Décision dans le risque

Une courte introduction

Denis Bouyssou

CNRS
Paris, France

ULB — mars 2006

Plan

Décision dans le risque/dans l'incertain

Décision « dans le certain »

- A : ensemble d'actions (décisions possibles)
- X : ensemble de conséquences
- $c(a) \in X$: conséquence de la mise à exécution de $a \in A$

Problème

- « La décision ne dispose que pour l'avenir »
  - $c(a)$ n'est pas connu avec certitude

Décision dans le risque

- $c(a)$ est une distribution de probabilité sur X

Décision dans l'incertain

- $c(a)$ est connu par référence à un certain nombre de « scénarios »

Décision dans le risque : Modélisation

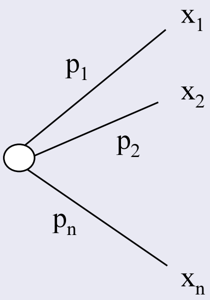
Modélisation

- X : ensemble de conséquences
- X fini $= \{x_1, x_2, , x_n\}$
- $X \subseteq \mathbb{R}$ (sommes monétaires)

Loterie simple sur X

- v.a. (discrète) sur X
- $\ell = (x_1, p_1; x_2, p_2; \ldots; x_n, p_n)$
- $p_\ell(x_i)$: probabilité de x_i avec ℓ

Loterie simple sur X



Loteries

Ensemble des loteries

- loteries simples
- loteries composées du premier ordre sur X : loteries sur les loteries simples
- loteries composées du deuxième ordre sur X : loteries sur les loteries composés du premier ordre
- etc.

- $L(X)$: ensemble de toutes les loteries simples et composées (à ordre fini)
  - $L(X)$ est toujours infini

Loteries

Remarque

- $L(X)$ comprend toutes les loteries correspondant à la mise à exécution des actions de A ainsi que d'autres loteries « hypothétiques »

Problème

- aider à comparer les loteries de $L(X)$

Notations

- $\ell \in L(X)$
- $x \in X$
- $p_\ell(x)$: probabilité d'obtenir la conséquence x avec la loterie ℓ

Critère Classique

Espérance Mathématique de Gain (EMG)

$$\ell \succ \ell' \Leftrightarrow \sum_{x \in X} x p_{\ell}(x) > \sum_{x \in X} x p_{\ell'}(x)$$

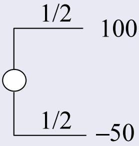
$$\ell \sim \ell' \Leftrightarrow \sum_{x \in X} x p_{\ell}(x) = \sum_{x \in X} x p_{\ell'}(x)$$

Avantages

- simple
- bonne utilisation de l'information
- « délégable »

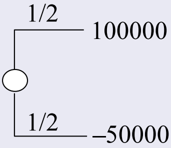
Inconvénients

- restreint aux conséquences numériques
- pas de justification claire
- en contradiction avec le comportement observé de personnes « rationnelles » (diversification, assurance)



préféré à

$$E(\ell) = 25 \quad E(\ell') = 0$$



non préféré à

$$E(\ell) = 25\,000 \quad E(\ell') = 0$$

Problèmes

- répétition de l'expérience ?
- risque de ruine ?

Paradoxe de Saint Petersbourg (D. Bernoulli)

Jeu

- un « banquier » joue avec un « joueur ». Le joueur paye un droit d'entrée au banquier
- le banquier jette ensuite une pièce autant de fois qu'il faut pour que « face » apparaisse
- le jeu s'arrête ensuite
- si « face » est apparue au $n^{\text{ième}}$ coup, le banquier verse 2^n € au joueur
- combien un joueur rationnel devrait être prêt à payer pour participer à ce jeu ?

$$EMG = 2 \times \frac{1}{2} + 2^2 \times \frac{1}{2^2} + \cdots$$

(une chance sur deux de ne gagner que 2 € !)

Remarque

- si enjeux « petits » (peu ou pas de risque de ruine) et
- décisions sont « répétitives »

le critère EMG peut constituer une approximation satisfaisante

Autre Critère Classique

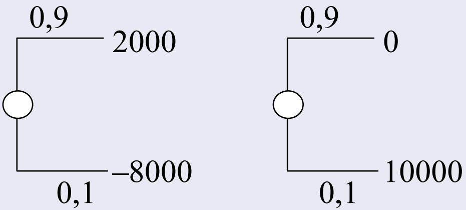
Espérance Mathématique de Gain (EMG) + Variance

- ajouter une mesure de « risque » (dispersion) à la mesure de tendance centrale

Problèmes

- plus compliqué
- comment traiter les deux critères ? (sous-ensemble efficace ou critère de synthèse ?)
- la variance est-elle une bonne mesure du risque ? (écart inter-quartile, semi-variance, etc.)

Exemple



$$\begin{aligned}
E(\ell) &= 0,9 \times 2\,000 + 0,1 \times -8\,000 = 1\,000 \\
&= 0,9 \times 0 + 0,1 \times 10\,000 \\
Var(\ell) &= 0,9 \times (2\,000 - 1\,000)^2 + 0,1 \times (-8\,000 - 1\,000)^2 \\
&= 0,9 \times 1\,000^2 + 0,1 \times 9\,000^2 \\
&= 0,9 \times (0 - 1\,000)^2 + 0,1 \times (10\,000 - 1\,000)^2
\end{aligned}$$

Ces deux loteries sont nécessairement indifférentes

Limites des critères classiques

Problèmes

- ces critères ne prennent pas en compte la psychologie d'un individu vis-à-vis du risque
  - quel est le patrimoine de l'individu ?
  - quels sont ses revenus ?
  - quel est son attitude vis-à-vis du risque ?
  - etc.

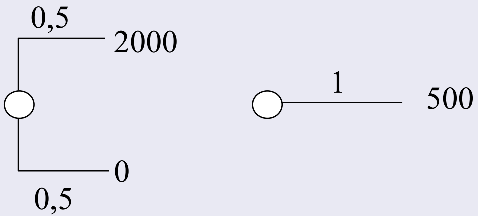
Pseudo-Solution

- interroger directement un individu sur ses préférences

Problèmes

- cohérence ?
- non délégable !
- effort cognitif

Exemple : Choix entre



Exemple : choix entre

- $\mathcal{N}(878,32;72,45)$ et
- $Bi(1200;0,75)$

Théorie de l'utilité espérée

J. von Neumann et O. Morgenstern (1945)

Idée

- interroger un individu sur des choix simples
- modéliser son comportement dans un modèle mathématique
- utiliser le modèle pour des cas plus compliqués

Questions

- quel modèle ?
- est-ce justifié ?
- comment interroger ?

Modèle mathématique

Idée

- remplacer l'EMG par une « espérance d'utilité »
- l'utilité prend en compte la psychologie d'un individu vis-à-vis du risque

$$\ell \succ \ell' \Leftrightarrow \sum_{x \in X} u(x) p_\ell(x) > \sum_{x \in X} u(x) p_{\ell'}(x)$$

$$\ell \sim \ell' \Leftrightarrow \sum_{x \in X} u(x) p_\ell(x) = \sum_{x \in X} u(x) p_{\ell'}(x)$$

Fonction d'utilité

- $u : X \to \mathbb{R}$
- $u(x)$ est l'« utilité » de la conséquence $x \in X$
- la fonction u est propre à un individu

Avantages

- simple
- délégable
- prend en compte les caractéristiques individuelles
- pas restreint aux conséquences monétaires
- justification claire (axiomes)

Analyse Théorique

Comment justifier un tel modèle ?

- analyse axiomatique

Interprétation des axiomes ?

- descriptive
- normative
- prescriptive

Axiome (A1 Rangement)

Pour tout $\ell, \ell' \in L(X)$ *l'une au moins des deux propositions suivantes est vraie :*

- ℓ *est préférée ou indifférente à* ℓ *(*$\ell \succsim \ell'$*)*
- ℓ' *est préférée ou indifférente à* ℓ *(*$\ell' \succsim \ell$*)*

De plus, $\succsim$ *est transitive :*

$$\ell \succsim \ell' \text{ et } \ell' \succsim \ell'' \Rightarrow \ell \succsim \ell''$$

$\forall \ell, \ell', \ell'' \in L(X)$

Remarque

- $\ell \succ \ell' \Leftrightarrow [\ell \succsim \ell'$ et Non$[\ell' \succsim \ell]]$
    - préférence stricte
- $\ell \sim \ell' \Leftrightarrow [\ell \succsim \ell'$ et $\ell' \succsim \ell]$
    - indifférence
- A1 implique que $\sim$ et $\succ$ sont transitives

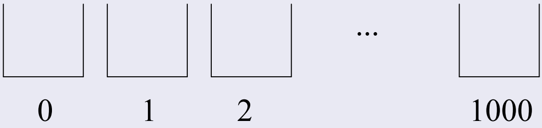
Analyse descriptive

Difficultés

- préférence incomplètes
- indifférence non transitive
- préférence stricte non transitive

Luce (1956)

Comparaison de tasses de café



$$0 \sim 1, 1 \sim 2, \ldots, 999 \sim 1\,000 \Rightarrow 0 \sim 1\,000$$

- pouvoir discriminant imparfait $\Rightarrow$ indifférence non transitive

Dominance avec seuils

Exemple

$$x \succ y \Leftrightarrow \begin{cases} x \text{ au moins aussi bon que } y \text{ sur tous les critères} \\ x \text{ meilleure que } y \text{ sur au moins un critère} \end{cases}$$

	g_1	g_2	g_3
a	10	10	10
b	11	11	8
c	12	9	9

- seuil de discrimination $= 1,1$ (en dessous de ce seuil, on ne fait pas de distinction)
- $a \succ b$, $b \succ c$, $c \succ a$

aller plus vite

Paradoxe de Condorcet

Données

- Votant 1 : $a \succ b \succ c$
- Votant 2 : $c \succ a \succ b$
- Votant 3 : $b \succ c \succ a$

$$\text{majorité : } a \succ b; b \succ c, c \succ a$$

Effets de seuils

Exemple

1	Voiture	15 000 €
2	Voiture + AR	15 500 €
3	Voiture + AR + TO	16 000 €
4	Voiture + AR + TO + JL	16 500 €
...		
n	Voiture + ...	18 000 €

Préférence d'un consommateur « naïf »

$$2 \succ 1, 3 \succ 2, 4 \succ 3, n \succ (n-1) \quad \text{mais} \quad 1 \succ n$$

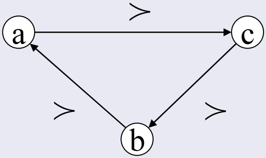
Analyse

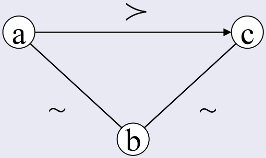
Approche prescriptive

- efficacité

Approche normative

- « pompe à argent »
  - échanges à partir de c

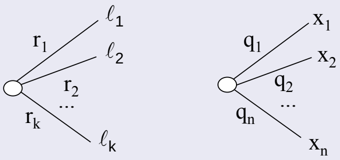




Axiomes

Axiome (A2 Réduction)

ℓ_j : *loteries composées du premier ordre*



avec $q_i = \sum_{j=1}^{k} r_j p_{\ell_j}(x_i)$

$\Rightarrow$ *Indifférence*

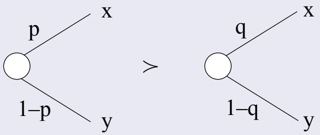
Interprétation

- « on ne s'amuse pas au jeu »

Axiomes

Axiome (A3 Monotonie)

Si $x \succ y$ *alors*



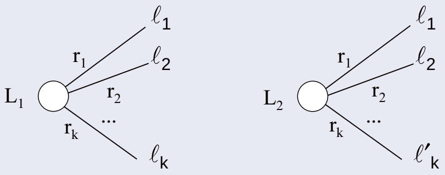
si et seulement si $p > q$ $(\forall x, y \in X)$

Interprétation

- « on est âpre au gain »
- « on ne ruse pas avec les probabilités » (superstition)

Axiomes

Axiome (A4 Indépendance (Substituabilité))



Si $\ell_k \sim \ell'_k$ *alors* $L_1 \sim L_2$

Interprétation

- « l'indifférence est de l'indifférence »

Axiomes

Axiome (A5 Continuité)

Si $x \succ y \succ z$ *alors il existe une probabilité* $p \in \,]0;1[$ *telle que :*

$$y \sim (x, p; z, (1-p))$$

$\forall x, y, z \in X$

Remarque

- l'axiome de monotonie implique que cette probabilité est unique

Interprétation

- « on n'est pas naïf avec les probabilités » (pas de discontinuité : certain / risque)

Axiomes

Exemple

- x : gagner 2 bonbons
- y : gagner 1 bonbon
- z : être pendu demain à l'aube

$$x \succ y \succ z$$

Problème

- existe-t-il une probabilité $p \in]0;1[$ telle que :

$$y \sim (x, p; z, (1-p))$$

- $p = 1 - 10^{-100}$?

Conséquences des axiomes

Théorème (Représentation)

Soit une relation de préférence $\succsim$ sur $L(X)$.
Cette relation vérifie les axiomes A1-A5
si et seulement si
il existe une fonction $u : X \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\ell \succsim \ell' \Leftrightarrow \sum_{x \in X} u(x) p_\ell(x) \geq \sum_{x \in X} u(x) p_{\ell'}(x) \qquad \text{(vNM)}$$

Remarque

- nécessité évidente
- u est liée à $\succsim$ et donc à l'individu

Démonstration

Cas fini : $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

Considérons une loterie $\ell \in L(X)$
1)
En utilisant un nombre fini de fois A1 (rangement), A2 (réduction) et A4 (substitution), on peut toujours trouver une loterie simple telle que : $\ell \sim (x_1, p_1; x_2, p_2; \dots; x_n, p_n)$
On suppose, s.p.d.g., que :

$$x_n \succ x_{n-1} \succ \cdots \succ x_1$$

2)
A5 (continuité) : puisque

$$x_n \succ x_i \succ x_1$$

il existe $u_i \in]0;1[$ telle que

$$x_i \sim [x_n, u_i; x_1; (1-u_i)]$$

On pose :

$$u_n = 1, u_1 = 0$$

3)
En utilisant un nombre fini de fois A4 (substitution), A1 (rangement) et A2 (réduction), on sait que :

$$\ell \sim (x_1, p_1; x_2, p_2; \ldots; x_n, p_n)$$
$$\ell \sim [x_1, (1 - K_\ell); x_2, 0; \ldots; x_n, K_\ell]$$

avec

$$K_\ell = \sum_{i=1}^{n} p_i \, u_i$$

4)
Utilisons les étapes 1) à 3) pour transformer une loterie
$\ell' \sim (x_1, q_1; x_2, q_2; \ldots; x_n, q_n)$
On a :

$$\ell' \sim [x_1, (1 - K_{\ell'}); x_2, 0; \ldots; x_n, K_{\ell'}]$$

avec

$$K_{\ell'} = \sum_{i=1}^{n} q_i u_i$$

5)
En utilisant A1 (Rangement) et A3 (Monotonie) on sait que :

$$\ell' \succ \ell \Leftrightarrow$$
$$(x_1, p_1; x_2, p_2; \ldots; x_n, p_n) \succ (x_1, q_1; x_2, q_2; \ldots; x_n, q_n) \Leftrightarrow$$
$$[x_1, (1 - K_\ell); x_2, 0; \ldots; x_n, K_\ell] \succ [x_1, (1 - K_{\ell'}); x_2, 0; \ldots; x_n, K_{\ell'}] \Leftrightarrow$$
$$K_{\ell'} > K_\ell \Leftrightarrow$$
$$\sum_{i=1}^{n} q_i u_i > \sum_{i=1}^{n} p_i u_i$$

et l'on définit u en posant :

$$u(x_i) = u_i$$

$\square$

Conséquences des axiomes

Théorème (Unicité)

S'il existe deux fonctions u et v vérifiant (vNM) *alors il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avec $\alpha > 0$ tels que :*

$$v(x) = \alpha u(x) + \beta$$

$\forall x \in X$

Interprétation

« les préférences se mesurent comme la température »

Démonstration

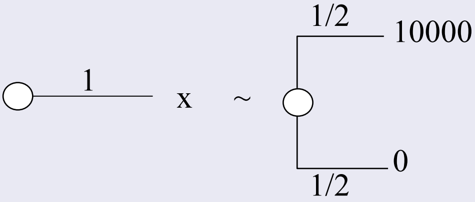
évidente car si u et v ne sont pas liées par une transformation affine, on peut toujours trouver une paire de loteries dont les espérances d'utilité se compareront de façon différente avec u et v $\square$

Encodage d'une fonction d'utilité

Hypothèses

- $X = \mathbb{R}$ (sommes d'argent)
- on pose $u(0) = 0$ et $u(10\,000) = 1$

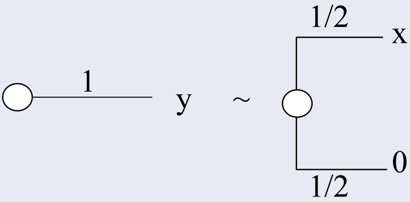
Encodage



$$1 \times u(x) = u(x) = 1/2 \times u(10\,000) + 1/2 \times u(0) = 1/2$$

Encodage d'une fonction d'utilité

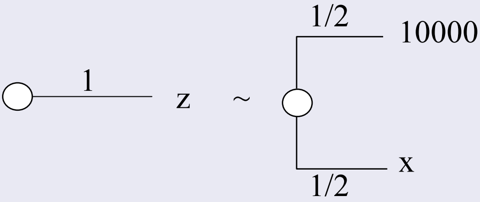
Encodage



$u(y) = 1/2 \times u(x) + 1/2 \times u(0) = 1/4$

Encodage d’une fonction d’utilité

Encodage

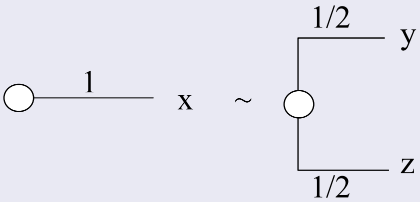


$$u(z) = 1/2 \times u(10000) + 1/2 \times u(x) = 3/4$$

Encodage d'une fonction d'utilité

Contrôle

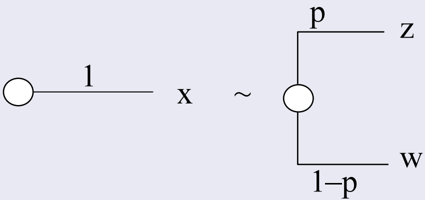
- on doit avoir:



- sinon : revenir en arrière

Encodage d'une fonction d'utilité

Cas général



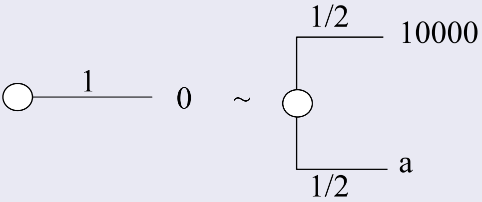
$u(x) = pu(z) + (1-p)u(w)$

- 4 inconnues
- en fixer 3 et trouver l'indifférence sur la 4ième

aller plus vite

Encodage d'une fonction d'utilité

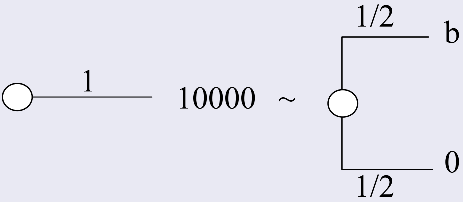
Interpolation basse



$$1 \times u(0) = 1/2 \times u(10\,000) + 1/2 \times u(a) \Rightarrow u(a) = -1$$

Encodage d'une fonction d'utilité

Interpolation haute



$$1 \times u(10\,000) = 1/2 \times u(b) + 1/2 \times u(0) \Rightarrow u(b) = 2$$

Encodage d'une fonction d'utilité

Remarques

- utilisation de probabilités « simples » : 1/2, 1/3, 1/4
- interrogation par encadrements successifs
- vérifications indispensables

Difficultés

Expériences

- effet du contexte
- effet de référence
- paradoxe d'Allais

Généralisations possibles

- Modèles Non EU (EURDP, Local EU, Regret, etc.)

Effet du contexte

Expérience

- L_1 : vous courrez le risque de perdre 1 000 \$ avec $p = 1/100$
- L_2 : vous pouvez vous assurez pour 10 \$ contre ce risque
- L_3 : vous perdez 10 \$ avec certitude mais vous ne supportez plus de risque

Résultats

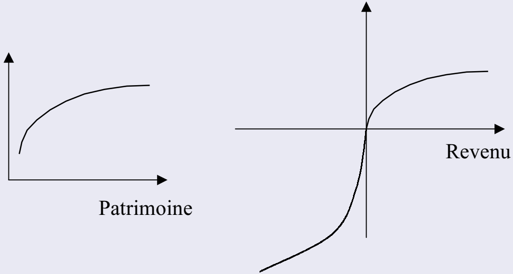
- 80% : $L_2 \succ L_1$
- 56% : $L_3 \succ L_1$

Interprétation

- Importance du contexte des questions
- généralement clair dans un contexte décisionnel

Effet du référence

Fonction d'utilité sur le patrimoine ou sur les revenus ?



sauter l'exemple

Exemple : choix épidémiologique

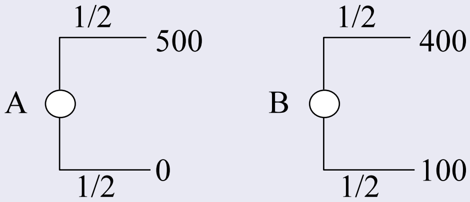
Présentation 1 : diminution du nombre de morts

Niveau actuel de mortalité = 500 morts / an

- Choix A : diminuer ce nombre de 500 (1/2) ou de 0 (1/2)
- Choix B : diminuer ce nombre de 400 (1/2) ou de 100 (1/2)

majorité des médecins : $B \succ A$

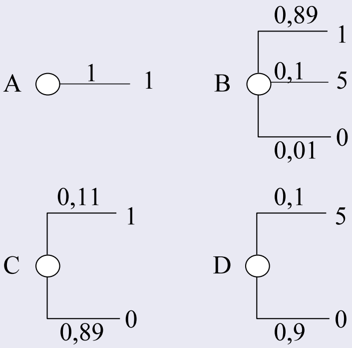
Présentation 2 : nombre de morts



majorité des médecins $A \succ B$

Paradoxe d'Allais (10^6 €)

Expérience



Résultats

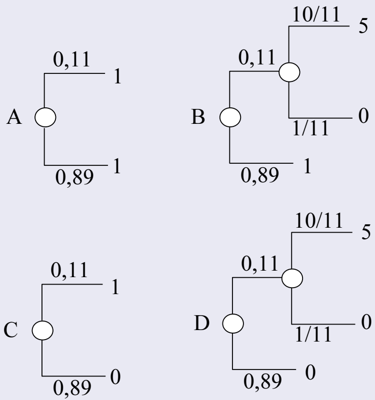
- $A \succ B$ et $D \succ C$

Interprétation

- $A \succ B \Rightarrow$
  $u(1) >$
  $0,89u(1) + 0,1u(5) + 0,01u(0)$
  $\Rightarrow u(1) > 10/11$
- $D \succ C \Rightarrow$
  $0,1u(5) + 0,9u(0) >$
  $0,11u(1) + 0,89u(0)$
  $\Rightarrow u(1) < 10/11$

Paradoxe d'Allais

Reformulation



sauter les exemples

Paradoxe d'Allais

Reformulation

- urne contenant 89 boules R et 11 boules N

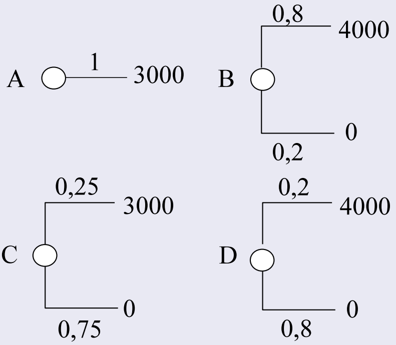
	R	N
X	Q	1
Y	Q	5 avec 10/11 0 avec 1/11

Le choix entre X et Y doit-il dépendre de Q ?

- Q = 0 : X = C et Y = D
- Q = 1 : X = A et Y = B

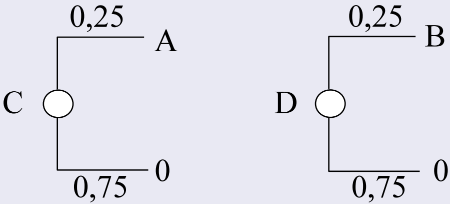
Effet de certitude (Kahneman et Tversky)

Expérience



- 95% des sujets disent : $A \succ B$ et $D \succ C$

Mais . . .



Violation de l'indépendance

Analyse normative

- $x \succ y$ et $(y, p, z) \succ (x, p, z)$
- $x \succ y \Rightarrow (x - \varepsilon) \succ y$
- $(y, p, z) \succ (x, p, z) \Rightarrow (y, p, (z - \varepsilon)) \succ (x, p, z)$

Échanges à partir de (x, p, z)

- (x, p, z) échangé pour $(y, p, (z - \varepsilon))$
  - si E n'arrive pas gain $= (z - \varepsilon)$
  - si E arrive gain $= y$ et y échangé contre $(x - \varepsilon)$
- on avait (x, p, z) on a $((x - \varepsilon), p, (z - \varepsilon))$!

Violation « rationnelle » de l'indépendance

À l'école de sa maman

- une mère a deux enfants A et B
- elle a un seul cadeau à donner à A ou à B

Préférences de maman

- $A \sim B$
- $(A, 1/2, B) \succ (A, 1/2, A)$

$\Rightarrow$ violation « rationnelle » de l'indépendance

Goût et Aversion pour le risque

Contexte

- posons $X = \mathbb{R}$
- considérons un décideur « vérifiant » A1-A5
- il est peu restrictif de supposer que u est strictement croissante !
- P : patrimoine du décideur

Équivalent certain d'un loterie ℓ : $\hat{x}(\ell)$

- somme d'argent certaine que le décideur trouve équivalente au fait de posséder la loterie ℓ (prix minimal de vente de la loterie ℓ)

$$E(u(P + \hat{x}(\ell))) = u(P + \hat{x}(\ell)) = E(u(P + \ell))$$

$$\Rightarrow$$

$$\hat{x}(\ell) = u^{-1}[E(u(P + \ell))] - P$$

Prime de risque $\pi(\ell)$ associée à une loterie ℓ

Prime de risque

$$\pi(\ell) = E(\ell) - \hat{x}(\ell)$$

Goût et aversion

On dira qu'un décideur

- présente de l'*aversion* pour le risque si $\hat{x}(\ell) < E(\ell)$
- présente du *goût* pour le risque si $\hat{x}(\ell) > E(\ell)$
- est *neutre* vis à vis du risque si $\hat{x}(\ell) = E(\ell)$ (EMG)

pour toute loterie $\ell \in L(X)$

Goût et aversion pour le risque

Théorème (Aversion pour le risque (Arrow-Pratt))

Un décideur présente de l'aversion pour le risque si et seulement si sa fonction d'utilité est concave

Démonstration

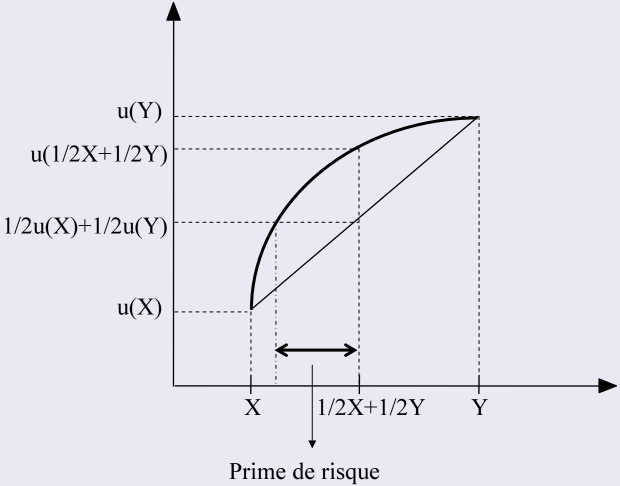
Aversion pour le risque ($\hat{x}(\ell) < E(\ell)$)

$$E[u(P + E(\ell))] = u(P + E(\ell)) > E(u(P + \ell)) = u(P + \hat{x}(\ell))$$

$$u(P + [\alpha x + (1 - \alpha)y]) = u(\alpha(x + P) + (1 - \alpha)(y + P)) >$$
$$E(u(P + \ell)) = \alpha u(x + P) + (1 - \alpha)u(y + P)$$

$$X = x + P, \ Y = y + P$$
$$u(\alpha X + (1 - \alpha)Y) > \alpha u(X) + (1 - \alpha)u(Y)$$

□


u(Y)
u(1/2X+1/2Y)
1/2u(X)+1/2u(Y)
u(X)
X
1/2X+1/2Y
Y
Prime de risque

Exemple

- assurance tous risques et loto (lotto ?)
- forme de u ?

sauter la mesure d'aversion

Mesure d'aversion pour le risque

Définition

- P = patrimoine du décideur
- $\hat{x}(\ell)$ = équivalent certain de ℓ (on suppose $E(\ell) = 0$, s.p.d.g.)
- $u(P + \hat{x}(\ell)) = E[u(P + \ell)]$
  $u(P + \hat{x}(\ell)) = u(P - \pi(\ell))$ (car $E(\ell) = 0$ et $\pi(\ell) = E(\ell) - \hat{x}(\ell)$)
  $\Rightarrow u(P - \pi(\ell)) = E[u(P + \ell)]$

$u(P - \pi(\ell)) = E[u(P + \ell)]$

- développements limités
- $u(P) - \pi(\ell)u'(P) + o(\pi^2) = E[u(P) + \ell u'(P) + 1/2\ell^2 u''(P) + o(\ell^3)]$
- $-\pi(\ell)u'(P) \approx E(\ell)u'(P) + 1/2E(\ell^2)u''(P) = 1/2\,Var(\ell)u''(P)$

Résultat

$$\pi(\ell) \approx 1/2\,Var(\ell)\frac{-u''(P)}{u'(P)}$$

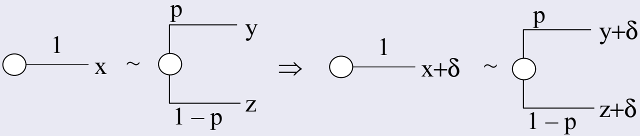
Mesure locale de l'aversion absolue pour le risque

$$r(P) = \frac{-u''(P)}{u'(P)}$$

Cas Particulier Important (CARA)

Théorème (Arrow-Pratt)

Si le décideur respecte l'axiome (A6) $\forall x, y, z, \delta \in \mathbb{R}$ *et* $\forall p \in [0;1]$*:*



Alors sa fonction d'utilité est nécessairement du type :

- *soit* $u(x) = -e^{-\tau x}$ *si* $\tau > 0$ *(aversion pour le risque)*
- *soit* $u(x) = x$ *(neutralité vis-à-vis du risque)*
- *soit* $u(x) = e^{-\tau x}$ *si* $\tau > 0$ *(goût pour le risque)*

aller aux applications

Fonctions d'utilité CARA

Intérêt

- simplification de l'encodage si A6 est admis
- prix d'achat maximum de toute loterie est identique à son prix de vente minimal
- pour une loterie se présentant sous la forme d'une loi normale on a exactement : $\hat{x}(\ell) = \mu - 1/2\tau\sigma^2$
- politique de gestion des risques dans une entreprise

Application à la Finance

Choix de portefeuille

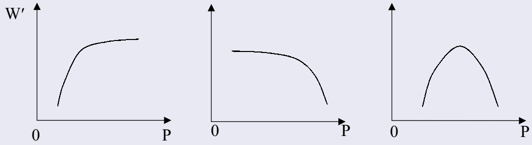
- actif sans risque (rendement nul)
- actif risqué (rendement aléatoire)

Diversification mono-périodique

- P : richesse initiale
- a : montant investi dans l'actif risqué
- $\widetilde{x}$: rendement de l'actif risqué,
- $\widetilde{Y}$: richesse finale

Analyse

- $\widetilde{Y}$: richesse aléatoire en fin de période
- $\widetilde{Y} = (P - a) + (1 + \widetilde{x})a = P + a\widetilde{x}$
- Problème
$$\max_{a \in [0;P]} E[u(\widetilde{Y})] = E[u(P + a\widetilde{x})]$$
- $W'(a) = E[\widetilde{x}u'(P + a\widetilde{x})]$
- $W''(a) = E[\widetilde{x}^2 u''(P + a\widetilde{x})]$
- Aversion au risque : $u' > 0$ et $u'' < 0$
- $W''(a)$ est négative (W' décroissante)

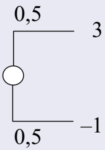


- optimum en $a = 0 \Leftrightarrow W'(0) < 0$
- $W'(a) = E[\widetilde{x}u'(P + a\widetilde{x})]$
- $W'(0) = E(\widetilde{x})u'(P) < 0 \Leftrightarrow E(\widetilde{x}) < 0$

Résultat (de base en Finance)

Un investisseur vN-M averse au risque diversifie dans l'actif risqué dès lors que le rendement espéré de l'actif risqué est supérieur au rendement de l'actif sans risque

Risk-sharing



$u(\cdot)$	I_1	I_2
3	1	1
$1,5$	$0,7$	$0,6$
0	0	0
$-0,5$	$-0,35$	$-0,4$
-1	$-1,5$	$-1,2$

- $E(u_1) < 0,\ E(u_2) < 0$
- il existe un partage du risque (ici 50% / 50%) mutuellement profitable
- vrai dans le cas général


C'EST TOUT POUR AUJOURD'HUI.