a) > \phi(b)$
  - $a \prec b \Leftrightarrow \phi(a) < \phi(b)$
  - $a \sim b \Leftrightarrow \phi(a) = \phi(b)$

### 2 questions théoriques

Quand cela est-il possible ? (Th. de représentation)

Propriétés de l'échelle de mesure ? (Th. d'unicité)

Mesure - Doctorat - novembre 1999 - 9

## Choix d'une « qualité »

- Cailloux
  - forme
  - couleur
  - dureté
  - lisses/rugueux
  - beauté
  - lourd
  - etc.
- Intuition « pré-théorique »
  - lourdeur
  - voluminosité
- $\neq$  Écoles

Mesure - Doctorat - novembre 1999 - 10

■ **Théorème de représentation (Cantor 1895)**

Soit  $X$  un ensemble fini ou dénombrable et  $\succsim$  une relation binaire sur  $X$ . Il existe une fonction  $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$

telle que :  $a \succsim b \Leftrightarrow \phi(a) \geq \phi(b)$  (\*)

*si et seulement si*

$\succsim$  est complète ( $a \succsim b$  ou  $b \succsim a$ )

$\succsim$  est transitive ( $a \succsim b$  et  $b \succsim c \Rightarrow a \succsim c$ )

■ **Théorème d'unicité**

Soit deux fonctions  $\phi$  et  $\phi'$  vérifiant (\*) alors il existe une fonction strictement croissante  $f$  telle que :

$$\phi = f(\phi')$$

Échelle ordinale

Mesure - Doctorat - novembre 1999 - 11

## Remarques

■ **Mesurage de bas niveau**

| a   | b  | c  | d  | e |
|-----|----|----|----|---|
| 5   | 4  | 3  | 2  | 1 |
| 100 | 99 | 98 | 79 | 0 |

$[ade] \succ [bc] ? \quad 8 > 7 \text{ mais } 179 < 197 !!$

■ **Statistiques**

Moyennes ?

Médianes ?

Modes ?

Mesure - Doctorat - novembre 1999 - 12

## Remarques

### ■ Problèmes de signifiante

« Moyenne non signifiante sur une échelle ordinale (ou nominale) »

mais ...

Blondes      0

Brunes      1

Rousses      2

moyenne = 1,24       $\Rightarrow$

« au moins une Rousse dans l'échantillon »

Mesure - Doctorat - novembre 1999 - 13

## Remarques

### ■ Echelles ordinales en Physique

- dureté
- force du vent
- séismes

### ■ Indices : Pas de théorie du mesurage sous-jacente

- qualité de l'air
- développement humain (HDI)

Mesure - Doctorat - novembre 1999 - 14

## Problèmes

### ■ Variations temporelles

$$a \succ_t b \text{ mais } b \succ_{t+1} a$$

Dilatation

### ■ Problèmes « technologiques »

Pouvoir discriminant imparfait

$$\left. \begin{array}{l} a \sim b \\ b \sim c \end{array} \right\} a \succ c$$

Exemple : Représentation à seuil (= 1)

|          |          |            |
|----------|----------|------------|
| <b>a</b> | <b>2</b> | <b>2</b>   |
| <b>b</b> | <b>0</b> | <b>0,5</b> |
| <b>c</b> | <b>0</b> | <b>0</b>   |

Egalité des mesures ?

### ■ Unicité de la balance ?

Mesure - Doctorat - novembre 1999 - 15

## Problèmes

### ■ pas vrai si X est infini non dénombrable (économie)

- $\mathbb{R}$  a une certaine cardinalité
- $\mathbb{R}$  a certaines propriétés ( $\mathbb{Q}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ )

### ■ Pourquoi choisir $\mathbb{R}$ ?

### ■ Mesurage nominal : $a \sim b \Leftrightarrow \phi(a) = \phi(b)$

- $\sim$  est une relation d'équivalence (réflexive, symétrique, transitive)
- $\phi$  est définie à une transformation bijective près
- relations de similarité ?
- échelles intermédiaires

Mesure - Doctorat - novembre 1999 - 16

## Mesurage par inégalités

- Idée : « enrichir l'ensemble des objets à comparer »
  - Mettre plusieurs cailloux dans chaque plateau de la balance
  - Mettre plusieurs bâtons bout à bout
- Opération de concaténation + Comparaison d'objets complexes
- Mesure additive par rapport à la concaténation

$$\phi(a \circ b) = \phi(a) + \phi(b)$$

Mesure - Doctorat - novembre 1999 - 17

## Exemple

- Exemple : 5 objets + espace limité + pas de réutilisation

$$a_1 \circ a_5 \succ a_3 \circ a_4 \succ a_1 \circ a_2 \succ a_5 \succ a_4 \succ \dots \succ a_1$$

$$\begin{cases} x_1 + x_5 > x_3 + x_4 \\ x_3 + x_4 > x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 > x_5 \\ x_5 > x_4 > x_3 > x_2 > x_1 \end{cases}$$

|             | $\phi$ | $\phi'$ | $\phi''$ |
|-------------|--------|---------|----------|
| 1           | 14     | 10      | 14       |
| 2           | 15     | 91      | 16       |
| 3           | 20     | 92      | 17       |
| 4           | 21     | 93      | 18       |
| 5           | 28     | 100     | 29       |
| $5 \circ 1$ | 42     | 110     | 43       |
| $3 \circ 4$ | 41     | 185     | 35       |
| $1 \circ 2$ | 29     | 101     | 30       |

|             | $\phi$ | $\phi''$ |
|-------------|--------|----------|
| $2 \circ 3$ | 35     | 33       |
| $1 \circ 4$ | 35     | 32       |

Mesure - Doctorat - novembre 1999 - 18

## Remarques

- Nature de l'échelle difficile à caractériser simplement
  - toutes les solutions d'un système fini d'inéquations/équations linéaires
- Modèle "trade-off" (Conjoint Analysis) en Mkg
  - unicité ?
  - critère d'ajustement ?
  - inférence ?

Mesure - Doctorat - novembre 1999 - 19

## Mesurage extensif

- Utiliser une opération de concaténation et supposer que l'on sait « fabriquer » des objets identiques.
- Séquence standard
 
$$a, a \circ a' = 2a, 2a \circ a'' = 3a, \dots, na$$
- Mesure d'un objet  $b$  ?
 
$$b \succ na, (n+1)a \succ b \Rightarrow \phi(b) \in ]n; n+1[$$
 et passage à la limite



Mesure - Doctorat - novembre 1999 - 20

**X** : ensemble d'objets  
 $\circ$  : loi de composition interne sur X  
 $\succsim$  : relation binaire sur X  
**A1** :  $\succsim$  est complète et transitive  
**A2** :  $(a \circ b) \circ c \sim a \circ (b \circ c)$   
**A3** :  $a \succsim b \Leftrightarrow (a \circ c) \succsim (b \circ c) \Leftrightarrow (c \circ a) \succsim (c \circ b)$   
**A4** :  $a \succ b \Rightarrow \exists n \text{ tel que } na \circ c \succ nb \circ d$   
**A5** :  $a \circ b \succ a$

**Th. de Représentation (Hölder 1905)**  
**A1 - A5** sont NS pour l'existence d'une fonction  $\phi$  telle que :

$$a \succsim b \Leftrightarrow \phi(a) \geq \phi(b)$$

$$\phi(a \circ b) = \phi(a) + \phi(b)$$

**Th. d'unicité**

Soit deux fonctions  $\phi$  et  $\phi'$  vérifiant (\*) alors  
 il existe  $\alpha > 0$  tel que  $\phi = \alpha\phi'$

## Échelle de ratio

Mesure - Doctorat - novembre 1999 - 21

## Problèmes

- Histoire de la mesure
- Pratique de la mesure en Physique
- Mesure fondamentale/dérivée (Volume, Densité)
- Température (°C, °F) ?
- Loi Physiques
- Système de mesure (SI)
  - combien de grandeurs fondamentales ?
- Système idéal
  - pas de traitement explicite des erreurs
- Pas d'application en Physique

Mesure - Doctorat - novembre 1999 - 22

## Autres Problèmes

- Relativité
- Mécanique quantique
- Concaténation définie pour toute paire d'objets

Mesure - Doctorat - novembre 1999 - 23

## Signifiante

- Affirmation signifiante = Affirmation dont la valeur de vérité ne dépend pas d'un choix (arbitraire) d'échelle de mesure
- Pas de définition évidente !!
  - « Je pèse 59 et cet objet pèse 1 » : non signifiant
  - « Je pèse 59 fois plus lourd que cet objet » est signifiant
- La manipulation d'assertions non signifiantes peut conduire à des assertions signifiantes
  - X pèse 50
  - Y pèse 25
  - ⇒ X est deux fois plus lourd que Y

Mesure - Doctorat - novembre 1999 - 24

## Intérêt ?

- Théorique
- Analyse Axiomatique
  - Compréhension
  - Procédures de mesurage (démonstrations constructives)
  - Test
  - extensions : mesurage par différence, mesurage conjoint

Mesure - Doctorat - novembre 1999 - 25

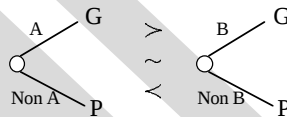
## Mesure en Psychologie – I Psychologie Mathématique

- Psychologie Mathématique (Luce, Krantz, Falmagne)  
*Journal of Mathematical Psychology*
- Idée : Refaire en psychologie *exactement* la même chose qu'en Physique
- Mesure :  $\succsim$ ,  $\circ$ , Propriétés
- $\succsim$  : préférences, sensations
- concaténation ?
- propriétés ?
  
- Avantage : base théorique claire !
- Inconvénient : Applications (Luce 1997)

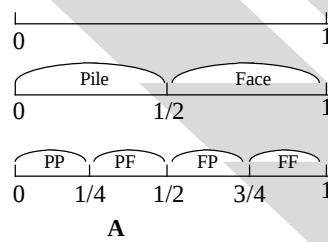
Mesure - Doctorat - novembre 1999 - 26

## Exemple : Probabilité subjectives

- $A \geq B$  : A est au moins aussi vraisemblable que B



- Séquence standard



Mesure - Doctorat - novembre 1999 - 27

## Autres types de mesure

- Constructions « détournées » de séquences standards
- Mesurage par différence
  - « l'écart existant entre a et b est plus grand que l'écart existant entre c et d »
  - Mesure de l'utilité de l'argent
  - Sensations
  - Echelles d'intervalle : le zéro est arbitraire !!
- Mesurage conjoint : Comparaison d'objets multi-dimensionnels
  - $(a_1, b_1)$  et  $(c_1, d_1)$  sont équivalents si
  - $(a_1, a_2) \sim (b_1, b_2)$  et  $(c_1, a_2) \sim (d_1, b_2)$

Mesure - Doctorat - novembre 1999 - 28

## Mesurage par différence

- $ab \geq cd$  (l'écart entre  $a$  et  $b$  est au moins aussi grand que l'écart entre  $c$  et  $d$ )

Séquence standard :  $a_2a_1 \sim a_3a_2 \sim a_4a_3 \sim \dots$

Si  $bc > a_{n-1}a_1$  et  $a_na_1 > bc$

Alors en posant  $\psi(a_2a_1)$  on a :

$\psi(bc) \in ]n-1; n[$

Posons  $\phi(a_1) = 0$  et  $\phi(a_2) = 1$

$\psi(a_2a_1) = \phi(a_2) - \phi(a_1)$

Mesure - Doctorat - novembre 1999 - 29

## Problèmes

- Opérationnalisation ?

- échanges
- mondes parallèles
- bisection

- Propriétés de  $\geq$  ?

Mesure - Doctorat - novembre 1999 - 30

## Axiomes : Mesurage par différence

- A1  $\succsim$  est complète et transitive
- A2  $ab \succsim cd \Rightarrow dc \succsim ba$
- A3  $ab \succsim xy$  et  $bc \succsim yz \Rightarrow ac \succsim xz$
- A4 Toute séquence standard bornée est fine
- A5  $ab \succ cd \Rightarrow ax \sim cd$

Th: A1 - A5  $\Rightarrow ab \succsim cd \Leftrightarrow \phi(a) - \phi(b) \geq \phi(c) - \phi(d)$

La fonction  $\phi$  est une échelle d'intervalle

Mesure - Doctorat - novembre 1999 - 31

## Exemple

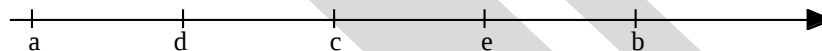
### ■ Bisection

$$ac \sim cb$$

$$ad \sim dc$$

$$ce \sim eb$$

Vérification :  $ad \sim eb$ ,  $de \sim ac$ , etc.



Mesure - Doctorat - novembre 1999 - 32

## Echelles d'intervalle

- Avec une échelle de ratio, seul le choix de l'unité est arbitraire
- Avec une échelle d'intervalle le choix de l'origine et de l'unité est arbitraire
- « Je pèse deux fois plus lourd que M. X » est significatif
- « Il fait en moyenne deux fois plus chaud à Paris qu'à Helsinki » n'est pas significatif !
- « L'écart de température moyenne entre Paris et Helsinki est le double de celui existant entre Dijon et Lyon » est significatif

Mesure - Doctorat - novembre 1999 - 33

## Mesurage Conjoint

$$X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$$

$$\text{Représentation numérique : } x \geq y \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \phi_i(x_i) \geq \sum_{i=1}^n \phi_i(y_i) \quad (*)$$

$$(x_i, K_{-i}) \geq (x_i, L_{-i}) \Rightarrow (y_i, K_{-i}) \geq (y_i, L_{-i}) \quad [\text{Indépendance}]$$

A1  $\geq$  est complète et transitive,  $n \geq 3$

A2 Indépendance

A3 Solvabilité

A4 Archimédien

Th : A1 - A4  $\Rightarrow$  (\*). Les fonctions  $\phi_i$  sont des échelles d'intervalle (unité commune)

Mesure - Doctorat - novembre 1999 - 34

## Opérationnalisation (n = 2)

Choix arbitraires :  $a_1, b_1, a_2$

déterminer  $b_2$  tel que  $(a_1, b_2) \sim (b_1, a_2)$

déterminer  $c_1$  tel que  $(c_1, b_2) \sim (b_1, a_2)$

déterminer  $c_2$  tel que  $(a_1, c_2) \sim (b_1, b_2)$

écarts  $a_1 b_1, b_1 c_1$  équivalents (compensent l'écart  $-b_2 a_2$ )

écarts  $b_2 a_2, c_2 b_2$  équivalents (compensent l'écart  $-a_1 b_1$ ) etc.

Vérification :  $(b_1, c_2) \sim (c_1, b_2)$  ?

$\phi_1(a_1) = 0, \phi_2(a_2) = 0, \phi_1(b_1) = 1$

$\Rightarrow$

$\phi_1(c_1) = 2, \phi_2(b_2) = 1, \phi_2(c_2) = 2$

Mesure - Doctorat - novembre 1999 - 35

## Exemples

- Théorie de l'utilité multi-attribut
- Théorie de la décision dans l'incertain
- Préférences inter-temporelles
- Indices de sensation thermique (température, vent, humidité) ?

Mesure - Doctorat - novembre 1999 - 36

## Problèmes

- Transitivité
- Additivité
- Théorie du mesurage conjoint non additif non transitif
  - Bouyssou et Pirlot (1998)

Mesure - Doctorat - novembre 1999 - 37

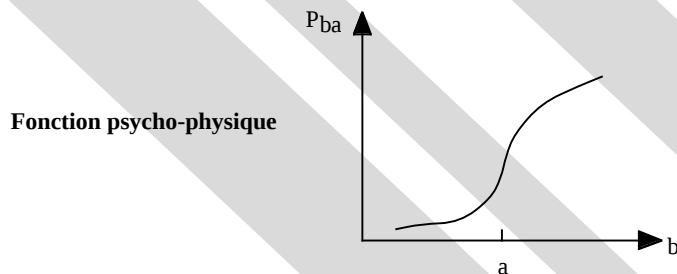
## Mesure en Psychologie – II Psycho-Physique

|                     |   |                  |
|---------------------|---|------------------|
| Intensité lumineuse | ↔ | Brillance perçue |
| Intensité sonore    | ↔ | Bruit perçu      |
| Pression            | ↔ | Pression perçue  |

- Étudier les rapports entre les sensations et les grandeurs physiques
- Deux écoles
  - à la Fechner (Falmagne 1985)
  - à la Stevens (Stevens 1945)

Mesure - Doctorat - novembre 1999 - 38

## à la Fechner



- a-t-on  $P_{ab} = F(u(a) - u(b))$  ?
- Si oui, on a obtenu une échelle  $u$  « mesurant » les sensations
- Autres modèles
- Hypothèses additionnelles (Loi de Fechner-Weber)

Mesure - Doctorat - novembre 1999 - 39

## à la Stevens

- Si l'on peut « mesurer » les sensations, ces mesures doivent avoir un lien avec les mesures physiques sous-jacentes.

$$g(a) = \psi(f(a))$$

$g(a)$  : mesure de la sensation

$f(a)$  : mesure physique (échelle de ratio)

$\psi$  : fonction de transformation

- On constate empiriquement une liaison du type

$$\psi(x) = \alpha x^\beta$$

Mesure - Doctorat - novembre 1999 - 40

## Justifications ?

### ■ Empiriques

- Exemple : “Direct Rating”
- Autres techniques :
  - ☞ direct rating avec ou sans point de référence
  - ☞ estimation de ratios
  - ☞ bissection
  - ☞ cross modality matching

### ■ Théoriques : équations fonctionnelles Luce (1959)

- si la forme de la loi est indépendante des échelles et
- si la nature des des échelles est connue
- ⇒ alors la forme de la loi est fortement contrainte

Mesure - Doctorat - novembre 1999 - 41

## Problèmes

- Stabilité dans le temps ?
- Stabilité inter-individuelle ?
- Hypothèse d’une échelle de sensation d’un certain type (ratio ou intervalle)
- Rapport avec l’analyse Fechnerienne ?
- a-t-on besoin d’une mesure physique sous-jacente ?
  - mesure de « gravité » des crimes et délits

Mesure - Doctorat - novembre 1999 - 42

## Exemple

- AHP (Thomas Saaty)
- « L'action a est x fois plus prioritaire que l'action b du point de vue du critère K »
- « Le critère K est x fois plus important que le critère X »

Mesure - Doctorat - novembre 1999 - 43

## Mesure en Psychologie – III Psychométrie

- Que faire s'il n'existe pas d'échelle physique sous-jacente ?
  - Intelligence
  - Anxiété
  - Racisme ?
- Renoncer à la mesure ?
- Psychométrie (Galton)  
*Psychometrika*
  - Psychologie clinique (aide au diagnostic)
  - Sciences de l'éducation (aide à la sélection/orientation)
  - criminologie/eugénisme
  - etc.

Mesure - Doctorat - novembre 1999 - 44

## Mesure en Psychométrie

- Batterie de questions (Items)
- Coder numériquement la réponse à chaque item
- Bâtir un score global (somme pondérée)
- Valider Statistiquement : Méthodes d'analyse de données
  - Peut-on expliquer la réussite sociale par le QI ?
- Pas de relation binaire, pas de concaténation
- Opérationnalisme : “Intelligence is what intelligence tests measure”

Mesure - Doctorat - novembre 1999 - 45

## Exemples

- Recherche de sensation
- Anxiété
- Événements de la vie
- Elle ?
- Intérêts
  - permet d'étendre le champ de la mesure
  - validation statistique
- Limites
  - pas de théorie sous-jacente
  - pas d'information sur la nature des échelles

Mesure - Doctorat - novembre 1999 - 46

## Validation

### ■ Fiabilité : Répéter la mesure

- Test/Re-test
- Spilt-Half
- Diverses techniques

### ■ Validité

- faciale : inter-subjectivité
- prédictive
  - ☞ Dogmatisme et Votes
- trait
  - ☞ Convergente (deux indicateurs sensés mesurer la même chose doivent être corrélés)
  - ☞ Discriminante (l'inverse !)

### ■ Arsenal statistique très développé

Mesure - Doctorat - novembre 1999 - 47

## Questions

### ■ Univers d'items

### ■ Sélection des items

### ■ Sélection des sujets

- biais d'items
- biais styles de réponse

### ■ Stratégies de collecte

- ouvert/fermé
- choix/tri/ordre

Mesure - Doctorat - novembre 1999 - 48

## Techniques

- Échelles de Guttman
- Loi du jugement comparatif (Thurstone)
- Théorie classique
- Rasch Scaling (Item Response Theory)

Mesure - Doctorat - novembre 1999 - 49

## Autres approches

- Temps de réponse (mesure physique corrélée)
- Mesures biologiques (acidité, activité cérébrale)

Mesure - Doctorat - novembre 1999 - 50

## Mesure de la faim

### ■ Littérature

- quantité ingérée dans les 24 h
- taux ingestion (rapport ingestion/poids)
- % de réduction de la masse corporelle
- durée depuis la dernière ingestion

### ■ Psychologie Mathématique

- Analyse conjointe (durée, quantité)
- hypothèse : on peut comparer en terme de "faim" deux situations

### ■ Psycho-Physique

- Faim =  $f(\text{Temps})$
- Faim = échelle de ratio
- Trouver un moyen d'opérationnaliser et estimer  $\beta$

### ■ Psychométrie

- Mesure itemique de la faim

Mesure - Doctorat - novembre 1999 - 51

## Conclusions

- Problème difficile (même en Physique)
- Approches très diverses et très contrastées
- Importance pour la manipulation statistique des chiffres obtenus : problème de signifiante
- Conséquences sur les Thèses en Gestion ?

Mesure - Doctorat - novembre 1999 - 52