UNIVERSITE PARIS - DAUPHINE

U.E.R. SCIENCES DES ORGANISATIONS

THÈSE POUR L'OBTENTION DU TITRE DE DOCTEUR DE 3ÈME CYCLE

SPÉCIALITÉ

MÉTHODES SCIENTIFIQUES DE GESTION

Sujet : APPROCHES DESCRIPTIVES ET CONSTRUCTIVES D'AIDE À LA DÉCISION :
FONDEMENTS ET COMPARAISON

Candidat : DENIS BOUYSSOU

Directeur de Recherche : BERNARD ROY

Jury :

Président : Guy TERNY

Suffragants : Jean-Yves JAFFRAY
Hervé LE LOUS
Bernard ROY
Philippe VINCKE

Année de la soutenance : 1984

ERRATA

- p. 150 : Compléter l'exemple en rajoutant les relations suivantes :

$$(x_1, x_2) \succ (y_1, z_2)$$
$$(x_1, x_2) \succ (z_1, z_2)$$
$$(x_1, z_2) \succ (y_1, x_2)$$
$$(x_1, z_2) \succ (z_1, x_2)$$
$$(y_1, x_2) \succ (z_1, z_2)$$
$$(y_1, z_2) \succ (z_1, x_2)$$

- p. 151 : Compléter l'exemple en rajoutant les mêmes relations que ci-dessus.

S O M M A I R E

Pages

Pages

REMERCIEMENTS

Ma gratitude va tout d'abord au Professeur Bernard Roy qui a, durant deux années, su me diriger et m'encourager dans la réalisation de ce travail.

Je tiens ensuite à remercier tout spécialement le Professeur Guy Terny qui a bien voulu accepter la charge de présider ce jury.

Messieurs les Professeurs Jean-Yves Jaffray, Hervé Le Lous et Philippe Vincke m'ont fait l'honneur d'accepter d'être membres du jury. Je les en remercie ici très vivement.

Ce travail n'aurait pu être réalisé sans les nombreux échanges qu'il m'a été donné d'avoir avec les membres du LAMSADE. Parmi eux, Jean-Michel Skalka, Jean Siskos et Halim M'Silti méritent tout particulièrement d'être cités. Une mention spéciale va à Jean-Claude Vansnick avec qui de nombreux points de cette thèse ont été longuement discutés.

Je tiens enfin à remercier Dominique François qui a assuré, avec une compétence difficilement égalable, la frappe de ce manuscrit.

INTRODUCTION

Depuis une quinzaine d'années, le désenchantement provoqué (cf. par exemple Sakarovitch (1978)) par les méthodes classiques de la recherche Opérationnelle, sensible tant chez les "producteurs" que les "consommateurs" d'études, a conduit à une cencentration des efforts sur des pratiques plus "douces" : ce que Bernard Roy a appelé l'"aide à la décision". C'est dans ce cadre que le présent travail espère s'insérer.

Ce courant de recherche a, dès l'origine, donné lieu à une multiplicité de méthodes parfois fort différentes. On peut, en simplifiant, les séparer selon la ligne de partage indiquée par Roy, Vincke et Brans (1975) entre l'"Ecole Américaine" et l'"Ecole Française". L'Ecole Américaine, s'appuyant sur les développements axiomatiques issus de l'ouvrage de von Neumann et Morgenstern (1947), modélise l'incertitude sous forme de distribution de probabilités. L'espérance mathématique de cette distribution sur une échelle d'utilité, construire de façon appropriée, constitue alors un critère sur lequel fonder sa décision. L'Ecole Française, avec principalement B. Roy, s'attache pour sa part à mettre en évidence, entre les différentes actions, une relation dite de "surclassement" dont la fonction est de refléter la partie des préférences du décideur que l'on est en mesure d'asseoir avec suffisamment de probance. La définition de cette relation de surclassement s'opère, indépendamment de toute considération axiomatique, sur la base d'idées pragmatiques et de principes volontaristes.

Cette thèse s'attachera avant tout à approfondir l'analyse de ces méthodes en tentant de mettre à jour leurs fondements et à les comparer.

Avant d'introduire le plan de ce travail, il convient d'insister sur les limites que nous nous sommes fixées.

En premier lieu, nous avons pris le parti de centrer notre attention sur les seules méthodes se rattachant clairement à l'une des deux écoles mentionnées plus haut. Ces deux écoles s'intéressant principalement à des problèmes où le nombre d'actions potentielles est fini, nous avons volontairement laissé de côté un courant important de recherche se situant dans le cadre de la "programmation mathématique multicritère" (sur ce point, voir Hwang et Masud (1979) ou Vincke (1983)). De même n'aurons-nous pas l'occasion d'aborder les nombreuses techniques issues de la théorie des sous-ensembles flous (voir Kickert (1978), Yager (1977), Dubois et Prade (1980) et (1981) ou Kaufmann (1973)) ou les méthodes ne faisant pas référence explicite à la notion de critère (Jacquet-Lagrèze (1975a) et (1977)). Cet objectif, volontairement restreint, nous permettra donc de nous concentrer sur deux types d'approches extrêmement contrastés dont nous essaierons de mettre à jour les philosophies respectives. Ce seront d'ailleurs plus des "courants de pensée" que des méthodes particulières que nous essaierons d'analyser dans ce travail.

Dans un premier chapitre introductif, nous essaierons de préciser le cadre méthodologique de ce travail en nous interrogeant sur le problème du "test" des modèles d'aide à la décision et sur la notion de critère.

Le second chapitre sera consacré entièrement aux méthodes se fondant sur la théorie axiomatique de l'utilité. Nous montrerons dans quelle mesure ces méthodes sont liées à cette théorie formelle sous-jacente et nous préciserons les hypothèses permettant leur fonctionnement dans un cadre d'aide à la décision.

Le troisième chapitre s'attachera à l'analyse des méthodes de l'"Ecole Française". Nous y traiterons successivement du mode d'agrégation des critères qu'elles proposent ainsi que du concept de "seuils de discrimination" qu'elles utilisent.

Le quatrième et dernier chapitre de ce travail permettra, sur un exemple précis, d'effectuer une comparaison de ces deux types d'approches en montrant comment chacune d'elles est mise en oeuvre pour apporter une véritable aide à la décision.

CHAPITRE I

L'AIDE A LA DECISION :
LA NATURE DES MODÈLES, LE RÔLE DES CRITÈRES, LA PRISE EN COMPTE DE L'INCERTITUDE

Nous avons, dès l'introduction, restreint l'objectif de notre étude à "l'aide à la décision". Roy (1979-83) chapitre 2 la définit comme étant : *"... l'activité de celui qui, prenant appui sur des modèles clairement explicités et plus ou moins complètement formalisés, cherche à obtenir des éléments de réponse aux questions que se pose un intervenant dans un processus de décision".* Ce sont les conséquences induites par le choix de cet objet d'étude qui feront l'objet de ce chapitre introductif.

A. SUR LA NATURE DES MODELES EN AIDE A LA DECISION

Le terme même d'"aide à la décision" sous-entend que cette activité se situe fondamentalement à la charnière de la réflexion et de l'action, comme le montre Roy (1979-83) chapitre 2. Ce point constitue sans doute sa principale originalité par rapport à ce que l'on nomme habituellement les "sciences sociales". Certains auteurs n'ont pas hésité à conclure de cette constatation que l'aide à la décision était dépourvue de tout caractère scientifique. Ainsi Faure (1978) voit, dans la Recherche Opérationnelle, plus un art qu'une science et qualifie le terme de modèle appliqué à cette discipline de "pompeux".

1) Modèles normatifs, prescriptifs et descriptifs

L'objet de l'activité d'aide à la décision a donné lieu à de nombreuses controverses. La progressive reconnaissance de la complexité du tissu organisationnel et humain dans lequel sont immergés les processus de décision (voir par exemple Jacquet-Lagrèze et al (1978), Hirsch et al (1978), Marchet (1981)) a conduit à la remise en cause de la notion d'optimisation. Roy (1977a) et (1979-83) chapitre 2, préconise de limiter l'ambition du chercheur opérationnel à une simple prescription, au sens médical du mot, ce qui correspond, à peu près, à la position de Keeney et Raiffa (1976), chapitre 1.

Le principal problème tient au fait que tout un courant de la Recherche Opérationnelle fonde son analyse sur une base axiomatique avec les nombreux développements liés à la théorie de l'utilité (voir von Neumann et Morgenstern (1947) ou Fishburn (1970)). Au-delà de l'élégance de la construction mathématique, la question de l'interprétation des axiomes dans un cadre d'aide à la décision et du problème de la "rationalité" a donné lieu à de nombreux débats dont la teneur est bien résumée dans le recueil de Allais et Hagen (1979). Ces axiomes peuvent-ils servir à la définition d'une rationalité "évidente" (cf. Strotz (1952) ou Morgenstern (1979)), sont-ils seulement un outil permettant au décideur d'effectuer des choix cohérents (cf. Luce et Raiffa (1957), Raiffa (1968), Amihud (1979)) ou doivent-ils être rejetés car impliquant des comportements trop restrictifs (cf. Allais (1952) ou (1979), Hagen (1979)) ? On voit bien que, si l'on adopte la première de ces interprétations, la théorie de l'utilité acquiert un caractère normatif immédiat (nous reviendrons en détail sur cette question au chapitre II).

Même si tous les auteurs se référant à la théorie de l'utilité ne reconnaissent pas à leurs axiomes une valeur normative, on constate qu'en matière d'aide à la décision, l'"Ecole Axiomatique" (nous entendons sous ce terme tous les auteurs se référant à la théorie de l'utilité de manière explicite) s'oppose à une "Ecole Pragmatique" (cf. par exemple Zeleny (1982), Roy (1979) et (1979-83)), sans qu'entre elles le dialogue soit très fécond. Cette confrontation a donné lieu à des pratiques très différentes dans le domaine des études. A titre d'illustration, on pourra comparer, dans le domaine des transports, de Neufville et Keeney (1972) et Roy et Hugonnard (1982) ou, dans le domaine de la localisation, Keeney et Nair (1976) et Khouadja et Roy (1975).

On considèrera, tout au long de ce travail, l'objectif de l'aide à la décision comme étant exclusivement prescriptif (quelle que soit la nature du modèle utilisé). La section suivante s'efforcera de justifier ce choix en montrant qu'il serait artificiel d'isoler les modèles se fondant sur une théorie axiomatique au sein de la Recherche Opérationnelle, en leur conférant un statut particulier. Remarquons cependant que cette prescription peut prendre des formes très variées. Roy (1979-83) propose à cet égard de distinguer quatre problématiques de référence par rapport auxquelles l'homme d'étude peut concevoir son rôle :

- problématique de choix P.α : retenir la (ou les) meilleure(s) action(s) ;
- problématique de tri P.β : retenir toutes les "bonnes" actions ;
- problématique de rangement P.γ : ordonner les actions ;
- problématique de description P.δ : décrire les actions et leurs conséquences.

2) Le problème de la validation et du test des modèles d'aide à la décision

Le courant dominant de l'épistémologie moderne (cf. Popper (1973), Lakatos (1974)) place, au coeur de sa réflexion, la question du "test" des modèles. Si l'on s'en tient aux sciences sociales, la tendance "positiviste" radicale, incarnée par Friedman (1935) et Machlup (1967) en économie, considère que le seul test possible d'un modèle réside dans la comparaison de ses "prédictions" avec la "réalité", le terme de réalité devant ici s'entendre au sens de la "classe de phénomènes" que le modèle se proposait d'expliquer au départ.

En ce qui concerne les modèles de type axiomatique, il est clair que cette position rend caduque toute critique d'un modèle se limitant à l'irréalisme de ses axiomes de base. Ainsi, pour Friedman (1935) p. 14 : *"... Truly and significant hypotheses will be found to have "assumptions" that are wildely inaccurate descriptive representation of reality, and, in general, the more significant the theory, the more unrealistic the assumptions... To be important, therefore, a hypothesis must be descriptively false in its assumptions".* Cette attitude positiviste (qui a prouvé son efficacité dans bien d'autres domaines que la Science Economique) semble, au premier abord, condamner irrémédiablement toute tentative pour infirmer une théorie axiomatique en montrant que ses axiomes ne sont pas respectés par un grand nombre de personnes. En ce qui concerne la théorie de l'utilité, ces critiques, fondées sur des études empiriques, ont été particulièrement abondantes (voir par exemple Allais (1952) et (1979), Tversky (1969), Slovic et Tversky (1974), Jaffray et Cohen (1982) et les abondantes bibliographies de Allais et Hagen (1979) et de Schoemaker (1981)) mais, dans une perspective positiviste, leur statut paraît incertain.

De nombreuses controverses sur la validation et la portée des théories axiomatiques de la décision nous semblent prendre racine dans le manque de clarté entourant la "classe de phénomènes" qu'elles se proposent d'expliquer. Dans le cas de la théorie de l'utilité, il peut s'agir de phénomènes impliquant, à un moment ou à un autre, des prises de décision face à un environnement incertain ou d'une de ces décisions en particulier. On conçoit bien que le test d'un modèle ne peut être envisagé de la même façon selon qu'il vise à rendre compte du fonctionnement du marché de l'assurance, qu'il cherche à expliquer pourquoi un individu s'assure ou qu'il vise à lui prescrire une décision en matière d'assurance.

A l'origine, la théorie de l'utilité a répondu au besoin de disposer d'un outil "pratique" d'analyse en théorie des jeux (cf. les commentaires historiques de Morgenstern (1979)). Dans de nombreux domaines, le recours à cette théorie formelle a permis d'enrichir considérablement l'analyse sans que le réalisme descriptif des axiomes intervienne directement (cf. par exemple en économie Friedman et Savage (1948), Jensen et Meckling (1976), Grossman et Hart (1980) et l'abondante bibliographie de Fishburn (1968)). En paraphrasant Friedman, on peut dire que l'irréalisme des axiomes de von Neumann et Morgenstern a permis d'éclairer avec succès de nombreux problèmes économiques. Bien que la position radicale de Friedman ait été souvent contestée (voir en particulier Samuelson (1963) et Williamson (1964)), le concept de "pouvoir prédictif" semble, dans de nombreux domaines, devoir fournir des tests de validité plus puissants de modèles scientifiques que celui du "réalisme" des hypothèses.

Cette constatation paraît cependant difficilement applicable au domaine de l'aide à la décision tant la nature des modèles y est spécifique comme nous allons le voir. Il est en effet clair que la théorie de l'utilité, à côté de son usage en analyse économique, a été également beaucoup utilisée en Recherche Opérationnelle (au sens anglo-saxon, c'est-à-dire large), suite aux premiers développements de la théorie de l'utilité multiattributs (cf. Fishburn (1965), Raiffa (1969) et Keeney (1974)) et à la sophistication des méthodes d'encodage (cf. Raiffa (1968)). C'est, bien sûr, cet aspect de la théorie de l'utilité qui nous préoccupera dans ce travail consacré à l'aide à la décision. Sans attendre le chapitre II où les liens entre la théorie formelle de l'utilité et le modèle d'aide à la décision seront étudiés en détail, il faut mentionner ici que, dans le cadre de la Recherche Opérationnelle, le "test" des modèles de nature axiomatique devient assez ambigu et, en tout état de cause, ne peut se concevoir dans une optique positiviste. L'objectif d'un modèle d'aide à la décision est de "rendre compte" (ou de "construire") puis d'"exploiter" les préférences d'un individu ou d'un groupe d'individus face à un problème particulier. La notion de "prédiction", centrale dans une optique positiviste, perd ici beaucoup de sa substance. A moins de faire une hypothèse de stabilité des préférences dans le temps, on ne peut prédire les choix futurs ni tester son modèle sur la base de choix passés et la confrontation de la prescription à la décision effectivement prise semble dépourvue de toute signification. De nombreux auteurs, dont Churchman (1965), ont insisté sur la difficulté que représente le test d'une théorie de la décision. Schoemaker (1981) montre que ce problème se pose de façon cruciale pour la théorie de l'utilité. Plus généralement, nous pensons que la spécificité de l'activité de modélisation en aide à la décision (ou du moins dans l'état actuel de développement de cette discipline) impose une réflexion épistémologique spécifique (*).

(*) A la différence de Le Moigne (1982), nous pensons cependant que cette réflexion spécifique doit être cantonnée à l'aide à la décision et ne doit pas conduire à une remise en cause radicale de l'épistémologie classique des sciences sociales.

A propos de la théorie de l'utilité, de nombreuses controverses semblent être dues à son utilisation dans un grand nombre de disciplines fort différentes, d'autant plus que les techniques de la Recherche Opérationnelle et de la théorie économique sont souvent très proches d'un point de vue formel. Le problème qui fait l'objet de cette section reste donc ouvert : comment tester un modèle d'aide à la décision ? Dans une perspective positiviste, la remarque de Faure prend tout son sens puisque l'on ne veut plus parler véritablement de prédiction et donc de test. Si l'on veut faire du chercheur opérationnel autre chose qu'un "artiste", au sens de Faure, il convient de s'écarter nettement d'une position positiviste radicale.

La pratique des études d'aide à la décision, qu'elles soient fondées ou non sur des considérations axiomatiques, montre qu'une des qualités essentielles de l'étude doit être de se faire accepter, c'est-à-dire de bien s'insérer dans le processus de décision dont elle n'est qu'une étape (et généralement ni la dernière, ni la plus importante, cf. Moscarola (1977) et Roy (1979-83)). En un mot, elle doit convaincre les personnes à qui elle s'adresse mais aussi l'"homme d'étude" qui la met en oeuvre (nous reprenons ici la terminologie de Roy (1979-83)). La conviction du décideur pourra revêtir bien des aspects selon la nature de l'étude (voir Walliser (1979) et Jacquet-Lagrèze (1981) pour une typologie des différents types d'études et leurs motivations). Elle sera généralement plus forte si l'étude est susceptible de servir d'instrument de communication et de négociation avec les autres acteurs du processus de décision et/ou avec l'extérieur. On pourra ici nous objecter que nous passons d'une attitude fort rationaliste à sa négation même. Si nous définissons en effet un "bon" modèle d'aide à la décision (c'est-à-dire un modèle qui a passé le test de sa validité avec succès), comme un modèle qui emporte la double conviction de l'homme d'étude et du décideur, nous rendons la définition contingente à la personnalité des personnes en présence ainsi qu'à la nature du problème étudié. Ce point de vue, s'il peut praître choquant, nous semble cependant le seul utile en Recherche Opérationnelle. Il implique, certes, un certain pragmatisme mais il nous semble souhaitable d'introduire explicitement cette notion dès lors que, et c'est notre cas, on considère qu'il n'existe pas de solution unique pour résoudre un problème donné (*).

Il ne faut cependant pas ignorer que cette position comporte des risques importants puisque, en dernière analyse, c'est de l'honnêteté intellectuelle de l'homme d'étude et de la volonté de collaboration du décideur que dépendra l'émergence, à un moment donné, d'un modèle satisfaisant pour résoudre un problème précis (ou plus exactement pour aider à le résoudre). Ajoutons de plus que, si l'on considère le terme de "modèle" comme étant réservé à des énoncés susceptibles de tests "positifs", on peut, en Recherche Opérationnelle, adopter sans inconvénient celui de "Mode Opératoire". Même si ce dernier terme présente, à nos yeux, l'avantage de faire ressortir clairement que l'on se situe à la charnière de l'action et de la réflexion, nous adopterons, dans la suite de ce travail, le terme de "modèle d'aide à la décision" pour rester cohérent avec une tradition déjà bien établie.

Si l'on admet qu'en Recherche Opérationnelle on ne peut guère aller plus loin que cette notion rudimentaire de test, il apparaît clair que le statut des "modèles axiomatiques" change. En particulier, pour ce qui concerne la théorie de l'utilité, ses grandes qualités en matière de modélisation économique ne sont ni nécessaires, ni suffisantes pour emporter l'adhésion en matière d'aide à la décision. On conçoit fort bien que, pour un problème particulier, le fait d'être confronté à des préférences cycliques pourra conduire un homme d'étude à rejeter toute référence à une quelconque fonction d'utilité. Dans cette perspective, les études expérimentales concernant le respect des axiomes de la théorie de l'utilité prennent tout leur sens et nous développerons ce point plus avant au chapitre II.

Ces quelques réflexions nous portent à croire que nous serons fondés, dans la suite de ce travail, à mettre en parallèle un modèle reposant sur

---

(*) La primauté donnée au caractère opératoire des modèles en aide à la décision n'est d'ailleurs pas aussi éloignée qu'il peut paraître, en première analyse, d'une position positiviste. Si les tenants de cette dernière ont à coeur d'insister sur la puissance prédictive et explicative des modèles, c'est avant tout parce que seule la prédiction permet au modèle de devenir opératoire dans bien des domaines scientifiques. En tout état de cause, c'est bien ce caractère opératoire des concepts qui fonde, dans cette optique, leur test et leur corroboration.

une base axiomatique, la théorie de l'utilité, et un modèle opératoire pragmatique fondé sur les notions de concordance-discordance et de seuils de discrimination (cf. Figure 1.1).

	Théorie formelle	Modèle d'aide à la décision
"Ecole Américaine"	Théorie de la représentation numérique de structure de préférences (cf. Fishburn (1970))	Decision Analysis (cf. Keeney et Raiffa (1976))
"Ecole Française"	?	Méthodes ELECTRE (cf. Roy (1968) et (1978))

Figure 1.1 : Théorie formelle et modèles d'aide à la décision

L'intérêt de disposer d'une base axiomatique est en effet fortement dépendant de la nature du test du modèle envisagé. Nous renvoyons à l'avant-propos de Debreu (1966) pour illustrer tout le parti pouvant être tiré de l'analyse axiomatique dans un cadre positiviste. Les vertus de l'axiomatique en matière d'aide à la décision sont sensiblement différentes. La "conviction" que devra emporter le modèle sera le plus souvent indépendante de l'assise théorique du modèle utilisé et on voit mal pourquoi on pourrait, dans ce cadre, séparer le formalisme mathématique de l'interprétation du modèle (sur ce point, voir Debreu (1966)). Roy et Bouyssou (1983) (voir également chapitres II et III) montrent qu'une analyse axiomatique ne peut légitimer que le <u>modèle formel</u> et non l'interprétation de celui-ci en vue d'une aide à la décision (*). L'expression de "modèle formel" est ici empruntée à Zimmermann (1980) qui la définit comme une suite d'énoncés mathématiques ne présentant aucune incohérence logique, non susceptible de test. Tel nous semble être le statut de la théorie de l'utilité (en tant que branche de la "measurement theory") qui n'est donc pas suffisante à elle seule pour déboucher sur un mode opératoire d'aide à la décision.

(*) Notons cependant que la présence du modèle formel peut parfois contribuer à une meilleure compréhension du modèle d'aide à la décision.

Ces quelques remarques nous obligent, enfin, à préciser à nouveau l'objectif de cette thèse. Compte-tenu de la conception dégagée du test d'un modèle d'aide à la décision, celui-ci ne peut s'effectuer qu'au "coup par coup" et ne relève pas d'un travail théorique. La comparaison des modèles issus des Ecoles Française et Américaine que nous envisageons ne se place donc pas directement au niveau de leur validation. Il suffit de se reporter aux bibliographies de Keeney et Raiffa (1976) ou Fishburn (1968) d'une part et de Siskos et al (1983) d'autre part pour se persuader que chacune des deux écoles a déjà su souvent convaincre un grand nombre de décideurs. Plus modestement, ce travail vise, au travers d'une analyse et d'une comparaison critique, à améliorer le dialogue entre ces deux courants de pensée et, éventuellement, à fournir aux décideurs des éléments permettant de mieux juger les méthodes que les hommes d'étude leur proposent de mettre en oeuvre.

Une des différences essentielles entre ces deux écoles réside dans la façon dont elles prennent en compte la mauvaise connaissance que l'on peut avoir des évaluations des actions potentielles de l'étude d'aide à la décision ; le paragraphe suivant nous permettra de mieux situer ce problème.

3) <u>La prise en compte des "phénomènes non-déterministes"</u>

On peut difficilement mettre en doute le fait que la connaissance que nous avons de la réalité qui nous entoure est parfois fort approximative. De façon générale, nous emploierons, pour caractériser cette situation, le terme de "non-déterminisme" puisque, comme nous le verrons dans cette section, cette mauvaise connaissance ne peut pas toujours se ramener à l'incertitude.

Lorsque la validation d'un modèle peut se concevoir par référence à un concept classique de test (cf. A.2), la prise en compte, la gestion et le traitement systématique de l'indétermination repose sur un arbitrage délicat entre économie et pouvoir explicatif. Ainsi, la micro-économie classique a-t-elle pris le parti de se situer dans un cadre strictement déterministe pour modéliser les phénomènes de consommation, de production et d'échange. La Recherche Opérationnelle, fondant sa validité sur une toute autre notion de test, se doit d'aborder le problème sous un jour différent. Il ne s'agit en effet plus pour elle d'arbitrer entre simplicité et pouvoir explicatif mais de parvenir à saisir dans sa modélisation ce que l'homme d'étude estime être "l'essentiel" d'une situation aux yeux des acteurs concernés, c'est-à-dire ce qui semble être signifiant et probant à leurs yeux pour répondre à un champ de question donné.

De nombreuses raisons nous laissent supposer qu'en Recherche Opérationnelle, une étude ne peut être probante sans s'intéresser explicitement aux phénomènes non déterministes.

a) On en fait appel à un "homme d'étude" que lorsque la complexité du problème l'exige. Dans bien des cas, c'est l'indétermination qui est à la source de la complexité et ne pas la prendre en compte entraînerait un manque d'adhésion et de conviction du décideur.

b) S'agissant d'étudier une "micro-décision", on ne peut espérer que, comme dans beaucoup d'autres cas, l'indétermination micro puisse se transformer en macro-phénomène déterministe. L'honnêteté intellectuelle de l'homme d'étude lui impose donc de ne pas vouloir faire dire aux données plus que ce qu'elles veulent dire (j'emprunte cette expression à Roy) et d'inclure l'indétermination dans son analyse.

c) Très souvent, ce sont des problèmes dont la nature même est stochastique et imprécise qui constituent le champ d'action privilégié de la Recherche Opérationnelle : situations de jeu, prévisions, erreur de mesure sur les données de départ.

La nécessité d'un traitement systématique des phénomènes non déterministes est d'ailleurs un des rares points de convergence entre l'Ecole Américaine et l'Ecole Française et les concepts de fonction d'utilité et de seuils s'efforcent tous deux d'y répondre à leur façon.

Au terme de cette première section, nous espérons avoir clarifié le cadre méthodologique de ce travail. Dans les deux dernières sections de ce chapitre, nous passerons brièvement en revue les différents types de phénomènes non déterministes susceptibles d'être rencontrés et les outils disponibles pour les appréhender après avoir précisé la notion de critère dans le processus de modélisation en aide à la décision.

B. SUR LA NOTION DE CRITERE EN AIDE A LA DECISION

Dans son excellente synthèse, Fishburn (1977) montre que les termes "critères", "attributs", "conséquences", "objectifs" revêtent des significations parfois très différentes selon les auteurs. Au-delà d'un simple problème terminologique, cette situation reflète, à notre sens, la difficulté de trouver une base commune aux différentes modélisations en théorie de la décision. Notre objectif comparatif et synthétique nous oblige cependant à adopter, autant que possible, un vocabulaire unique s'appliquant à la fois aux deux Ecoles. Cette section s'efforcera avant tout de dégager des concepts de base en réduisant au minimum le formalisme mathématique. Celui-ci, ainsi que les détails techniques l'accompagnant, seront précisés dans le cours du texte au fur et à mesure de nos besoins.

Dans le cas où les actions potentielles de l'étude d'aide à la décision peuvent être comparées par rapport à un seul "axe de signification", on considère que chaque action est évaluée de façon non déterministe sur un "attribut unique". Cette évaluation pourra, selon les cas, se présenter sous forme d'une distribution de probabilité sur un attribut gain (cas d'un billet de loterie), d'un intervalle dans le cas d'une quantité certaine mesurée à l'aide d'un appareil imprécis, etc. Nous n'imposerons a priori aucune restriction particulière sur la nature de cet "attribut" pourvu qu'il soit clairement défini et perçu par le décideur. Le support de l'évaluation pourra être, selon les cas, un ensemble continu (l'ensemble de réels pour un attribut gain ou perte), discret (l'ensemble des entiers naturels pour le nombre de pièces fabriquées par jour par une machine), un ensemble fini dans le cas d'un attribut qualitatif ({fort, moyen, faible, inexistant}).

En accord avec Fishburn (1977) et Roy (1979-83), nous entendrons par critère une "représentation numérique" des préférences entre ces évaluations. Nous laissons ici volontairement de côté la nature et la précision de cette représentation numérique ainsi que la structure des préférences considérées. On voit donc que, dans le cas où un seul attribut est pris en compte, les définitions adoptées restent classiques et ne soulèvent pas de problème particulier. Bien que la notion de critère n'apparaisse pas directement dans le vocabulaire des modèles issus de la théorie de l'utilité, il est clair que l'espérance mathématique d'utilité joue, dans ce cas, le même rôle.

Notons qu'il semble peu restrictif, dans la plupart des cas, de postuler (cf. Roy (1975) et (1979-83)) la possibilité de préordonner totalement les valeurs prises sur un attribut dès lors que l'on se situe dans un cadre idéal où aucune indétermination ou limitation cognitive ne vient perturber l'appréciation de ces valeurs en termes de préférences. Bien que cette question soit toujours controversée, il nous semble que la probance des modèles ne serait pas profondément augmentée par la prise en compte d'attributs supportant (dans un cadre idéal) des relations de préférence plus faibles que le préordre (quasi-ordre, ordre d'intervalle, pseudo-ordre, etc.).

Lorsque les actions sont évaluées sur plusieurs "attributs" que nous appellerons situation "multidimensionnelle" (de préférence à "multiattribut", ce dernier terme étant trop lié à la théorie de l'utilité), la notion de critère n'apparaît plus aussi clairement. Notons que la famille d'attributs est souvent définie de façon "descendante" dans les méthodologies axiomatiques au travers d'une décomposition par étape d'un objectif global. Au contraire, Roy (1979-83) propose de définir les "axes de signification" des divers critères de façon "ascendante", en regroupant diverses "dimensions" dont on a au préalable fait un inventaire exhaustif. On peut, bien sûr, par analogie avec la situation précédente définir un critère comme étant la représentation numérique des préférences entre ensembles d'évaluations imprécises (c'est-à-dire d'une préférence globale)

Sans rentrer dans la question de savoir si une telle préférence existe ou s'il s'agit de la construire en collaboration avec le décideur, on peut dire que cette conception d'un critère unique dans le cas multidimensionnel n'est pas celle couramment admise en aide à la décision. Ainsi, les modèles faisant intervenir plus d'un attribut font explicitement référence à plusieurs critères, d'où l'appellation "multicritère" et non "multidimensionnel" (voir Roy, Vincke (1982) ou Roy (1972)).

Cependant, la plupart des méthodes pragmatiques ne s'interrogent pas explicitement sur le passage d'une évaluation "multidimensionnelle" sur les différents attributs à une évaluation "multicritère", limitant leur rôle à une agrégation de critères "locaux" au niveau global. Cette démarche s'éloigne profondément, en apparence, de celle utilisée dans les modèles axiomatiques fondés sur la théorie de l'utilité et mérite une analyse plus approfondie.

Assez paradoxalement, on trouve peu de définitions précises de la notion de critères dans la littérature dite "multicritère" (voir cependant Fishburn (1977)). La démarche multicritère classique consiste à prendre pour point de départ une matrice d'évaluation où figurent en colonne les actions et en ligne les différents critères sans se préoccuper directement du "remplissage" de cette matrice.

Roy (1973), (1975), (1977) propose une définition d'une "famille cohérente de critères" et Roy (1979-83) chapitre 9 définit formellement la notion de critère dans une situation multidimensionnelle. Pour lui, un critère g est une fonction définie sur l'ensemble A des actions à valeur réelle résumant l'évaluation des différentes actions sur un ou plusieurs attributs et telle que l'homme d'étude comparant deux actions relativement aux <u>seuls</u> attributs pris en compte dans la définition du critère reconnaisse fondée la proposition :

$$g(a') \geq g(a) \Longrightarrow a' \, S_g \, a \qquad (1.1)$$

où a et a' représentent deux actions et où S_g est une relation binaire sur l'ensemble des actions au contenu sémantique "au moins aussi bon que relativement aux évaluations sur les seuls attributs pris en compte dans la définition de g".

Une famille de critères $\{g_1, \ldots, g_n\}$ est un résumé de l'évaluation des différentes actions sur tous les attributs. Cette famille est de plus dite cohérente si et seulement si elle vérifie les trois conditions suivantes : $\forall (a, a') \in A^2$, $\forall j, k \in \{1, \ldots, n\}$:

- condition d'exhaustivité : $g_j(a) = g_j(a') \; \forall j \in \{1, \ldots, n\} \Rightarrow a \, I \, a'$
- condition de non incomparabilité : $g_j(a) = g_j(a') \; \forall j \neq k$ et $g_k(a') > g_k(a) \Rightarrow a' \, S \, a$
- condition de non redondance : la suppression de l'un quelconque des critères de la famille pourrait mettre en défaut l'une des deux conditions précédentes

où I et S sont des relations binaires définies sur A au contenu sémantique "est indifférent à (resp. au moins aussi bon que) relativement à l'ensemble des évaluations sur tous les attributs considérés". Nous noterons $C = \{X_1, \ldots, X_m\}$ l'ensemble des attributs considérés et $x_i(a)$ l'évaluation de l'action a relativement à l'attribut X_i. Précisons que, comme dans le cas unidimensionnel, celle-ci peut se présenter sous de multiples formes (distribution de probabilité, intervalle, etc.).

Au sens de Roy, une fonction critère g est donc destinée à supporter une relation de préférence S_g, cette préférence étant appréciée par rapport aux seuls attributs pris en compte dans la définition de g. Le problème de la nature et de la conception des critères dans un cadre multidimensionnel se ramène donc principalement à celui de l'interprétation et de la construction de telles relations S_g.

Il est nécessaire tout d'abord d'écarter une interprétation naïve selon laquelle le jugement traduit par S_g serait celui qui prévaudrait si on restreignant le problème à une situation excluant tous les attributs n'étant pas pris en compte dans la définition de g. Pour nous en convaincre, on peut prendre, à titre d'exemple, le problème (inspiré de Siskos (1976)) de choix d'un repas dans un restaurant. Un client gastronome et en appétit doit se décider pour l'un des deux plats figurant sur la carte (viande ou poisson) et choisir de l'accompagner soit d'un vin blanc, soit d'un vin rouge. Son problème de décision peut s'analyser en termes de deux attributs : un "attribut boisson" b et un "attribut plat" p. Il préfère, sans ambiguïté, la viande au poisson et le vin blanc au vin rouge. S'il ne devait que boire, il opterait pour le vin blanc. S'il ne devait que manger, ce serait de la viande. Il est cependant déraisonnable de poser "blanc S_b rouge" et "viande S_p poisson" car ce client gastronome préfère accompagner sa viande de vin rouge et son poisson de vin blanc. Dans ce cadre multidimensionnel, la connaissance d'une préférence unidimensionnelle "hypothétique" (le choix doit porter ici à la fois sur le plat et la boisson et le client n'est donc pas dans une situation où il ne lui faudrait que boire ou manger. Il n'est pas impossible, de plus, que celui-ci ne boive jamais de vin entre les repas, ce qui ramènerait le jugement unidimensionnel évoqué au niveau d'une fiction totalement irréaliste) n'est d'aucun secours. Peu importe de savoir si le client préfère le vin blanc ou le vin rouge ou la viande au poisson car il s'agit ici, pour lui, de faire choix d'un couple "plat-boisson" et ses préférences sur l'un des deux attributs ne peuvent s'analyser indépendamment de l'autre attribut.

Cet exemple simpliste nous conduit à proposer une autre interprétation de S_g en utilisant une optique proche de celle de la théorie de l'utilité en tant que "relation de préférence conditionnelle". S_g doit alors être regardée comme une relation permettant de comparer deux actions relativement aux seuls attributs pris en compte dans la définition de g (nous dirons désormais "axe de signification de g"), toutes choses égales par ailleurs, c'est-à-dire en considérant que les évaluations sur tous les attributs n'entrant pas dans l'axe de signification de g sont identiques pour les deux actions. S_g doit, dans cette interprétation, être définie sur un ensemble d'actions plus large que l'ensemble d'actions de départ, la nécessité de comparer "toutes choses égales par ailleurs" impliquant de prendre en compte des "actions fictives" (cf. Roy (1979-83) chapitre 9 et Fishburn (1977)), rien ne garantissant que les évaluations des "actions réelles" de départ se prêtent à cette comparaison. La théorie de l'utilité a depuis longtemps analysé les conditions d'existence de telles relations conditionnelles (l'exemple du repas suffit à prouver que celles-ci n'ont pas toujours de sens). De fait, on a souvent reproché aux méthodes multicritères pragmatiques de ne pas reconnaître explicitement les hypothèses d'indépendance du système d'attribut considéré sous-tendant l'existence de relations de préférence conditionnelles (cf. Von Winterfeld (1975)). Notre objectif d'amélioration du dialogue entre ces deux écoles nous impose donc d'analyser ce point plus avant (cf. sur ce problème d'indépendance Roy (1979-83) chapitre 10 et (1983)).

Dans le cadre multidimensionnel, la théorie de l'utilité considère généralement (cf. Fishburn (1965), voir cependant Fishburn (1976')) qu'une relation de préférence globale existe sur la totalité de l'ensemble produit $\overset{m}{\underset{i=1}{X}} X_i$ où X_i représente l'ensemble des valeurs envisageables pour l'attribut i ou, plus généralement, sur l'ensemble des distributions de probabilité sur cet ensemble produit. Les hypothèses d'indépendance portant sur la relation de préférence globale et permettant de donner un sens à des relations de préférence conditionnelles dépendent de la nature des évaluations $x_j(a)$. Selon que l'évaluation des actions se présente sous une forme certaine ou probabiliste, on recourt respectivement à une hypothèse d'indépendance au sens des préférences et à une hypothèse d'indépendance au sens des utilités ("preferential independence" et "utility independence" ; la terminologie utilisée est celle de Keeney et Raiffa (1976), cf. Annexe 1). Avant de parler de critères, la théorie de l'utilité implique de tester ces hypothèses d'indépendance (ou plus exactement une combinaison adéquate de celles-ci) qui, si elles sont vérifiées, permettent d'aboutir à une représentation numérique des préférences sur un axe de signification ceteris paribus (Keeney et Raiffa (1976) donnent une synthèse très large de ces théorèmes visant à décomposer une fonction d'utilité globale au travers d'hypothèses d'indépendance.

La relation (1.1), traduite dans le langage de la théorie de l'utilité, implique donc de façon immédiate que le sous-ensemble $X_g \subset X$ des attributs appartenant à l'axe de signification de g doit vérifier certaines hypothèses d'indépendance vis-à-vis de son complémentaire X/X_g. Roy (1972), conscient des critiques que pouvait soulever l'utilisation de critères dans les méthodes pragmatiques, mentionnait qu'on ne pouvait parler de critère que lorsque chaque attribut était indépendant au sens des préférences de tous les autres. Au niveau formel, cette condition n'est pertinente que lorsque $X_i(a)$ est ponctuel $\forall\ i \in \{1, \ldots, m\}$ et $\forall\ a \in A$, c'est-à-dire lorsque la situation est déterministe.

Lorsque $X_i(a)$ se présente sous la forme d'une distribution de probabilité, il faut faire référence à l'indépendance au sens de l'utilité de X_g vis-à-vis de X/X_g. En toute rigueur, il conviendrait, lorsque l'évaluation d'une action se présente de façon imprécise et non plus seulement sous la forme d'une distribution de probabilité, de généraliser la notion d'indépendance au sens des utilités et définir un sous-ensemble X_g d'attributs indépendants de son complément dans X si les préférences pour des évaluations imprécises sur X_g ne dépendent pas des valeurs fixées sur X/X_g.

A ce niveau, nous n'adopterons pas de définition formelle de ce que nous entendons par évaluation imprécise ou non déterministe. Cependant, comme cette notion très générale n'est pas "classique", un exemple simple permettra de lieux la cerner. Considérons une action évaluée sur un critère monétaire. L'information dont on dispose nous permet de savoir avec certitude qu'en aucun cas la mise à exécution de cette action ne pourra coûter plus de 1 000 000 F sans que ce coût puisse être inférieur à 500 000 F. De plus, le décideur considère comme le plus vraisemblable l'intervalle 800 000-900 000. Cependant, celui-ci estime ne pas pouvoir formaliser ses jugements de vraisemblance sous forme d'une distribution de probabilité parce qu'il peut refuser de se conformer à une axiomatique de type savagienne (cf. Savage (1954)) ou parce qu'il considère les méthodes d'encodage disponibles comme longues et fastidieuses (sur ces méthodes d'encodage de croyances sous forme de distribution de probabilité, voir Spetzler et von Holstein (1973)). On peut représenter graphiquement l'information dont on dispose en mettant en abscisse l'échelle monétaire et en ordonnée une représentation numérique des jugements de vraisemblance du décideur satisfaisant aux contraintes :

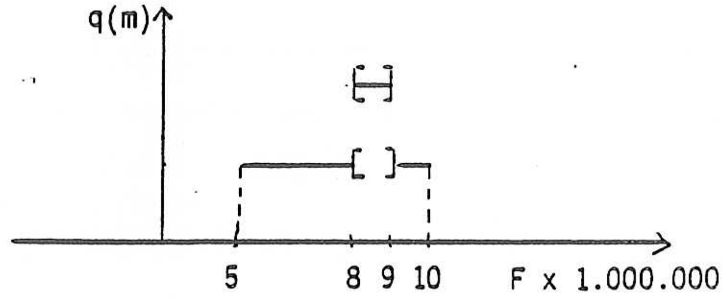
$\forall$ x, x' $\in$ [8 000 000, 9 000 000]

$\forall$ y, y' $\in$ [5 000 000, 8 000 000[$\cup$]9 000 000, 1 000 000]

q(x) > q(y)

q(y) = q(y')

q(x) = q(x')



Une façon d'interpréter une telle évaluation imprécise consiste à considérer qu'elle est "équivalente" à un ensemble de distribution de probabilité tel que (nous supposerons ces distributions $\mathcal{P}$ discrètes, l'intervalle entre deux échelons étant de 1 F) :

$\forall$ p $\in$ $\mathcal{P}$

p(x) = 0 $\iff$ x > 1 000 000 ou x < 500 000

p(x) = p(y) $\iff$ (x, y) $\in$ ([5 - 8[$\cup$]9, 10[)^2 ou

(x, y) $\in$ [8, 9]^2

p(x) > p(y) $\iff$ x $\in$ [8, 9] et

y $\in$ [5 - 8[$\cup$]9, 10].

Faisons remarquer de plus que si l'indépendance du sous-ensemble d'attributs entrant dans la définition de chacun des critères vis-à-vis de tous les autres est une condition nécessaire à la définition de ces critères, elle n'est en aucun cas suffisante. En particulier, si l'on adopte un critère de type espérance mathématique, une indépendance en probabilité au niveau de chaque sous-ensemble d'attributs entrant dans l'axe de signification du critère sera également nécessaire dans certains cas (cf. Théorème 5.5 de Keeney-Raiffa (1976)).

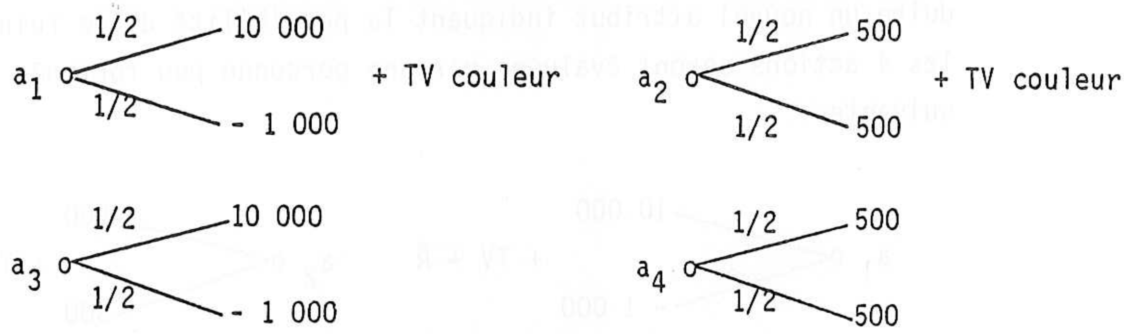
On comprend bien, dès lors, pourquoi les tenants de la théorie de l'utilité sont "troublés" par l'absence quasi-totale de référence à des notions d'indépendance dans les textes multicritères "pragmatiques", ce qui pourrait apparaître comme une grave omission. Cette différence, importante au niveau formel, ne nous apparaît cependant pas fondamentale en ce qui concerne la pratique de l'aide à la décision.

Le modèle formel de la théorie de l'utilité ayant mis à jour le rôle crucial des hypothèses d'indépendance dans la décomposition d'une fonction d'utilité globale (ou en d'autres termes dans la possibilité de bâtir des critères), la pratique des études menées à l'aide de ces concepts comprend généralement une étape de tests de ces hypothèses. Il convient cependant de remarquer (cf. Roy-Bouyssou (1983)) que ces tests constituent en fait une observation de propriétés qualitatives du système de préférence du décideur vis-à-vis du problème étudié. Une telle observation n'a de sens que si ce système de préférence pré-existe à l'étude de façon suffisamment structurée. Il est alors légitime de se demander (cf. Rappoport (1956)) si cette pré-existence du système de préférence ne rend pas caduque la tâche de l'homme d'étude. A l'inverse, si le système de préférence est supposé trop peu structuré pour permettre l'observation de telles propriétés, il est nécessaire de s'interroger sur la signification réelle des tests de ces hypothèses d'indépendance. Plus généralement, ce problème de la pré-existence du système de préférence, sur lequel nous reviendrons longuement dans les deux chapitres suivants, constitue, à notre sens, une différence cruciale entre les deux approches (nous dirons par la suite approches "descriptives" et "constructives").

Les modèles pragmatiques postulent, implicitement ou explicitement, que leur tâche est avant tout d'aider le décideur à construire une relation de préférence entre les actions et non à décrire un système de préférence préexistant, supposé suffisamment structuré, da la manière la plus fine possible. On voit donc que les hypothèses d'indépendance implicitement faites par les modèles pragmatiques travaillant à partir d'un tableau d'évaluation multicritère constituent une façon, pour l'homme d'étude, de gérer les rapports des intervenants dans le processus de décision avec ce qui leur paraît être la réalité (cf. Roy-Bouyssou (1983)). Il est de plus intéressant de constater que, à notre connaissance, la plupart des études fondées sur la théorie de l'utilité multiattribut recourent à une décomposition soit additive (cf. Keeney (1977)), soit multiplicative (Keeney et Nair (1976), Keeney (1979)) de la fonction d'utilité globale impliquant toutes deux un raisonnement toutes choses égales par ailleurs. La description détaillée fournie par Keeney (1977) d'un processus d'encodage d'une fonction d'utilité multiattribut montre bien la difficulté éprouvée par un décideur vis-à-vis des questions destinées à tester certaines hypothèses d'indépendance. Dans de nombreux problèmes d'aide à la décision, il nous semble que le système de préférence du décideur est tellement faiblement structuré que celui-ci est contraint d'utiliser un raisonnement ceteris paribus pour raisonner la comparaison d'actions sur différentes dimensions. On peut de plus remarquer que seules des décompositions de type additif et multiplicatif paraissent, dans la pratique, envisageables, toute autre décomposition impliquant, à un stade ultérieur de l'étude, de procéder à l'encodage d'une fonction d'utilité portant sur un sous-ensemble d'attributs, ce qui apparaît (cf. chapitre II) comme une tâche très délicate. On voit donc que, pour des raisons différentes, les deux approches conduisent à utiliser, pour fondement de la structuration des préférences des acteurs du processus de décision, un raisonnement toutes choses égales par ailleurs, axe de signification par axe de signification. On voit alors que l'accent mis par la théorie de l'utilité sur le test d'hypothèses d'indépendance se ramène bien souvent, dans la pratique, à un problème volontariste, pour l'homme d'étude, de définition d'axes de signification autorisant un tel raisonnement. Keeney et Raiffa (1976) (p. 51) font d'ailleurs, du caractère "décomposable" (i.e. indépendant) du système d'attributs, une de ses caractéristiques cruciales sans laquelle il est impossible de travailler.

Avec Fishburn (1977), il est alors légitime de se demander si ces deux approches ne souffrent pas du même "biais instrumental" (au sens de Roy (1979-83)) en perdant irrémédiablement le caractère fondamentalement global des jugements de préférence dans un cadre multidimensionnel. Aucun des deux modèles n'offre en effet de solutions envisageables au niveau pratique et justifiées théoriquement dans le cas d'axes de significations dépendants (ce qui était le cas dans l'exemple trivial du repas).

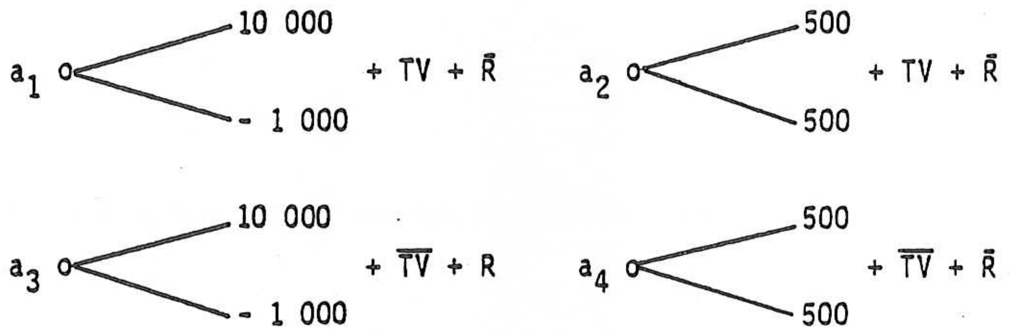
Le problème central se résume donc à la question de savoir s'il est toujours possible, face à un problème donné, de bâtir des axes de signification intelligibles et autorisant un raisonnement ceteris paribus, question à laquelle les deux modèles répondent, de façon implicite, affirmativement. Bien que les études réelles d'aide à la décision ne nous apportent que peu d'exemples où les hypothèses d'indépendance ne seraient pas vérifiées (ce qu'on pourrait interpréter comme une manifestation du biais instrumental mentionné plus haut), de nombreux chercheurs (souvent issus de l'école pragmatique) ont proposé des situations mettant en évidence leur caractère contraignant (cf. Siskos (1976), Jacquet-Lagrèze (1975a) et Fisher et Von Winterfeld (1975)). Fisher et Von Winterfeld proposent, à titre d'exemple, une situation faisant intervenir quatre actions évaluées sur deux attributs (gain monétaire et présence ou absence d'une télévision couleur) de la façon suivante :



Il n'est pas irréaliste d'avoir, dans une telle situation, a_1 P a_2 et a_4 P a_3 (où P est une relation binaire au contenu sémantique "meilleur que"). Un tel comportement peut se justifier par des considérations de bon sens dans le cas d'une personne peu fortunée pour qui une perte de 1 000 F entraînerait une ruine totale, ruine que permettrait d'éviter la possession d'une télévision couleur pouvant éventuellement être cédée. Ce raisonnement simple montre que l'attribut gain n'est pas indépendant en utilité de l'attribut télévision couleur, ce qu'on peut interpréter de deux façon distinctes dans le langage de chacune des écoles :

- la fonction d'utilité du décideur $u(c_i, c_j)$ ne peut se décomposer sous la forme $a(c_j) + b(c_j).u(c_i, \bar{c}_j)$ où c_i et c_j représentent respectivement l'attribut gain et l'attribut télévision et $\bar{c}_j$ une valeur fixée certaine sur l'attribut télévision ;
- on ne peut définir un critère sur l'attribut gain au sens de la proposition (1.1).

Roy (au travers d'avis exprimés oralement) pense qu'il est toujours possible, en réintroduisant des attributs absents des exemples proposés, de parvenir à des axes de signification indépendants. De fait, dans la plupart des exemples fictifs révélant une dépendance des attributs, il est possible d'interpréter cette dépendance comme le signe de l'omission d'un attribut important. Ainsi, dans l'exemple de Fisher et Von Winterfeld, la possibilité de la ruine du joueur et la cessibilité du poste de télévision couleur ne sont pas directement prises en compte par le système d'attributs (qui n'est donc pas exhaustif). Si l'on décide d'introduire un nouvel attribut indiquant la possibilité d'une ruine (R ou $\bar{R}$), les 4 actions seront évaluées par une personne peu fortunée de la manière suivante :



Dans cette situation, les relations a_1 P a_2 et a_4 P a_3 traduisent simplement le fait que a_3 expose le joueur à une possibilité de ruine.

Il n'est bien sûr pas possible d'analyser de façon théorique l'étendue du biais instrumental mentionné plus haut. On retiendra cependant que l'exhaustivité du système d'attribut est une condition cruciale pour parvenir à la conception d'axes de signification indépendants. Dans certains cas, l'exigence d'intelligibilité des axes de signification peut se révéler antagoniste avec l'exigence d'indépendance et l'homme d'étude doit réaliser des arbitrages délicats à ce niveau. Bâtir des axes de signification indépendants implique parfois d'intégrer, dans chaque axe, un nombre important d'attributs et, ce faisant, d'adopter des critères résultant d'une "sous-agrégation" dont le contenu concret, et donc l'intelligibilité, est faible (dans le cas d'une sous-agrégation, le critère ne s'exprime pas dans une "unité physique" simple et est souvent de type qualitatif). Keeney (1977) montre que des synergies "physiques" entre attributs peuvent faire douter de l'indépendance au sens des préférences de certaines paires d'attributs. A titre d'exemple, si deux attributs ont été retenus pour apprécier l'effet de la pollution atmosphérique sur la santé de la population ("taux de gaz toxiques/m^3" et "corps solides en suspension"), il est probable que le taux de substitution entre l'attribut "gaz toxiques" et tout autre pris en compte dans l'étude dépendra du taux de corps solides en suspension (la nocivité des gaz toxiques les plus courants peut, en effet, être affectée par les particules solides présentes dans l'air). On pourrait donc, dans cet exemple, chercher à définir un axe de signification intégrant ces deux composantes de la pollution (*) : le critère qui leur serait associé n'aurait alors pas une interprétation immédiate en termes physiques (taux de SO_2/m^3 ou kg de particules/m^3, ...) mais représenterait un indice qualitatif de "qualité de l'air". Cet élargissement du "support" (au sens de Roy (1979-83)) des axes de signification permet, nous semble-t-il, de parvenir, dans la plupart des cas concrets, à un ensemble d'axes de signification dont tous les sous-ensembles sont indépendants au sens des préférences de leurs compléments.

Le problème de l'indépendance mutuelle au sens de l'utilité est plus délicat, même si, comme nous l'avons vu à propos de l'exemple de Fisher et Von Winterfeld, la non vérification de cette condition est souvent due à l'absence d'un attribut important. L'étude de Ellis et Keeney (1972) montre que, dans certains cas, l'aversion pour le risque du décideur vis-à-vis de certains attributs peut dépendre du niveau d'autres attributs, en particulier lorsque certains d'entre eux visent à apprécier l'acceptabilité politique ou sociale des projets considérés.

Ce bref survol des problèmes liés à la conception des critères dans un cadre multidimensionnel nous a permis de constater qu'en dépit de justifications très différentes, les approches pragmatiques et axiomatiques ne différaient pas fondamentalement dans leur pratique des études. Toutes deux impliquent de pouvoir élaborer, toutes choses égales par ailleurs, un modèle de préférence par axe de signification.

(*) au travers, par exemple, d'une analyse des courbes d'indifférence entre gaz toxiques et corps solides.

C. LA NATURE DE L'INDETERMINATION

De très nombreuses typologies des situations non déterministes ont été proposées dans la littérature. Chacune d'entre elles est le reflet d'options prises au niveau de la modélisation. L'objectif de ce paragraphe ne peut pas être de dresser une liste exhaustive de toutes les sources et les formes d'indéterminations susceptibles d'être rencontrées. En effet, chaque modèle, à la suite d'un arbitrage qui peut être délicat, structure et "découpe" son environnement de façon propre, compte-tenu de ses objectifs et des outils qu'il utilise. Ainsi on verra, au chapitre II, le rôle fondamental que joue la structure d'"ensemble de mélange" (mixture set), très liée à la notion de famille de distributions de probabilité sur un ensemble en théorie de l'utilité. Il serait irréaliste et inutile de vouloir réunir toutes ces perceptions différentes dans une liste unique et exhaustive. Plus modestement, on s'efforcera de montrer comment chacune des écoles française et américaine perçoivent les phénomènes d'indétermination.

Avant cela, il convient d'insister sur le fait qu'on ne peut limiter l'insertion des phénomènes non déterministes dans le processus de modélisation à la seule étape d'évaluation des différentes actions sur un ou plusieurs attributs. La façon dont on aura réalisé cette évaluation conditionnera les phases ultérieures amenant à la prescription d'une décision (en particulier la construction du ou des critères et leur agrégation). Sur le découpage en phases du processus de modélisation en aide à la décision, voir Roy (1975) et (1979-83) chapitre 4.

La typologie classique des phénomènes non déterministes distingue trois types de situations (cf. Rizzi (1981), Fishburn (1970) et (1977)) selon "l'intensité" de l'indétermination :

- l'univers certain (ou déterminé ou à information parfaite, cf. Perrault (1973) et Rameau (1977)) ;
- l'univers aléatoire (ou risqué) ;
- l'univers incertain (ou situation d'extrême incertitude).

Dans le premier cas, chaque action est supposée pouvoir être évaluée de façon certaine. Dans le second, chaque évaluation se présente sous la forme d'une distribution de probabilité objective (que nous indentifierons à des fréquences à long terme). Au sein d'un univers incertain, on ne connait l'évaluation des actions que par référence à l'occurrence de certains événements ou "états de la nature". Selon les hypothèses que l'on estime être en droit d'effectuer sur la vraisemblance de l'occurence de ces états de la nature, cette troisième situation pourra se rapprocher de la situation de risque si l'on fait usage de probabilités subjectives (cf. Savage (1954)) ou de celle d'ignorance totale (cf. Arrow-Hurvic (1972), Jaffray-Cohen (1981)) ou encore correspondre à une situation intermédiaire (cf. Rizzi (1981), Kmietowicz-Pearman (1981) et (1982)).

Cette trichotomie est à la base de la problématique de l'école américaine. Si l'on exclut la situation d'ignorance complète, elle implique que toute forme d'indétermination peut se modéliser de façon appropriée sous la forme d'une distribution de probabilité soit "objective", soit "subjective" (sur la distinction entre ces deux notions et pour une bonne revue des problèmes liés aux fondements des probabilités, nous renvoyons à l'ouvrage de Savage (1954) et au recueil de Kyburg et Smokler (1964)).

En réaction contre cette approche, Ponsard (1974) et Roy (1982) proposent de distinguer trois sources possibles d'indéterminations dont seule la seconde serait susceptible d'une modélisation probabiliste :

- l'erreur représentant un écart à la vérité (erreurs de calcul et approximation dans la détermination d'une grandeur, biais dans les données de départ par exemple) ;
- l'incertitude traduisant un manque d'information sur des événements futurs ou sur les actions d'autrui ;
- l'imprécision inhérente au "vague" et au "flou" entourant les concepts utilisés dans la modélisation. Ainsi, lorsqu'on parle d'un attribut "temps de transport", on peut se demander à quel moment de la journée celui-ci devra être calculé (heures de pointe, heures creuses), à quelle vitesse les voyageurs se déplacent durant les correspondances, etc. (l'exemple est dû à Roy).

Ponsard (1974) estime que la trichotomie proposée par l'école américaine ne constitue qu'une sous-division de ce qu'il appelle l'incertitude et que l'erreur et l'imprécision réclament des traitements spécifiques, n'étant pas d'une nature probabiliste. Dans bien des cas, l'école américaine pense qu'il est toujours possible de négliger les facteurs d'erreur et d'imprécision en précisant la formulation du problème, en ayant recours à des experts, en recherchant l'information appropriée ou en recourrant à des analyses de sensibilité. Cependant, lorsque les phénomènes étudiés sont très mal connus ou lorsque la recherche d'information est longue et coûteuse, l'utilisation d'une modélisation de type probabiliste apparaît sujette à caution. Dans la pratique des études, les tenants de l'école américaine recourrent souvent à l'utilisation d'une loi de probabilité gaussienne dont les paramètres peuvent varier lors de l'analyse de sensibilité pour traduire la mauvaise connaissance des phénomènes étudiés. Ainsi, Keeney et Nair (1974) proposent d'appréhender le coût de construction et le coût de fonctionnement d'une centrale nucléaire sous la forme d'une loi normale dont la moyenne m est estimée par des experts et l'écart-type fixé à $m/4$. Le recours à de tels artifices est souvent rendu nécessaire lorsque le temps et les moyens manquent pour approfondir l'étude. Il est alors légitime de se demander si l'utilisation d'outils mathématiques aussi sophistiqués est conforme à l'objectif de l'homme d'étude de ne pas faire dire aux données plus que ce qu'elles contiennent. Certaines situations courantes semblent échapper complètement à l'analyse probabiliste en raison de leur nature même. A titre d'exemple, Papassiopi (1983) étudie un problème lié à l'impact de l'implantation d'une centrale nucléaire où les mesures de radioactivité effectuées varient à la fois dans l'espace (il existe plusieurs points de prélèvement autour du site) et dans le temps et sont repérées à l'aide d'appareils dont la précision est très loin d'être infinie.

De nombreux auteurs (Rizzi (1981), Watson et al (1979), Freeling (1980)) ont pris le parti de distinguer radicalement l'incertitude de l'imprécision en recourant à la théorie des sous-ensembles flous pour modéliser cette dernière. La manipulation des sous-ensembles flous et des nombres flous, si elle permet d'échapper à une logique binaire du tout ou rien, reste cependant assez sujette à caution en ce qui concerne le choix des opérateurs utilisés (cf. Thole et al (1979) et Fung et Fu (1974)) et l'encodage des fonctions d'appartenance, ce qui la rend difficilement opérationnelle.

Roy (1979-83) chapitre 8 propose une typologie des phénomènes d'indétermination en huit points portant à la fois sur la nature et leur origine. Sa classification est très dépendante de sa formalisation particulière des conséquences des actions et notamment de la présence de dimension de préférence où les échelons sont rangés selon un préordre complet. On peut l'adapter schématiquement en distinguant :

a) L'imprécision et les erreurs dues aux calculs effectués et au manque de fiabilité des données utilisées. Dans le domaine économique par exemple, Morgenstern (1950) montre bien qu'on ne peut avoir, dans la plupart des données, qu'une confiance relative. Ce qu'il montre aux niveaux des comptes d'une nation reste vrai au niveau de ceux d'une entreprise et tout spécialement en ce qui concerne l'estimation des prix de revient.

b) L'imprécision inhérente à l'usage d'attributs qualitatifs pour lesquels la perception de contrastes entre différentes situations (fort, moyen) n'est pas toujours claire.

c) L'imprécision due au flou entourant la définition des attributs : le taux de change du jour entre le Franc et le Dollar peut être évalué à différents moments de la journée par référence aux transactions en bourse ou aux transactions interbancaires et sur différentes places financières, etc.

d) L'incertitude qui entoure les conséquences futures et/ou inconnues des actions : comment évaluer dans 10 ans le salaire horaire d'un ouvrier non qualifié qui travaillera dans l'usine dont la construction est projetée ?

e) L'incertitude résultant de l'occurence de certains phénomènes aléatoires dont les lois de probabilité sont connues (pluviométrie pour un problème agricole, taux de malfaçons dans un processus de fabrication).

f) L'imprécision issue d'avis contradictoires (divergences d'experts).

g) L'incertitude concernant les conséquences influencées par l'attitude d'autres acteurs (situation concurrentielle, survenance d'une réglementation gouvernementale, d'une grève, d'un procès, etc.).

h) L'incertitude due à la nécessité d'évaluer les actions par référence à divers scénarios ou "états de la nature".

La multiplicité des sources possibles d'indétermination laisse à penser qu'il est souvent souhaitable de ne pas s'en tenir exclusivement à une modélisation probabiliste (points a, b, c notamment). Dans la majorité des cas, on peut cependant exploiter l'information pour établir une modulation ordinale de la vraisemblance des conséquences possibles. Il convient de rappeler que si la prise en compte de l'indétermination est nécessaire en Recherche Opérationnelle (cf. A.3), l'objectif final de l'homme d'étude reste d'emporter la conviction du décideur et de se convaincre lui-même. Il ne s'agit donc pas de viser à tout prix à un inventaire et à un traitement exhaustif de l'erreur, l'incertitude et l'imprécision, même si le fait de garder une certaine prudence dans l'évaluation peut être un élément déterminant aux yeux de l'homme d'étude.

Il apparaît que le type de modélisation choisie est souvent très dépendant de la personnalité même du décideur et de sa culture. Ainsi, de nombreux indices relevés dans les études empiriques américaines laissent à penser que la notion de probabilité est beaucoup mieux intégrée dans les "moeurs décisionnelles" aux Etats-Unis qu'en Europe et, en particulier, en France. Il est d'autre part incontestable que la prise de conscience du caractère aléatoire de certains phénomènes constitue un grand progrès dans la gestion à long terme des entreprises qui a longtemps été fondée sur des prévisions déterministes. Comme nous l'avons déjà mentionné, ce sont les pratiques d'aide à la décision dans leur ensemble, immergées dans un contexte décisionnel et culturel, auxquelles il faut s'intéresser avant de pouvoir porter un jugement sur des considérations techniques.

En résumé, on peut mettre en évidence certaines situations pour lesquelles une modélisation probabiliste semble peu appropriée, même si l'on suppose le décideur prêt à se conformer à un type de rationalité savagienne et à se plier à des méthodes d'encodage. L'école américaine pense qu'il est toutefois possible d'en rendre compte de toute façon à l'aide de distributions de probabilités très générales sur lesquelles on procède à des analyses de sensibilité. L'école française estime devoir les traiter de façon spécifique et récuse l'usage unique de distributions de probabilités. Cette opposition au niveau de la forme de l'évaluation des composantes $x_i(a)$ traduit en fait des options radicalement différentes tout au long de la modélisation.

La différence tangible entre les deux approches concernant la construction d'un critère est le reflet et la conséquence de toute une série d'options dont le rapport avec les phénomènes non déterministes n'est pas toujours direct. Eclaircir ce point précis suppose donc de passer en revue, de façon détaillée, chacune des approches. C'est ce que s'efforceront de faire les deux chapitres suivants.

C H A P I T R E I I

UNE DEMARCHE DESCRIPTIVE D'AIDE A LA DECISION : LES METHODES FONDEES SUR LA THEORIE DE L'UTILITE

Il est d'usage de faire remonter à 1738, avec la formulation puis la "résolution" du paradoxe de St Pétersbourg par D. Bernouilli, l'apparition des concepts utilisés en théorie de l'utilité. Celle-ci a connu, après sa formulation par Ramsey (1931) et Von Neumann-Morgenstern (1947), un développement considérable, tant au niveau théorique que dans ses applications à diverses sciences sociales (voir les abondantes bibliographies de Fishburn (1968) et Schoemaker (1981)). Conformément à notre objectif de départ, nous ne nous préoccuperons ici que de ses applications à l'aide à la décision.

La vocation première de la théorie de l'utilité était une analyse purement formelle des décisions en avenir incertain dans le cadre de la théorie des jeux. En tant que telle, son contenu opératoire était nul en matière d'aide à la décision. Cette théorie formelle a ensuite servi de point d'appui à diverses modélisations et notamment en aide à la décision. L'analyse du passage de la théorie de l'utilité à des pratiques d'aide à la décision s'en réclamant mériterait, à notre sens, une étude approfondie. Il nous semble, en effet, que ce "glissement" n'était pas naturel a priori. Sa genèse doit peut-être être recherchée dans la volonté des économistes (cf. Mosteller et Nogee (1951)) de tester expérimentalement la possibilité de mesurer une fonction d'utilité définie à une transformation linéaire près, ravivant ainsi d'anciennes controverses sur la nature et l'existence de l'utilité (sur ces controverses, voir Stigler (1950)). Keeney (1981) fait remonter au début des années 1960 les premières applications de la théorie de l'utilité en vue de l'aide à la décision sous le nom de "théorie statistique de la décision appliquée" (cf. Raiffa, Schlaifer (1961)), l'appellation "Decision Analysis" apparaissant en 1966 (Howard (1966)). Ces pratiques, tout en se fondant sur la théorie formelle que nous passerons brièvement en revue au A), ne peuvent s'y réduire entièrement comme nous l'avons vu au I.A.2. L'objet de la deuxième section de ce chapitre sera donc de s'interroger sur ce type de modèle d'aide à la décision en référence à la théorie qui le sous-tend mais aussi aux modèles concurrents proposés par l'école pragmatique.

A. UN APERCU DU MODELE FORMEL DE LA THEORIE DE L'UTILITE

Avant d'aborder l'étude de la "Decision Analysis", il nous faut, dans un premier temps, passer en revue quelques points saillants de la théorie de l'utilité. Il s'agira ici de donner les principaux résultats théoriques utiles pour comprendre le fonctionnement du modèle d'aide à la décision et non d'aborder directement l'aspect technique de ces théorèmes de représentation.

1. Le modèle de base en situation de "risque"

Depuis l'ouvrage de Von Neumann-Morgenstern (1947), de très nombreuses versions de théorèmes de représentation, garantissant l'existence d'une fonction d'utilité se prêtant à des calculs d'espérance mathématique et définie à une transformation linéaire près, ont été proposés (cf. Herstein, Milnor (1953), Marshak (1950), Samuelson (1950), Jensen (1967), Fishburn (1970), ...). Elles diffèrent à la fois par le système d'axiomes proposé et certains détails techniques. Retenir l'une d'entre elles relève d'un choix assez subjectif s'efforçant de concilier la clarté du théorème et sa généralité.

Soit X un ensemble fini (nous renvoyons le lecteur à Fishburn (1970) pour ce qui concerne les conséquences techniques de l'abandon de cette hypothèse). Une mesure de probabilité sur X est une fonction p à valeur dans $[0, 1]$ définie sur $\mathcal{P}(X)$ (ensemble des parties de X) telle que :

- $p(A) \geq 0 \quad \forall \; A \in \mathcal{P}(X)$ (2.1)
- $p(X) = 1$ (2.2)
- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) \quad \forall \; A, B \in \mathcal{P}(X)$ tels que $A \cap B = \emptyset$. (2.3)

On peut, à deux mesures p et q, associer une mesure $\alpha p + (1 - \alpha) q$ avec $\alpha \in [0, 1]$ qui associe, à chaque élément A de $\mathcal{P}(X)$, une valeur $\alpha p(A) + (1 - \alpha) q(A)$. Il est facile de montrer que $\alpha p + (1 - \alpha) q$ vérifie (2.1), (2.2) et (2.3). Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des mesures de probabilité sur X.

Le but d'un théorème de représentation est de trouver une fonction u de X à valeur réelle "rendant compte" d'une relation binaire (de préférence) P dans $\mathcal{P}$ de la façon suivante : $\forall (p, q) \in \mathcal{P}$

$$p \, P \, q \iff E(u, p) > E(u, q) \qquad (2.4)$$

où $E(u, p) = \sum_{x \in X} p(x) \, u(x)$.

Il s'agit donc de trouver une fonction d'utilité telle que l'espérance d'utilité des diverses mesures de probabilités les classe comme la relation de préférence. Fishburn (1970) ou (1982) prouve le théorème suivant :

<u>Théorème 2.1</u> : Il existe une fonction u de X sur $\mathbb{R}$ vérifiant (2.4) si et seulement si P vérifie :

A_1 : P est une relation binaire asymétrique et négativement transitive.

A_2 : $p \, P \, q \Rightarrow \alpha p + (1 - \alpha) r \, P \, \alpha q + (1 - \alpha) r \quad \forall \alpha \in]0, 1[\quad \forall p, q, r \in \mathcal{P}$.

A_3 : $p \, P \, q$ et $q \, P \, r \Rightarrow \exists \, \alpha, \beta \in]0, 1[\times]0, 1[$ tel que $\alpha p + (1 - \alpha) r \, P \, q$ et $q \, P \, \beta p + (1 - \beta) r$.

De plus, si u vérifie (2.4), alors une fonction v vérifie (2.4) ssi $\exists \, a > 0$ et b tels que $v(x) = a \, u(x) + b \quad \forall x \in X$.

L'axiome A_1 implique la transitivité de P ainsi que celle de la relation I définie par $p \, I \, q$ ssi non $p \, P \, q$ et non $q \, P \, p$. A_2 traduit une indépendance de la préférence vis-à-vis de "dilution" probabiliste. L'axiome A_3 est une condition "archimédienne" (cf. Von Neumann-Morgenstern

(1953), p. 630) interdisant l'existence de mesures de probabilité "infiniment" préférée (ou détestée) à toute autre.

Une généralisation immédiate du théorème 2.1 consiste à définir la relation de préférence sur un "ensemble de mélange" ("mixture set", cf. Herstein, Milnor (1953)) dont l'interprétation concrète reste cependant très proche d'un ensemble de mesures de probabilité sur un ensemble. Formellement, un ensemble $\mathcal{M}$ est un ensemble de mélange si, à chaque élément p et q de $\mathcal{M}$, on peut associer, pour tout $\alpha \in [0, 1]$, un élément de $\mathcal{M}$: $\alpha\, p + (1 - \alpha)\, q$ de sorte que (*) :

$$1\, p + (1 - 1)\, q = p \tag{2.6}$$
$$\alpha\, p + (1 - \alpha)\, q = (1 - \alpha)\, q + \alpha\, p \tag{2.7}$$
$$\alpha(\beta\, p + (1 - \beta)\, q) + (1 - \alpha)\, q = \alpha\, \beta\, p + (1 - \alpha\, \beta)\, q \tag{2.8}$$

On a :

<u>Théorème 2.2</u> (Fishburn (1970)) : Soit $\mathcal{M}$ un ensemble de mélange et P une relation binaire dans $\mathcal{M}$. Il existe une fonction u à valeurs réelles telle que : $\forall\ (p, q) \in \mathcal{M}^2 \quad \forall\ \alpha \in [0, 1]$

$$- \ p\ P\ q \iff u(p) > u(q) \tag{2.9}$$
$$- \ u(\alpha\, p + (1 - \alpha)\, q) = \alpha\, u(p) + (1 - \alpha)\, u(q) \tag{2.10}$$

ssi P vérifie A_1, A_2, A_3.

2. Le statut descriptif des axiomes du modèle de base

Une très abondante littérature a étudié, au travers d'expériences ou d'observations de comportements réels, le statut descriptif des axiomes du modèle de base. Nous nous limiterons, dans cette section, à la discussion du réalisme descriptif des axiomes dans une optique "descriptive"

(*) Nous renvoyons le lecteur à Fishburn et Roberts (1978) ou Fishburn (1982) pour une généralisation de cette notion autorisant également la construction d'une fonction d'utilité linéaire.

(cf. section B), c'est-à-dire en ne remettant pas en cause la possibilité même de l'existence d'une relation de préférence entre loteries ou la possibilité d'assimiler des actions réelles à des loteries (au contraire d'une action "réelle", une loterie peut, en effet, être considérée comme une action "idéale" au sens où elle est <u>parfaitement</u> déterminée par sa distribution de probabilité sur l'ensemble des conséquences (cf. Roy (1979-1983), chapitre 9)). La plupart des expérimentations décrites ici se placent précisément dans des situations où la nature des loteries (probabilités simples) et de l'attribut (argent le plus souvent) rendent cette existence la moins sujette à caution a priori (voir B.4 cependant). Nous reviendrons sur ce point au B tout en mentionnant par avance qu'il a certainement, pour le modèle d'aide à la décision, des conséquences plus dommageables que les critiques descriptives de cette sous-section. La plupart de ces études descriptives laissent penser que les axiomes du modèle formel sont rarement respectés par des individus émettant des jugements de préférences sur des distributions de probabilité sur un attribut. Notons cependant que cette constatation n'implique pas, comme nous le verrons au B, de renoncer à une utilisation prescriptive (voire normative) de ces axiomes. De nombreux auteurs concluent au contraire, de cet état de fait, qu'il est d'autant plus nécessaire d'aider les décideurs au travers d'études formelles fondées sur ces axiomes. MacCrimmon et Larsson (1979), p. 346-347 et Schoemaker (1982) montrent cependant que les violations descriptives des axiomes peuvent être "fondamentales" au point de rendre toute perspective, normative ou prescriptive, inutile et irréaliste.

Pendant longtemps, les études empiriques se sont limitées à l'appréciation du réalisme descriptif de l'axiome d'indépendance A_2 à la suite de Allais (1953). La situation connue sous le nom de paradoxe d'Allais consiste à demander à un décideur d'effectuer deux choix entre des "loteries" aux conséquences monétaires :

1er choix : a_1 ——————— 100 Millions

ou : a_2
- .1 —— 500 Millions
- .89 —— 100 Millions
- .01 —— 0

$$\text{2e choix : } a_3 \begin{cases} \xrightarrow{.11} \text{100 Millions} \\ \xrightarrow{.89} 0 \end{cases}$$

$$\text{ou : } a_4 \begin{cases} \xrightarrow{.1} \text{500 Millions} \\ \xrightarrow{.9} 0 \end{cases}$$

De nombreuses études expérimentales (Allais (1953), McCrimmon et Larsson (1979), Slovic et Tversky (1974), McCrimmon (1968), Jaffray et Cohen (1979) pour une expérience semblable et la bibliographie de Schoemaker (1980) ou (1982)) montrent qu'une proportion importante des sujets préfèrent a_1 à a_2 et a_4 à a_3. Ce comportement entre en contradiction avec l'axiome A_2. En effet, soit a_5 et a_6 les deux actions suivantes

$$a_5 \begin{cases} \xrightarrow{10/11} \text{500 Millions} \\ \xrightarrow{1/11} 0 \end{cases} \qquad \text{et } a_6 \xrightarrow{\quad 1 \quad} 0$$

On a :

$$\begin{aligned} a_1 &= 0,11\ a_1 + 0,89\ a_1 \\ a_2 &= 0,11\ a_5 + 0,89\ a_1 \\ a_3 &= 0,11\ a_1 + 0,89\ a_6 \\ a_4 &= 0,11\ a_5 + 0,89\ a_6 \end{aligned}$$

On sait (cf. Fishburn (1970)) qu'en présence de A_1 et A_3, on peut remplacer la simple implication de l'axiome A_2 par une double implication, d'où :

$$a_1 \ P\ a_2 \Rightarrow a_1 \ P\ a_5 \quad \text{et} \quad a_4 \ P\ a_3 \Rightarrow a_5 \ P\ a_1.$$

Ce paradoxe a été diversement interprété (Savage (1954), Raiffa (1968), Morrison (1967), McCrimmon (1968), Slovic et Tversky (1974), McCrimmon et

Larsson (1979)) quant à ses implications normatives mais son existence n'est pas contestée.

L'axiome A_1 fait de (P, I) un préordre complet (encore une fois, le problème de la signification et de l'existence de cette relation est différé jusqu'à la deuxième partie de ce chapitre). L'irréalisme attaché à la transitivité de l'indifférence, impliquant des capacités cognitives hors du commun, a été mis en relief par de nombreux auteurs (exemple de la tasse de café de Luce (1956), Armstrong (1949), Roy (1978) et (1979-1983)). La transitivité de la relation P semble être plus "naturelle". Tversky (1969) montre cependant qu'on peut expérimentalement obtenir des préférences cycliques, ces intransitivités n'étant pas dues à des "erreurs" aléatoires puisque pouvant être prédites et reproduites. Nous renvoyons à Burros (1974) pour une analyse critique de l'argument de la "pompe à argent" classiquement utilisé (cf. Raiffa (1968)) pour supposer la transitivité de P et I.

Roy (1979-1983) montre de plus qu'il est souvent irréaliste de supposer la complétude de P et I et montre l'intérêt de distinguer de I, l'incomparabilité, révélant non une indifférence mais un refus ou une incapacité de choisir (voir également Vincke (1981) et Jaffray et Cohen (1982) (*) pour des études empiriques révélant des incomparabilités). Dans ce cadre des intransitivités du type $a\ P\ b$, $b\ P\ c$ et non $a\ P\ c$ où a et c sont incomparables ne sont pas choquantes. Il convient également de ne pas négliger des possibilités d'hésitation entre P et I traduisant une préférence faible.

De nombreux exemples ont été proposés pour montrer le caractère contraignant de l'axiome archimédien A_3. Thrall (1954) propose la situation suivante où trois actions sont en jeu :

a_1 : gagner une punaise,
a_2 : gagner deux punaises,
a_3 : être pendu au coucher du soleil.

(*) Pour une étude plus récente, on pourra se reporter à Cohen et al (1983).

Pour la plupart des personnes, on aura $a_2 \; P \; a_1 \; P \; a_3$. On peut légitimement douter de l'existence d'une probabilité α telle que

$$\alpha \; a_2 + (1 - \alpha) \; a_3 \; P \; a_1.$$

Il convient cependant de remarquer que ce refus de risquer la mort au cours d'un "jeu" n'empêche pas ces mêmes personnes de conduire une voiture ou de monter en avion, situations où la probabilité de décès, quoique faible, n'est pas nulle (cf. Fishburn (1970)).

Nous renvoyons d'autre part le lecteur à Tversky (1977), Kahneman et Tversky (1979) et Tversky et Kahneman (1974) pour ce qui concerne la mise à jour de nombreux "biais cognitifs" dans la perception des conséquences et des probabilités interférant avec le respect des axiomes A_1, A_2 et A_3.

3. Les extensions du modèle de base

De nombreuses généralisations des théorèmes 2.1 et 2.2 ont été proposées dans la littérature dont on pourra trouver une synthèse dans Fishburn (1979) et (1982) pour répondre aux nombreuses critiques qu'ont suscité les axiomes A_1, A_2 et A_3.

Aumann (1962) affaiblit l'axiome A_1 en supposant que la relation (P, I) ne constitue qu'un préordre partiel (réflexif et transitif) et montre qu'on peut obtenir une représentation à "sens unique" ("one-way expected utility") :

$$p \; P \; q \Rightarrow E(u, p) > E(u, q) \quad \forall \; (p, q) \in \mathcal{M} \qquad (2.11)$$

$$p \; I \; q \Rightarrow E(u, p) = E(u, q) \qquad (2.12)$$

Fishburn (1970), chapitre 9 montre que la relation (2.11) peut être obtenue avec un "ordre partiel strict" (P irréflexive transitive, I n'est donc plus transitive).

Vincke (1980a) montre qu'il est possible d'obtenir une représentation à "double sens" lorsque (P, I) est un quasi-ordre (cf. Luce (1956)). Son résultat se généralise au cas d'une structure plus complexe incluant deux seuils de discrimination : le pseudo-ordre.

Définition 2.3 : Un couple (I, P) de relations binaires sur un ensemble X constitue un quasi-ordre si et seulement si :

- $\forall (a, b) \in X$: a I b ou a P b ou b P a (ou exclusif) ;
- I est réflexive : a I a $\forall a \in X$;
- $\forall a, b, c, d \in X^4$: a P b, b I c, c P d $\Rightarrow$ a P d (P I P $\subset$ P) ;
- $\forall a, b, c, d \in X^4$: a P b, b P c, a I d $\Rightarrow$ non d I c ($P^2 \cap I^2 = \emptyset$).

Monjardet (1978) montre l'équivalence entre de nombreuses définitions du quasi-ordre proposées dans la littérature. La définition 2.3 est équivalente aux définitions "duales" (au sens de Monjardet) utilisées généralement par les auteurs américains (Scott et Suppes (1958), Fishburn (1970)).

Définition 2.4 (cf. Roy (1979-1983), chapitre 7, Roy et Vincke (1982), Vincke (1980b) : Un triplet de relations (I, Q, P) sur un ensemble X est un pseudo-ordre ssi :

- (I, $\succ$) est un quasi-ordre
- (J^S, P) est un quasi-ordre

$\forall$ a, b, c, d $\in$ X

- a P b, b I c, c Q d $\Rightarrow$ a P d : P I Q $\subset$ P
- a Q b, b I c, c P d $\Rightarrow$ a P d : Q I P $\subset$ P
- a P b, b Q c, c I d $\Rightarrow$ a P d : P Q I $\subset$ P
- a I b, b Q c, c P d $\Rightarrow$ a P d : I Q P $\subset$ P

avec a $\succ$ b ssi a Q b ou a P b
a J^S b ssi a Q b ou b Q a ou a I b.

Théorème 2.5 : Si (I, P, Q) est un pseudo-ordre sur X, la relation S définie par a S b (Vincke(1980b)) ssi $\forall c \in X$:

$c\ Q\ a \Rightarrow c \succ b$
$c\ P\ a \Rightarrow c\ P\ b$
$b\ Q\ c \Rightarrow a \succ c$
$b\ P\ c \Rightarrow a\ P\ c$

est un préordre complet (relation transitive et complète).

La relation $\bar{\bar{S}}$ définie par $a\ \bar{\bar{S}}\ b$ ssi $a\ S\ b$ et non $b\ S\ a$ $\forall\ a, b \in X$ est un ordre faible (asymétrique et négativement transitive).

La relation $\overset{\circ}{S}$ définie par $a\ \overset{\circ}{S}\ b$ ssi $a\ S\ b$ et $b\ S\ a$ $\forall\ (a, b) \in X$ est une relation d'équivalence (réflexive, symétrique, transitive).

On a :

<u>Théorème 2.6</u> (*) : Soit (I, Q, P) un triplet de relations binaires sur un ensemble de mélange $\mathcal{M}$. Il existe trois fonctions u, λ, σ sur $\mathcal{M}$ à valeurs réelles telles que $\forall\ (a, b) \in \mathcal{M}^2$, $\forall\ \alpha \in [0, 1]$:

1) $a\ P\ b \Leftrightarrow u(b) + \sigma(b) < u(a)$ (2.13)
2) $a\ Q\ b \Leftrightarrow \begin{cases} u(b) + \lambda(b) < u(a) \\ u(b) + \sigma(b) \geq u(a) \end{cases}$ (2.14)
3) $a\ I\ b \Leftrightarrow \begin{cases} u(a) + \lambda(a) \geq u(b) \\ u(b) + \lambda(b) \geq u(a) \end{cases}$ (2.15)
4) $a\ \overset{\circ}{S}\ b \Leftrightarrow u(a) = u(b)$ (2.16)
5) $0 \leq \lambda(a) \leq \sigma(a)$ (2.17)
6) $u(a) > u(b) \Rightarrow u(a) + \sigma(a) \geq u(b) + \sigma(b)$ et (2.18 a)
$u(a) + \lambda(a) \geq u(b) + \lambda(b)$ (2.18 b)
7) $u(a) = u(b) \Rightarrow u(a) + \sigma(a) = u(b) + \sigma(b)$ (2.19 a)
$u(a) + \lambda(a) = u(b) + \lambda(b)$ (2.19 b)
8) $u(\alpha\ a + (1 - \alpha)\ b) = \alpha\ u(a) + (1 - \alpha)\ u(b)$ (2.20)

si et seulement si $\forall\ (a, b, c, d) \in \mathcal{M}^4$:

(*) Vincke (1977b) démontre un théorème similaire mais légèrement différent dans le cadre plus général des quasi-ordres généralisés définis dans Vincke (1976) ou (1977a).

P_1 : (I, Q, P) est un pseudo-ordre sur $\mathcal{M}$.

P_2 : $a \overset{\circ}{S} b \Longleftrightarrow \frac{1}{2} a + \frac{1}{2} c \overset{\circ}{S} \frac{1}{2} b + \frac{1}{2} c$.

P_3 : $b\ P\ a \Longrightarrow \exists\ a'$ tel que $\begin{cases} a'\ Q\ a \text{ ou } a'\ I\ a \\ \text{non } a'\ S\ d \Longrightarrow d\ P\ a \quad \forall\ d \in \mathcal{M} \end{cases}$

P_4 : $b\ Q\ a \Longrightarrow \exists\ a''$ tel que $\begin{cases} a''\ I\ a \\ \left.\begin{array}{l} \text{non } a''\ S\ d \text{ et} \\ \text{non } d\ P\ a \end{array}\right\} \Longrightarrow d\ Q\ a \quad \forall\ d \in \mathcal{M} \end{cases}$

P_5 : $\{\alpha \ /\ c\ S\ \alpha\, a + (1 - \alpha)\, b\}$ et $\{\alpha \ /\ \alpha\, a + (1 - \alpha)\, b\ S\ c\}$

sont des ensembles fermés.

La démonstration de ce théorème figure à l'annexe 2.

On a de plus :

<u>Théorème 2.9</u> : Si u, λ, σ vérifient les conditions (2.13)-(2.20) du théorème 2.8, alors les trois fonctions v, λ', σ' vérifient (2.13)-(2.20) si et seulement si $\exists\ m \in \mathbb{R}^{*+}$ et $n \in \mathbb{R}$ tels que, $\forall\ x \in \mathcal{M}$:

$$v(x) = m\, u(x) + n \tag{2.23}$$
$$\lambda'(x) = m\, \lambda(x) \tag{2.24}$$
$$\sigma'(x) = m\, \sigma(x) \tag{2.25}$$

<u>Démonstration</u> : Il est facile de montrer que si v, λ' et σ' vérifient (2.23), (2.24) et (2.25), elles vérifient également (2.13)-(2.20). Supposons que u, λ, σ et v, λ', σ' vérifient (2.13)-(2.20) et donc P_1-P_5 sont satisfaits.

u est telle que :

$$u(\alpha\, a + (1 - \alpha)\, b) = \alpha\, u(a) + (1 - \alpha)\, u(b) \quad \forall\ (a, b) \in \mathcal{M},\ \forall\ \alpha \in [0, 1]$$

$$u(a) > u(b) \Longleftrightarrow a\ \bar{S}\ b$$

v vérifiant aussi ces deux conditions, on sait (cf. théorème 2.2) qu'il existe deux réels m et n avec $m > 0$ tels que :

$$v(a) = m\, u(a) + n \quad \forall\, a \in \mathcal{U}$$

On a de plus :

$$\sigma(a) = u(a') - u(a) \quad \text{si } a' \text{ existe}$$
$$\sup_{c \in \mathcal{U}} u(c) - u(a) \quad \text{sinon}$$

et
$$\sigma'(a) = v(a') - v(a) \quad \text{si } a' \text{ existe}$$
$$\sup_{c \in \mathcal{U}} v(c) - v(a) \quad \text{sinon}$$

Si a' existe : $\sigma'(a) = v(a') - v(a) = m(u(a') - u(a)) = m\,\sigma(a)$. Si a' n'existe pas : $\sigma'(a) = \sup_{c \in \mathcal{U}} v(c) - v(a) = m(\sup_{c \in \mathcal{U}} u(c) - u(a)) = m\,\sigma(a)$.

La démonstration est identique pour $\lambda'(a) = m\,\lambda(a)$.

C.Q.F.D.

Les structures de quasi-ordre et de pseudo-ordre autorisent des généralisations théoriques intéressantes. Certains exemples permettent toutefois de montrer qu'elles peuvent être inadaptées dans un contexte de choix entre distributions de probabilités. Fishburn (1968') propose la situation suivante où p, q, s, r sont des distributions de probabilités sur une échelle monétaire (cf. également Fishburn (1970) et (1970')).

$p(100\ \$) = 1 \qquad s(40\ \$) = s(200\ \$) = 0{,}5$

$q(100\ \$) = 1 \qquad r(102\ \$) = 1.$

Il est raisonnable de penser que $r\ P\ q\ P\ p$, sans pour autant que le décideur ait de préférence claire entre r et s d'une part et p et

s d'autre part. On pose : $r \, I \, s$ et $s \, I \, p$. Dans cette situation, l'axiome $P^2 \cap I^2 = \emptyset$ de la définition du quasi-ordre est violé. Il suffit de remplacer P par $\succ$ dans cet exemple pour l'appliquer au pseudo-ordre (dans un pseudo-ordre, $(I, \succ)$ est un quasi-ordre).

L'abandon de l'axiome archimédien A_3 (ou de son correspondant H_2 (*)) implique de renoncer à une fonction d'utilité linéaire à valeur dans $\mathbb{R}$. Hausner (1954) montre qu'il est possible, dans ce cas, de parvenir à une représentation lexicographique (avec un axiome d'indépendance plus strict et une condition structurelle supplémentaire sur l'ensemble de mélanges en faisant un "espace de mélanges") du type :

$$p \, P \, q \iff (u_1(p), u_2(p), \ldots, u_n(p)) <^L (u_1(q), u_2(q), \ldots, u_n(q))$$

avec $u_i(\alpha \, p + (1 - \alpha) \, q) = \alpha \, u_i(p) + (1 - \alpha) \, u_i(q) \quad \forall \, i \in \{1, \ldots, n\}$ où $<^L$ représente la relation lexicographique classique entre deux vecteurs. Thrall (1954) donne des exemples de situations où une telle représentation lexicographique s'impose ; Fishburn (1971), (1974) et Skala (1975) développent diverses axiomatisations aboutissant à une représentation lexicographique incluant des fonctions d'utilités linéaires.

Samuelson (1952) a montré le rôle crucial de l'axiome d'indépendance dans l'obtention d'une fonction d'utilité linéaire. Machina (1982) montre cependant qu'en l'absence de l'axiome d'indépendance, on peut conserver une linéarité "locale". Son argument repose sur l'existence d'une fonction différentiable représentant des préférences sur un ensemble de distributions de probabilité (l'existence de cette fonction nécessite bien sûr une complète comparabilité transitive). De cette différentiabilité découle une "linéarité locale". En d'autres termes, un décideur ne respectant pas l'axiome d'indépendance mais possédant une fonction de préférence différentiable évalue des changements différentiels dans une distribution de probabilité comme s'il calculait une espérance d'utilité. Fishburn (1982') et (1983) donne une analyse axiomatique détaillée de situations excluant l'axiome d'indépendance.

(*) Cf. Annexe 2.

4. La situation d'incertitude

A la différence de la situation de "risque" (cf. 1), l'évaluation des conséquences de la mise à exécution des actions ne peut être appréciée, en situation d'incertitude, que par référence à l'occurence d'"états de la nature" à propos de laquelle on ne dispose pas d'une distribution de probabilité objective. Savage (1954, p. 8 et ss.) définit la "nature" en tant qu'"objet des préoccupations" du décideur, chaque "état" (de la nature) fournissant une description complète des aspects, ou caractéristiques, de l'environnement (la nature). Dans ce cadre, on peut représenter un problème décisionnel sous la forme d'un tableau dont les lignes représentent les différentes actions a_i pouvant être entreprises et les colonnes les états de la nature S_j susceptibles de se réaliser. Dans chaque case C_{ij} figurent les conséquences de la mise à exécution de l'action a_i si l'état S_j se réalise. Dans la plupart des modèles classiques (voir cependant Luce et Krantz (1971), Balch (1974) et Balch et Fishburn (1974)), on considère que la décision n'influe pas sur l'occurence des états de la nature. Un exemple simple de ce type de décision est un jeu donnant droit à un prix de 10 F si l'on devine le temps qu'il fera le lendemain à une heure précise et dans un endroit déterminé. Ici, le "temps" (à l'heure et au lieu dit) représente la "nature" dont on suppose que les seuls états possibles sont : ensoleillé, nuageux, pluvieux. La décision peut se représenter alors sous la forme du tableau :

Tableau II.A.4.1

Etat de la nature

Decision	Soleil	Nuages	Pluie
Soleil	10	0	0
Nuages	0	10	0
Pluie	0	0	10

Ce type de situation a reçu des traitements assez divers dans la littérature, oscillant entre deux extrêmes :

- l'ignorance totale (Arrow et Hurwic (1982), Jaffray et Cohen (1981)) où l'on suppose que le décideur ne dispose d'aucune information concernant la survenance des divers états de la nature ;

- l'approche "savagienne" (cf. Savage (1954)) qui, au travers d'une axiomatique portant sur la relation de préférence entre les décisions (vues comme des fonctions associant à chaque état une conséquence), permet d'expliciter une loi de probabilité unique sur les états et une fonction d'utilité sur l'ensemble des conséquences en accord avec la règle de l'utilité espérée.

De nombreux auteurs ont exploré par ailleurs des modèles correspondant à une situation intermédiaire en supposant l'existence d'une relation de plausibilité entre états de la nature ou sur un sous-ensemble de l'ensemble des parties de cet ensemble (Rizzi (1982) et (1983), Fourgeaud, Lenclud et Sentis (1968), Egle et Munier (1978)) ou, de façon liée, en pensant le décideur capable de classer les probabilités affectées aux divers états (Kmietowicz et Pearman (1981) et (1982) et Fishburn (1964)). Cependant, depuis l'ouvrage de Savage (1954), la majorité des efforts des théoriciens s'est concentrée sur ce type de modèles dont sont directement issues les méthodes d'aide à la décision de l'"école américaine". C'est pourquoi nous n'aborderons pas plus avant dans cette section les modélisations se référant à l'"ignorance totale" ou à l'"incertitude partielle", nous contentant de décrire brièvement les principales caractéristiques de la théorie d'inspiration savagienne.

La complexité formelle de cette théorie est nettement supérieure à celle des modèles passés en revue à la section 2. La synthèse récente de Fishburn (1981) montre bien la diversité et le raffinement des méthodes utilisées. Le traitement axiomatique de Savage (1954), bien que le plus ancien et souffrant de certaines limitations structurelles, reste cependant, à bien des égards, le plus facilement interprétable ; c'est celui que nous avons choisi de présenter brièvement. Comme le montre Fishburn (1981), la plupart des modèles théoriques proposés depuis lors visent à relacher certaines des contraintes structurelles de la théorie savagienne (ensemble des états de la nature infini, tous les sous-ensembles d'états de la nature admissibles, problème des "actes constants") mais souvent au prix de difficultés techniques et de problèmes d'interprétation importants. Mentionnons simplement que Anscombe et Aumann (1963) et Pratt, Raiffa et Schlaifer (1964) et (1965) ont proposé une alternative simple à la théorie savagienne, fondée sur la prise en compte de probabilités "extérieures" au problème constituant un "instrument de mesure" de l'incertitude.

Savage prend pour point de départ un ensemble S d'états de la nature et un ensemble C de conséquences. On définit l'ensemble des décisions F comme l'ensemble des fonctions de S dans C.

Soit $E = \mathcal{P}(S)$; les éléments $e \in E$ sont appelés événements. On définit une relation binaire $\succ$ sur F avec $\sim$ une relation définie par :

$$\forall f, f' \in F : \text{non } f \succ f' \text{ et non } f' \succ f \iff f' \sim f$$

et $\succsim$ définie par :

$$\forall f, f' \in F : f' \succsim f \iff f' \succ f \text{ ou } f' \sim f.$$

On définit une relation $\succ_A$ $\forall A \in E$ (qui s'interprète comme une relation de préférence conditionnelle à l'événement A) telle que $f' \succ_A f \iff g' \succ g$ avec

$$f'(s) = g'(s) \text{ et } f(s) = g(s) \quad \forall s \in A \text{ et}$$
$$g'(s) = g(s) \quad \forall s \notin A.$$

Un événement $A \in E$ est dit nul si et seulement si :

$$f' \sim f \text{ lorsque } f'(s) = f(s) \quad \forall s \notin A.$$

On définit sur l'ensemble C une relation binaire P de la manière suivante :

$x \, P \, y \iff f \succ g$ avec $f(s) = x$, $g(s) = y \ \forall \ s \in S$.

On définit de même sur C une relation I.

Fishburn (1970) reformule et étend le théorème de Savage de la manière suivante :

<u>Théorème 2.7</u> : Soit $\succ$ une relation binaire sur F vérifiant les sept conditions suivantes $\forall f, g, f', g' \in F$, $\forall A, B \in E$, $\forall x, y, x', y' \in C$:

S_1 : $\succ$ est un ordre faible sur F (asymétrique et négativement transitif).

S_2 : si $f(s) = f'(s)$ et $g(s) = g'(s) \ \forall s \in A$

$f(s) = g(s)$ et $f'(s) = g'(s) \ \forall s \notin A$

alors $f \succ g \iff f' \succ g'$.

S_3 : Si A n'est pas nul et si $f(s) = x$ et $g(s) = y \ \forall s \in A$, alors $f \succ_A g \iff x \, P \, y$.

S_4 : si $y \, P \, x$, $f(s) = y \ \forall s \in A$

$f(s) = x \ \forall s \notin A$

$g(s) = y \ \forall s \in B$

$g(s) = x \ \forall s \notin B$

et $y' \, P \, x'$, $f'(s) = y' \ \forall s \in A$

$f'(s) = x' \ \forall s \notin A$

$g'(s) = y' \ \forall s \in B$

$g'(s) = x' \ \forall s \notin B$

alors $g \succ f \iff g' \succ f'$.

S_5 : $\exists \, (x, y) \in C^2$ tel que $x \, P \, y$.

S_6 : Si $f \succ g$, alors il existe une partition finie de S telle que si A est un événement de la partition et $f'(s) = x \ \forall s \in A$ et $f'(s) = f(s) \ \forall s \notin A$, alors $f' \succ g$

et si $\begin{cases} g'(s) = x & \forall s \in A \\ g'(s) = g(s) & \forall s \notin A \end{cases}$

alors $f \succ g'$.

S_7 : Si $f \succ_A f_x \ \forall x \in \{x' \ / \ g(s) = x'$ pour $s \in A\}$ où $f_x(s) = x$ $\forall s \in S$, alors $f \succsim_A g$ et si $f_x \succ_A f$, alors $g \succsim_A f$

alors la relation $\overset{*}{\succ}$ définie sur E par :

$$A \overset{*}{\succ} B \iff f \succ g \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} x\ P\ y \\ f(s) = x \quad \forall s \in A \\ f(s) = y \quad \forall s \notin A \\ g(s) = x \quad \forall s \in B \\ g(s) = y \quad \forall s \notin B \end{array}$$

est telle qu'il existe une fonction unique P sur E vérifiant :

a) $A \overset{*}{\succ} B \iff P^*(A) > P^*(B) \quad \forall A, B \in E$ (2.26 a)

b) $B \in E$ et $0 \leq \rho \leq 1 \Rightarrow \exists C \subset B$ tel que $P(C) = \rho\, P(B)$ (2.26 b)

c) $P(A) \geq 0 \quad \forall A \in E$
$P(E) = 1$
$\forall A, B \in E$ tel que $A \cap B = \emptyset$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Il existe de plus une fonction u de C à valeurs réelles bornée et définie à une transformation linéaire positive près telle que :

$$f \succ g \iff E[u(f(s))\ ;\ P] \succ E[u(g(s)),\ P] \qquad (2.27).$$

L'interprétation de S_1 ne soulève aucune difficulté particulière et S_5 est une condition évidente de non trivialité. L'axiome d'indépendance S_2 implique que la préférence entre deux décisions ne doit pas dépendre des événements pour lesquels elles ont des conséquences identiques. L'exemple dû à Allais étudié au 2 fournit une illustration de l'application de S_2. L'axiome S_3 permet d'établir une correspondance non ambiguë entre la relation de préférence conditionnelle $\succ_A$ et la relation de préférence sur l'ensemble des conséquences P. En conjonction avec S_2, il ne soulève pas de difficulté particulière. Dans S_4, la conséquence y étant préférée à x, la préférence $f \succ g$ traduit le fait que l'événement A est jugé plus vraisemblable que l'événément B. y' P x' implique alors que $f' \succ g'$. S_4 permet de définir la relation $\overset{*}{\succ}$ sans ambiguïtés. Fishburn (1970) montre que S_1-S_6 impliquent (2.26 a, b, c). L'axiome S_6 a donc des conséquences importantes puisque (2.26 b) implique que S soit infini. S_6 traduit le fait qu'un événement, élément d'une partition de S, peut être suffisamment "petit" (improbable) pour qu'il soit possible de modifier sur celui-ci les conséquences d'une décision sans changer la préférence de celles-ci vis-à-vis d'une décision inchangée (cf. Toulet (1982a)). Ceci implique à la fois le fait de pouvoir trouver de tels événements petits et aussi qu'il n'existe pas de conséquences infiniment préférées ou détestées car, sur le "petit" événement, la modification de la conséquence peut être quelconque. S_7 est un axiome de dominance permettant de vérifier (2.27) pour toutes les décisions avec une fonction d'utilité bornée. On peut montrer que S_1-S_7 impliquent les axiomes de Von Neumann et Morgenstern A_1-A_3 (cf. Fishburn (1970)).

Savage (1954) a donné de S_1-S_7 une interprétation normative (cf. pp. 91 et ss.). De nombreuses études ont montré qu'en tout état de cause, une interprétation "descriptive" (*) de ces postulats était fortement sujette à caution. Les critiques mentionnées au 2 à propos de l'hypothèse d'ordre faible restent bien entendu valables ici. Comme nous l'avons déjà mentionné, l'exemple d'Allais fournit une large illustration de non respect de l'axiome d'indépendance S_2. On peut mentionner à ce propos un autre exemple célèbre proposé par Ellsberg (1961). Ellsberg propose les deux choix suivants : on tire une boule au hasard dans une urne contenant 90 boules dont 30 sont rouges et les autres soit noires, soit jaunes.

1er choix : a_1 : recevoir 100 $ si la boule est rouge,
a_2 : recevoir 100 $ si la boule est noire.

2e choix : a_3 : recevoir 100 $ si la boule est rouge ou jaune,
a_4 : recevoir 100 $ si la boule est noire ou jaune.

Le choix a_1 préféré à a_2 et a_4 préféré à a_3, fait par un grand nombre de personnes (voir également les expériences liées effectuées par

(*) Au sens donné à ce terme au 2.

MacCrimmon (1960), Slovic et Tversky (1974), McCrimmon et Larsson (1979), Cohen et Jaffray (1982)) est incompatible avec S_2 puisque seule la conséquence commune sur l'état de la nature "boule jaune" est modifié entre a_1, a_2 et a_3, a_4. Ellsberg interprète un tel choix comme une aversion vis-à-vis de l'ambiguïté car seules a_1 et a_4 permettent de calculer la probabilité de gain.

Après ce bref aperçu théorique, il nous faut maintenant analyser le fonctionnement des modèles d'aide à la décision se fondant sur de telles analyses. Ce sera l'objet de la section B de ce chapitre.

B. LES ETUDES D'AIDE A LA DECISION FONDEES SUR LA THEORIE DE L'UTILITE

Après avoir passé en revue les principales caractéristiques de la théorie de l'utilité, nous nous préoccupons, dans cette section, de montrer comment les théorèmes de représentation évoqués peuvent servir à fonder des études d'aide à la décision. Nous verrons, dans une première sous-section, comment les concepts théoriques sont repris dans la pratique des études avant d'aborder les hypothèses sous-jacentes à cette utilisation et quelques études expérimentales permettant de juger de la validité de ces hypothèses.

1. Du modèle formel au modèle d'aide à la décision

Le modèle d'aide à la décision fondé sur la théorie de l'utilité vise à exploiter la relation : $p \, P \, q \Leftrightarrow E(u, p) > E(u, q)$ issue du modèle théorique où p et q sont considérés comme des actions potentielles dans l'étude d'aide à la décision. Dans le cas discret, on a (cf. II.A.1) : $E(u, p) = \sum_{x \in X} p(x) \times u(x)$. Il suffit donc, pour pouvoir classer deux actions, de disposer d'une fonction d'utilité sur l'ensemble des conséquences X et de pouvoir caractériser les actions potentielles par une distribution de probabilité sur cet ensemble. Pour parvenir à cet objectif, il est d'usage (cf. Keeney (1982) ou (1980)) de distinguer quatre phases d'analyse (*) :

(*) Pour une référence en langue française sur ce thème, on pourra consulter Indjehagopian et Thiétart (1976).

- La détermination des caractéristiques du problème de décision comprenant la génération de l'ensemble des actions potentielles et la spécification de l'ensemble des conséquences. Rappelons que, lorsqu'il est souhaitable de faire intervenir divers attributs dans cet ensemble, ceux-ci devront, de préférence, jouir des propriétés d'indépendance mentionnées au I.B.

- L'évaluation des conséquences possibles des actions potentielles. La nature du modèle théorique sous-tendant l'analyse impose ici de recourir à une modélisation de type probabiliste. Lorsqu'aucune distribution de probabilité fondée sur des considérations de type fréquentiste ne s'impose (ou fondées sur des modèles de simulation), le modèle de Savage fournit alors une base théorique justifiant le recours à des probabilités personnelles (ou subjectives). De très nombreuses techniques ont été proposées afin d'évaluer de telles probabilités dont on trouvera une synthèse dans Spetzler et Von Holstein (1975) et Wallstein et Budescu (1983). L'idée de base de ces techniques reste de faire comparer, au décideur, une loterie portant sur l'événement dont on veut estimer la probabilité subjective et une loterie obtenue à l'aide d'une technique aléatoire simple (jet de dés, roulette graduée). Ainsi, si l'on veut estimer la probabilité d'un événement E, on pourra faire comparer les loteries $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$:

où p est une probabilité connue, "visualisée" au travers d'une "roue de fortune" (cf. Speltzer et Von Holstein (1975), p. 349). Si $\mathcal{L}_1$ P $\mathcal{L}_2$, alors $p(E) > p$. En faisant varier p, on recherche l'indifférence entre $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$, ce qui permet de poser $p = p(E)$. Dans la pratique des études, on a souvent recours à des techniques moins sophistiquées visant soit à la détermination directe de certains fractiles de la distribution de probabilité sur l'ensemble des conséquences associées à la mise à exécution de l'action considérée, soit à celle des paramètres d'une distribution dont on a auparavant spécifié la forme.

Dans le cas où l'ensemble des conséquences a une structure multidimensionnelle, on suppose généralement l'indépendance en probabilités des distributions sur chacun des attributs afin de pouvoir mettre en oeuvre ces techniques d'estimation. Rappelons de plus que de nombreuses études de psychologie cognitive ont montré la présence de nombreux biais associés à la perception des probabilités (cf. Kahneman et Tversky (1974)).

- La détermination de la structure de préférence du décideur. Cette étape vise à quantifier l'attitude vis-à-vis du risque et les substitutions éventuelles entre les différents critères au travers d'une fonction d'utilité. Dans les cas multiattributs, seules les décompositions additives ou multiplicatives de la fonction d'utilité globale sont utilisées dans la pratique. Keeney (1974) établit le lien entre ces décompositions et les hypothèses d'indépendance mentionnées au I.B. On a :

<u>Théorème 2.10</u> : Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$ les attributs sur lesquels est définie une fonction d'utilité $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Si tout sous-ensemble de $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ est indépendant en utilité de son complément dans ce même ensemble, alors si $n \geq 3$:

$$\text{soit} \quad u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} k_i \, u_i(x_i) \qquad (2.21)$$

$$\text{soit} \quad 1 + k\, u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} (1 + k\, k_i\, u(x_i)) \qquad (2.22)$$

avec $u(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n) = 1$

$u(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n) = 0$

$u_i(\bar{x}_i) = 1$

$u_i(\underline{x}_i) = 0 \quad \forall\, i \in \{1, \ldots, n\}$ où $\bar{x}_i \; P \; \underline{x}_i \quad \forall\, i$

$k_i \in \,]0, 1[\quad \forall\, i \in \{1, \ldots, n\}$

et k solution de l'équation :

$$1 + k = \prod_{i=1}^{n} (1 + k\, k_i) \quad \text{avec} \quad k > -1 \quad \text{et} \quad k \neq 0. \qquad (2.23)$$

Remarques

1) La condition d'indépendance mutuelle en utilité est équivalente à la condition suivante lorsque $n \geq 3$: $\exists\, i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que X_i est indépendant en utilité de son complément et $\{X_i, X_j\}$ est indépendant au sens des préférences de son complément $\forall\, j \neq i \in \{1, 2, \ldots n\}$ (cf. théorème 6.2 de Keeney et Raiffa (1976)).

2) Si $\sum_{i=1}^{n} k_i = 1$, alors $k = 0$ et la forme additive (2.21) doit être retenue. Dans le cas contraire, la forme multiplicative (2.23) s'impose. Bien que l'équation (2.23) soit de degré n, on montre (cf. Keeney et Raiffa (1976)) que celle-ci admet en général une racine réelle supérieure à -1 et différente de 0.

3) Si, en plus des conditions du théorème 2.8, $\exists\, (x_1', x_2', x_3', \ldots, x_n)$, $(x_1'', x_2'', x_3, \ldots, x_n)$ avec $x_1' \neq x_1''$ et $x_2' \neq x_2''$ tels que

$$\begin{array}{l} \nearrow^{1/2}\ (x_1', x_2', x_3, \ldots, x_n) \\ \circ \\ \searrow_{1/2}\ (x_1'', x_2'', x_3, \ldots, x_n) \end{array} \quad I \quad \begin{array}{l} \nearrow^{1/2}\ (x_1', x_2'', x_3, \ldots, x_n) \\ \circ \\ \searrow_{1/2}\ (x_1'', x_2', x_3, \ldots, x_n) \end{array}$$

alors la forme additive s'impose (condition d'additivité - ou de marginalité - de Fishburn).

Bien que simple du point de vue théorique, le choix entre les deux formes concurrentes de la fonction d'utilité ne va pas sans poser de problèmes dans la pratique. Le premier critère de choix impose le recours à la forme additive dès lors que $\sum_i k_i = 1$. L'imprécision entourant l'évaluation de ces coefficients rend cette éventualité très improbable (cf. p. 67). Le second critère de choix implique que, si la condition de marginalité est violée (resp. respectée) par une <u>seule</u> paire de loteries, la forme additive est à rejeter (resp. adopter). Il est à noter que cette condition n'est mise en oeuvre que rarement dans la pratique pour l'<u>adoption</u> de la forme additive, celle-ci n'étant retenue que si les indications fournies par les deux critères de choix sont suffisamment convergentes (cf. Keeney (1977)). Par contre, une seule violation de la condition de marginalité conduit toujours à adopter la forme multiplicative (cf. par exemple Duckstein et al. (1981), p. 49).

Ces deux phénomènes expliquent que la décomposition multiplicative soit la plus généralement retenue dans les études au détriment de la forme additive, même si cette dernière est conceptuellement plus simple. On pourra consulter à ce sujet les études suivantes : Keeney et al. (1976), Keeney (1979), Keeney et Nair (1976), Keeney (1976), de Neufville et Keeney (1972), Keeney (1975), Bell (1977).

Lorsque les conditions du théorème 2.8 sont remplies, il suffit donc, pour spécifier complètement la fonction d'utilité et estimer n fonctions d'utilité partielles et n coefficients k_i permettant de s'assurer que chacune des fonctions reste bien calée entre 0 et 1 (soulignons que l'interprétation des k_i en termes de poids n'a de sens qu'une fois les fonctions d'utilité définies (cf. Zeleny (1981)). Dans le cas où un seul attribut est pris en compte, l'estimation de la fonction d'utilité uniattribut s'opère de la même façon que celle des fonctions d'utilité partielles sous les conditions du théorème 2.8.

L'estimation des coefficients k_i et des fonctions $u_i(x_i)$ s'opère au travers de comparaisons d'actions "idéales". Considérons les deux loteries suivantes L_1 et L_2 :

$$L_1 \quad \xrightarrow{\;1\;} (x_1^o, x_2^o, \ldots, x_{j-1}^o, x_j, x_{j+1}^o, \ldots, x_n^o)$$

$$L_2 \quad \begin{cases} \xrightarrow{\;p\;} (x_1^o, x_2^o, \ldots, x_{j-1}^o, \underset{\sim}{x}_j, x_{j+1}^o, \ldots, x_n^o) \\ \xrightarrow{\;1-p\;} (x_1^o, x_2^o, \ldots, x_{j-1}^o, \tilde{x}_j, x_{j+1}^o, \ldots, x_n^o) \end{cases}$$

Conformément aux hypothèses du théorème 2.8, L_1 et L_2 se comparent de la même façon, quelles que soient les valeurs $(x_1^o, x_2^o, \ldots, x_{j-1}^o, x_{j+1}^o, \ldots, x_n^o)$ que nous omettrons par la suite. On peut, pour estimer la fonction d'utilité, recourir à deux techniques : celle de la "conséquence variable" et celle de la "probabilité variable". Notons $L_1(x_j)$ la loterie donnant avec certitude la conséquence x_j et $L_2(\tilde{x}_j, p, \underset{\sim}{x}_j)$ la loterie donnant, avec la probabilité p, la conséquence $\tilde{x}_j$ et, avec une probabilité $(1 - p)$, la conséquence $\underset{\sim}{x}_j$.

La méthode de la conséquence variable revient à spécifier une probabilité p_o et deux conséquences $\tilde{x}_j$ et $\underset{\sim}{x}_j$ et à demander au décideur la conséquence x_j^* assurant l'indifférence entre $L_1(x_j^*)$ et $L_2(\tilde{x}_j, p_o, \underset{\sim}{x}_j)$. Si le décideur est capable de spécifier la conséquence x_j^*, on peut alors poser, conformément aux principes de l'utilité espérée : $u_j(x_j^*) = p_o\, u_i(\tilde{x}_j) - (1 - p_o)\, u_j(\underset{\sim}{x}_j)$. Pour des raisons de perception des probabilités, la valeur la plus souvent retenue pour p_o est 1/2. On demarre alors la procédure avec $\tilde{x}_j = \bar{x}_j$ et $\underset{\sim}{x}_j = \underline{x}_j$. Si

$$L_1(x_j^*)\ I\ L_2(\bar{x}_j, \tfrac{1}{2}, \underline{x}_j),\ \text{alors}\ u(x_j^*) = \tfrac{1}{2}.$$

On itère alors la procédure en considérant les loteries $L_2(x_j^*, \frac{1}{2}, \underline{x}_j)$ et $L_2(\bar{x}_j, \frac{1}{2}, x_j^*)$ et en recherchant les loteries $L_1(x_j^{**})$ et $L_1(x_j^{***})$ qui leur sont respectivement indifférentes. On a alors $u_j(x_j^{**}) = 0{,}25$ et $u_j(x_j^{***}) = 0{,}75$. On peut ainsi obtenir, de façon itérative, autant de points que l'on désire pour estimer la fonction $u_j(x_j)$.

La méthode de la probabilité variable est théoriquement équivalente à la précédente. Elle consiste à spécifier une probabilité p^* et à demander au décideur la conséquence x_j^* telle que : $L_1(x_j^*)\ I\ L_2(\bar{x}_j, p^*, \underline{x}_j)$. Une fois obtenie la conséquence x_j^*, on peut poser $u_j(x_j^*) = p^*$. On itère alors la procédure en faisant varier la probabilité p^*. Pour les deux méthodes considérées, la réponse à chacune des questions posées s'opère en pratique au travers d'un processus progressif de réduction de la taille d'un intervalle sur les valeurs de x_j et contenant la valeur recherchée assurant l'indifférence entre L_1 et L_2. Cette technique permet, le plus souvent, d'éviter les biais qu'entraînerait la recherche immédiate de la valeur d'indifférence.

Une littérature abondante (cf. Pratt (1964)) permet de simplifier considérablement la tâche de l'analyste en permettant de lier la forme fonctionnelle de la fonction d'utilité à des considérations qualitatives simples à propos de l'aversion ou du goût pour le risque du décideur. Conformément à la définition classique, on dira que le décideur présente de l'aversion (resp. du goût) pour le risque si sa fonction d'utilité est concave (resp. convexe). La linéarité de la fonction traduit alors une neutralité vis-à-vis du risque. La concavité de la fonction d'utilité traduit le fait que le décideur est prêt à payer une "prime de risque" pour éviter de faire face à une dispersion des conséquences (cf. figure 2.1). Pratt (1964) montre que la mesure locale de l'aversion pour le risque $r(x_j) = - \frac{u''(x_j)}{u'(x_j)}$ permet d'interpréter non seulement le signe de la prime de risque ($r(x_j)$ est positif $\forall\, x_j$ en cas d'aversion pour le risque et négatif en cas de goût pour le risque) mais également sa variation lorsque l'on se déplace de long de l'échelle des conséquences. Lorsque des considérations qualitatives permettent d'apprécier le signe, la constance ou la décroissance de $r(x_j)$ le long de l'échelle, on peut montrer que le choix de la forme fonctionnelle de $u_j(x_j)$ est fortement contraint. En effet :

- si l'aversion pour le risque $r(x_j)$ est constante, alors $u_j(x_j)$ est du type $- e^{-cx}$, $c > 0$ (si les préférences croissent avec x et < 0 sinon) ;
- si le goût pour le risque $r(x_j)$ est constant, alors $u_j(x_j)$ est du type e^{-cx}, $c > 0$.

Lorsque l'attitude pour le risque dépend de la position sur l'échelle (traduisant par exemple le fait qu'un homme riche est prêt à prendre plus de risques qu'un homme pauvre, en admettant que l'attribut x_j traduise le patrimoine du décideur et non ses revenus), il est utile d'introduire une mesure locale de l'aversion proportionnelle pour le risque $r^*(x_j) = x_j\, r(x_j)$. Une aversion proportionnelle constante et positive (respectivement négative) traduit une aversion locale strictement décroissante (respectivement croissante) avec x_j et impose une fonction d'utilité du type : x_j^{1-c} pour $r^*(x_j) = c < 1$ ou $\mathrm{Log}(x_j)$ pour $r^*(x_j) = 1$ ou $- x_j^{-(c-1)}$ pour $r^*(x_j) = c > 1$.

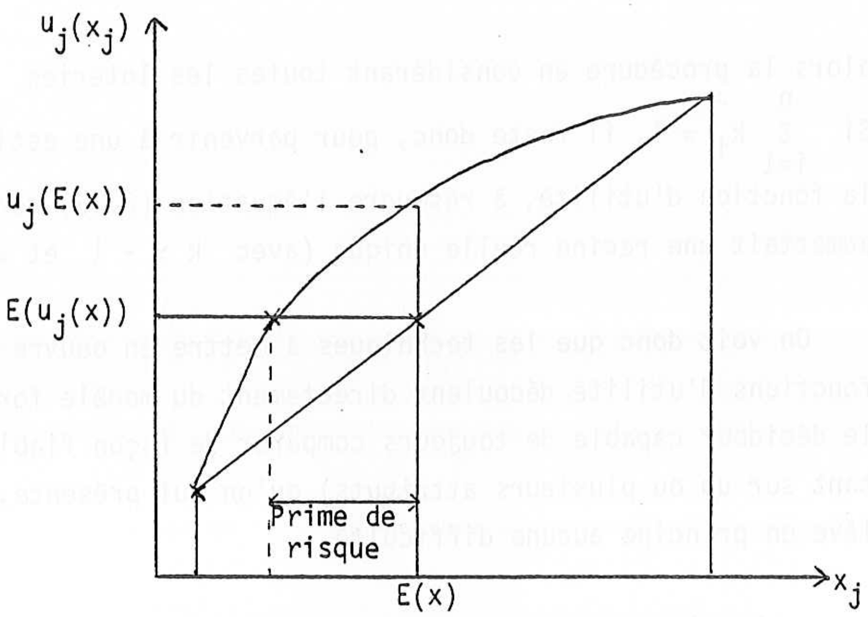


Figure 2.1 : Illustration d'une fonction d'utilité traduisant une aversion pour le risque

Si l'on a pu ainsi restreindre la classe de fonctions d'utilité admissibles, il suffit alors de recourir à la technique de comparaison de loteries exposée plus haut pour estimer les coefficients inconnus entrant dans la forme fonctionnelle retenue.

De même, l'estimation des coefficients k_i est simple du point de vue conceptuel, même si la mise en application des méthodes que nous allons évoquer soulève parfois, dans la pratique, des problèmes importants (cf. Roy et Bouyssou (1983)). Sous les hypothèses du théorème 2.8, on a $u_i(\bar{x}_i) = 1$ et $u_i(\underline{x}_i) = 0 \;\; \forall\, i \in \{1, \ldots, n\}$. Considérons les deux loteries suivantes :

$$L_i \;\circ\!\xrightarrow{\;1\;} (\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \bar{x}_i, \ldots, \underline{x}_n)$$

$$\text{et } \mathcal{L} \;\circ \begin{cases} \xrightarrow{\;p\;} (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n) \\ \xrightarrow{\;1-p\;} (\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n) \end{cases}$$

L'espérance d'utilité de $\mathcal{L}$ est égale, par définition, à p tandis que celle de L_i vaut k_i tant dans la forme additive que multiplicative. Dès lors, si le décideur est capable de trouver la probabilité p assurant l'indifférence entre L_i et $\mathcal{L}$, on pourra poser $k_i = p$. On itère

alors la procédure en considérant toutes les loteries L_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$.
Si $\sum_{i=1}^{n} k_i \neq 1$, il reste donc, pour parvenir à une estimation complète de la fonction d'utilité, à résoudre l'équation (2.23) dont on a rappelé qu'elle admettait une racine réelle unique (avec $k > -1$ et $\neq 0$).

On voit donc que les techniques à mettre en oeuvre pour estimer les fonctions d'utilité découlent directement du modèle formel. Si l'on estime le décideur capable de toujours comparer de façon fiable les loteries (portant sur un ou plusieurs attributs) qu'on lui présente, cette étape ne soulève en principe aucune difficulté .

-. Le classement des actions et l'élaboration de la prescription. Une fois évaluées les conséquences possibles des différentes actions et déterminée la structure de préférence, le classement des actions s'opère simplement par application du principe de l'utilité espérée : $p \; P \; q \iff E(u, p) > E(u, q)$. La prescription doit néanmoins tenir compte de la plus ou moins grande robustesse de ce classement vis-à-vis de la part d'arbitraire ou d'imprécision entourant l'évaluation, tant des conséquences sous forme de distribution de probabilités que des paramètres entrant dans la fonction d'utilité.

2. Un exemple d'application : le choix de sites pour la localisation de réservoirs (cf. Keeney (1979))

a) Caractéristiques du problème de décision

Pour faire face à la demande d'électricité aux heures de pointe, on a souvent recours à des systèmes de réservoirs surélevés dans lesquels l'eau est pompée aux heures creuses. L'étude de Keeney (1979), entreprise au milieu des années 1970, porte sur l'identification et le classement de sites pour l'établissement de tels systèmes pour le compte d'une entreprise (UCS) produisant de l'électricité dans le Sud-Ouest des Etats-Unis. Compte-tenu de l'information disponible sur la typologie et la géographie de cette région et après application d'un modèle à niveau d'aspiration de type conjonctif, 10 sites potentiels furent retenus au départ de l'étude.

Les objectifs de UCS étant à la fois de minimiser les coûts de l'installation, de limiter l'impact esthétique des lignes à haute tension nécessaires pour raccorder celle-ci au réseau ainsi que son effet sur l'environnement. Au regard de ces objectifs et des caractéristiques des sites étudiés, quatre attributs ont été retenus pour servir de base à la comparaison (cf. Tableau II.1).

Tableau 2.1

Attribut	Unité de mesure	Plage de variation	
X_1 : Coût de l'installation la première année	$ 1976	50	75
X_2 : Longueur des lignes de raccordement (*)	Miles (1,6 km)	0	800
X_3 : Surface de forêt (génévrier) endomagée	Acres (0,4 ha)	0	800
X_4 : Longueur du cours d'eau endomagée	Yard (0,91 m)	0	2000

(*) Cette longueur est modifiée pour tenir compte de la nature des régions traversées en vue de pénaliser les lignes traversant des régions fortement urbanisées ou présentant un intérêt "écologique".

b) L'évaluation des conséquences possibles des actions potentielles

L'attribut X_1 représente les coûts d'investissement et d'exploitation encourus la première année (les coûts des années ultérieures sont supposés être négligeables par rapport à ce montant) ramenés en $ de 1976 par application d'un taux d'actualisation de 18 %. L'évaluation de X_2 a été menée à l'aide de cartes tandis que l'impact écologique de la construction a été apprécié par des experts lors de visites sur le terrain. Compte-tenu de la nature du problème, il n'a pas semble souhaitable d'évaluer les différents sites de façon probabiliste à ce stade du processus de décision. Cependant, pour prendre en compte la mauvaise connaissance du sous-sol de certains sites ainsi que l'intérêt écologique des régions environnantes, il a été spécifié deux évaluations possibles pour quatre des dix sites (cf. Tableau 2.2).

Tableau 2.2 (source : Keeney (1979), p. 353))

Site	X_1	X_2	X_3	X_4
S1	56.01	97.8	230	0
S2	59.18	140.0	150	0
S3	61.48	163.0	0	0
S4	59.68	342.3	0	0
S5	64.47	91.0	270	0
S6	61.36	152.7	721	2000
S7	58.23	681.0	0	0
S8	59.92	704.0	240	0
S9	49.71	84.2	260	1900
S10	75.42	392.7	419	1600
S9*	49.71	84.2	260	1900*
S6*	51.64*	152.7	721	2000
S8*	52.98*	704.0	240	0
S7*	65.19*	681.0	0	0

* S_6, S_7, S_8 : L'évaluation de X_1 dépend de la nature des travaux nécessaires pour la construction du réservoir.

S_9 : L'évaluation sur X_4 correspond ici à un site présentant un interêt écologique unique.

c) Détermination de la structure de préférence

L'étude étant ici menée pour le compte d'une grosse entreprise (UCS), les auteurs de l'étude ont interrogé divers dirigeants de celle-ci afin de déterminer un modèle de préférence. Ayant constaté une absence de désaccord majeur entre ces personnes dans les réponses obtenues, ils ont fait choix de calibrer le modèle de préférence en retenant, pour chaque question posée, une valeur moyenne. Une analyse de sensibilité sera ensuite effectuée sur ces paramètres.

Une première série de questions a permis de s'assurer que les conditions d'indépendance du théorème 2.8 pouvaient être considérées comme vérifiées. La condition de marginalité de Fishburn (cf. p. 63) n'étant pas vérifiée pour une paire de loteries portant sur les attributs X_1 et X_2, les auteurs ont retenu pour base du travail d'estimation la forme multiplicative (2.22). Bien qu'aucun des sites ne soit évalué de façon probabiliste, l'évaluation des coefficients k_i et des fonction d'utilité partielles u_i a été menée conformément à la procédure décrite à la section précédente en demandant aux dirigeants de l'UCS de comparer diverses loteries. Les résultats obtenus sont résumés à la figure 2.3. Illustrons, pour l'attribut X_1, la détermination de la fonction d'utilité. Les réponses obtenues (selon la technique de la conséquence variable) traduisent l'indifférence suivante :

$$X_1 = 68{,}75 \ \mathrm{I} \ \circ \begin{cases} \xrightarrow{.5} X_1 = 50 \\ \xrightarrow{.5} X_1 = 75 \end{cases}$$

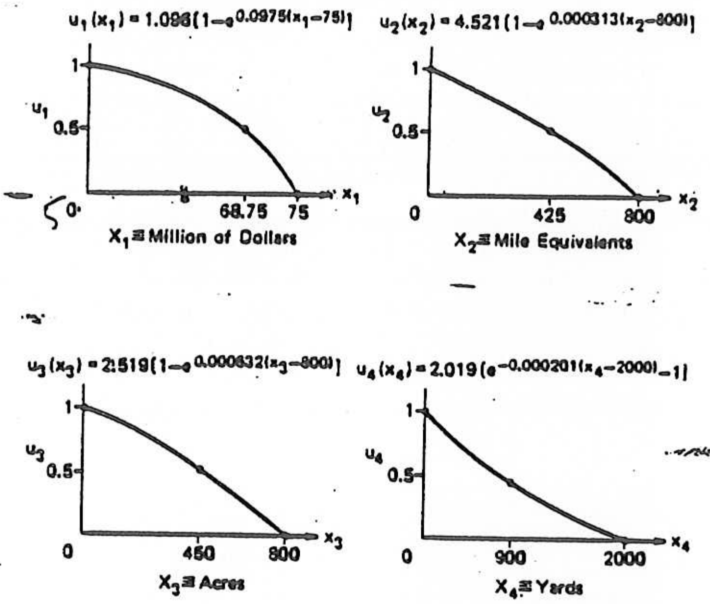
caractéristique d'une aversion pour le risque puisque $68{,}75 > \frac{75 + 50}{2} = 62{,}5$. En admettant une aversion constante, on sait que la fonction d'utilité doit être du type $- e^{-cx}$ avec $c < 0$ ou, plus généralement, $u(x_1) = - a\, e^{-cx} + b$ avec $a > 0$ et $c < 0$. On a $u_1(68{,}75) = .5$, d'où $e^{-c68{,}75} = \frac{1}{2}(e^{-c50} + e^{-c75})$. La résolution numérique de cette équation donne $c = - 0{,}0975$. D'après le théorème 2.8, on peut poser $u_1(50) = 1$ et $u_1(75) = 0$, d'où

$$b - a\, e^{-c50} = 1$$
$$b - a\, e^{-c75} = 0.$$

On a, après calcul :

$$a = + 0{,}000731$$
$$b = 1{,}096$$

d'où $u_1(x_1) = 1{,}096 - 0{,}000731\, e^{0{,}0975\, x_1}$, ce qui est conforme aux données de la figure 2.3.



$k_1 = 0.716,\quad k_2 = 0.382,\quad k_3 = 0.014,$

$k_4 = 0.077,\quad k = -0.534.$

Figure 2.3 : Forme des fonctions d'utilité et valeur des k_i (source : Keeney (1979))

(*) L'évaluation de la conséquence $X_4(S_9^*)$ a été opérée au travers d'une fonction d'utilité distincte présentant une forte aversion pour le risque.

d) Le classement des sites et l'élaboration de la prescription

En utilisant la fonction d'utilité multiplicative (2.22) et les données du tableau 2.2 et de la figure 2.3, on obtient le classement du tableau 2.4. On constate en particulier que le classement de S_9 dépend, de façon cruciale, de l'intérêt écologique présenté par le site endommagé.

Afin d'apprécier la robustesse de ces résultats vis-à-vis des paramètres (k_i et u_i) entrant dans le modèle des préférences globales, les auteurs de l'étude ont procédé à une analyse de sensibilité sur les facteurs suivants :

Tableau 2.4 : Classement des sites (source : Keeney (1979))

Sites	Rang	Utilité
		Données de base
S1	1	0.931
S2	2	0.885
S3	3	0.846
S4	4	0.820
S5	5	0.809
S6	6	0.799
S7	7	0.732
S8	8	0.697
S9	9	0.694
S10	10	0.196
		Données alternatives
S9*		0.941
S6*		0.905
S8*		0.780
S7*		0.596

- une variation du coût des installations : diminution du coût de 10 % et augmentation de 15 % pour tous les sites

- une variation des coefficients k_i :

. changement proportionnel de tous les k_i ($\Sigma\, k_i$ = 0,8, 1 et 1,5)

. modification de k_1 et de k_2 ($k_1 = k_2$ et $k_1 = 4\, k_2$),

- une variation de l'aversion pour le risque sur l'attribut X_1,

chacun de ces facteurs étant étudié séparément. Les résultats de cette analyse figurent au tableau 2.5.

Compte-tenu de la stabilité des classements obtenus au tableau 2.5, les auteurs de l'étude ont recommandé de procéder à des études détaillées des sites S_1, S_6 et S_9 qui semblent les mieux placés pour accueillir le type d'installation projeté.

Tableau 2.5 : Résultats de l'analyse de sensibilité (source ; Keeney (1979))

Site	Evaluation de base	90 % costs	115 % costs	$\Sigma k_i = 0.8$	$\Sigma k_i = 1.0$	$\Sigma k_i = 1.5$	$k_1 = k_2 = 0.51$	$k_1 = 4 k_2$	X_1 moins d'aversion pour le risque	X_1 neutralité par rapport au risque
S9*	(1) 57.8	(2) 55.6	(1) 62.1	(2) 62.0	(2) 59.9	(1) 53.2	(2) 63.6	(1) 56.5	(1) 53.8	(1) 52.5
S1	(2) 58.7	(1) 54.5	(3) 65.8	(1) 59.7	(1) 59.2	(3) 57.5	(1) 61.4	(2) 57.3	(3) 57.7	(3) 57.4
S6*	(3) 60.7	(4) 58.6	(2) 64.9	(4) 64.5	(4) 62.7	(2) 56.1	(4) 66.7	(3) 58.8	(2) 57.0	(2) 55.7
S2	(4) 62.0	(3) 57.6	(4) 69.5	(3) 62.8	(3) 62.4	(4) 61.0	(3) 64.7	(4) 60.5	(4) 61.4	(4) 61.2
S3	(5) 64.1	(5) 59.4	(6) 72.1	(5) 64.7	(5) 64.4	(5) 63.4	(4) 66.7	(6) 62.7	(5) 63.9	(5) 63.9
S4	(6) 65.3	(7) 62.0	(5) 71.8	(7) 66.7	(7) 66.1	(6) 63.6	(7) 69.8	(5) 63.4	(6) 64.7	(6) 64.3
S5	(7) 65.8	(6) 60.2	(7) 74.8	(6) 66.0	(6) 65.9	(7) 65.5	(6) 67.2	(7) 65.1	(7) 65.9	(7) 66.0

Note : Les chiffres donnés ici représentent l'équivalent, en termes du seul attribut X_1, de l'impact des sites, soit :

$$u_1^{-1}\left[\frac{1}{k} \prod_{i=1}^{4} (1 + k\, k_i\, u_i(x_i)) - 1\right].$$

Les sites 8, 9, 8*, 7* et 10, nettement inférieurs aux autres, ne figurent pas dans ce tableau.

3. Les hypothèses et le fonctionnement du modèle d'aide à la décision

L'attrait exercé par les techniques de l'analyse de la décision tient, pour une bonne part, à l'existence du modèle formel donnant une assise "logique" (l'expression "logically sound" se retrouve dans à peu près tous les ouvrages traitant de l'analyse de la décision pour justifier de son utilisation) aux techniques utilisées.

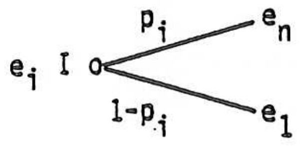
La "logique" sous-tendant le modèle formel présente comme avantage principal de permettre d'aboutir à une représentation numérique des préférences assez simple. Comme nous l'avons déjà mentionné, elle n'a pas été conçue au départ pour pouvoir servir de support à un modèle d'aide à la décision. Cette section s'efforcera de montrer plus précisément quelles sont les hypothèses et les techniques permettant l'utilisation des concepts du modèle formel dans un contexte d'aide à la décision. Nous nous interrogerons successivement sur la nature de la relation de préférence supposée exister, sur les techniques à mettre en oeuvre pour la cerner, sur les moyens d'enrichir cette relation de préférence avant d'aborder le problème de l'interprétation des axiomes et des concepts théoriques en vue de l'aide à la décision.

a) Existence de la relation de préférence et aide à la décision

L'axiome A_1, présent dans toutes les théories formelles, suppose exister entre les objets une relation de préférence (préordre, ordre partiel strict, quasi-ordre, pseudo-ordre). Avec un objectif d'aide à la décision, il convient de s'interroger plus précisément sur la signification de cette "existence". Ce problème est déjà clairement posé par Rapoport (1956). Selon lui, l'axiome A_1 exclut toute possibilité d'aide à la décision. En effet, dès lors qu'une relation de préférence est supposée exister, on voit mal de quelle aide le décideur pourrait avoir besoin. Rapoport conclut donc que la théorie formelle de la représentation de structures de préférences de Von Neumann et Morgenstern ne peut servir de fondement à une aide à la décision puisque l'axiome A_1 suppose tout problème de décision déjà résolu.

Pour pouvoir donner un sens aux techniques d'aide à la décision se fondant sur la théorie formelle, il faut donc réinterpréter l'axiome A_1 de façon moins littérale. Comme le notent Fishburn (1967) et Schoemaker (1982), l'utilisation prescriptive de la théorie formelle vise à conseiller un choix entre des "alternatives" complexes sur la base des préférences et des goûts fondamentaux du décideur. La philosophie de ce modèle d'aide à la décision devient dès lors plus claire. L'axiome A_1 doit être ici interprété comme stipulant l'existence des "préférences et goûts fondamentaux" du décideur (par la suite, nous emploierons l'expression "attitudes de base" du décideur). En conjonction avec les deux axiomes A_2 et A_3, ces attitudes de base sont alors représentées numériquement par une fonction d'utilité utilisée ensuite pour évaluer, et donc classer, les actions potentielles de l'étude d'aide à la décision. Notons cependant que ces "attitudes de base" ne concernent que des actions "idéales", c'est-à-dire qu'elles font, en général, abstraction des éléments d'imprécision ou de flou entourant les perceptions des actions réelles.

A titre d'exemple, supposons que l'on cherche à aider le décideur à classer un ensemble d'actions évaluées sous forme de distributions de probabilité sur une échelle qualitative à n échelons $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, le décideur préférant de façon claire l'échelon e_i à l'échelon e_j dès lors que $i > j$. Si l'on souhaite parvenir à un classement sous forme de préordre total de toutes les actions envisagées, il faudra obtenir, de la part du décideur, $n - 2$ "indications" sur ses préférences vis-à-vis du risque sur cette échelle. En effet, en présence des axiomes du modèle formel, il suffit, pour classer toute loterie sur cette échelle, de pouvoir associer à chaque échelon e_i, $i = 2, 3, \ldots, n - 1$ une probabilité p_i telle que



pourvu que ces attitudes présentent un minimum de cohérence entre elles et soient telles que $p_i > p_j$ si $i > j$. Une fois supposées recueillies ces attitudes, on peut poser $u(e_i) = p_i$, $i = 2, 3, \ldots, n - 1$ et $u(e_1) = 0$, $u(e_n) = 1$, ce qui définit parfaitement la fonction d'utilité et permet de résoudre complètement le problème de départ.

Ce mécanisme, simple en apparence et pourtant fondamental si l'on souhaite réinterpréter le modèle formel comme un modèle d'aide à la décision, n'est généralement pas abordé explicitement. A titre d'exemple, nous reproduisons ci-dessous les axiomes donnés par Keeney (1980), nécessaires et suffisants pour l'utilisation de la "decision analysis" (en les modifiant légèrement, la terminologie de Keeney étant propre aux problèmes de localisation, on pourra se reporter également à Keeney (1982))).

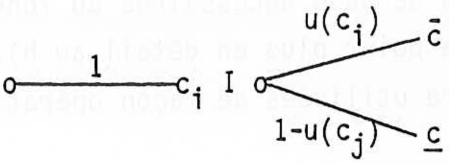
D_1 : Il existe au moins deux actions possibles.

D_2 : Il est possible d'identifier les conséquences de chaque action. Cet axiome se subdivise en :

D_2a : Il est possible de déterminer les objectifs du décideur.
D_2b : on peut concevoir des attributs mesurant à quel point les objectifs sont atteints.

D_3 : Il est possible de déterminer la probabilité d'occurrence des différentes conséquences pour chaque action.

D_4 : On peut déterminer l'utilité associée à chaque conséquence. Si les conséquences des actions sont bornées par $\underline{c}$ et $\bar{c}$, cet axiome devient : on peut associer, à chaque conséquence c_i, un réel $u(c_i)$ compris entre 0 et 1 tel que :



D_5 : Les préférences du décideur doivent :

- être telles que, si deux actions peuvent donner les deux mêmes conséquences possibles, alors l'action conduisant avec la probabilité la plus forte à la meilleure conséquence doit être préférée ;
- être transitives ;
- être tellesque la préférence entre deux actions ne soit pas modifiée si l'on remplace une conséquence de l'une des deux actions par un ensemble de conséquences muni de probabilités qui lui soit indifférent.

Si cet ensemble d'axiomes ne fait bien sûr plus référence directement à l'existence d'une relation de préférence entre les actions, il reste néanmoins très proche des axiomes du modèle formel. Leur interprétation paraît assez délicate dans une situation d'aide à la décision puisque l'axiome D_5 fait référence à une relation de préférence entre les actions réelles. Dès lors, la relation de préférence utilisée dans D_5 doit être vue comme un prolongement des attitudes de base mentionnées implicitement dans D_4 ou, en d'autre termes, comme un prolongement d'une relation de préférence entre des actions idéales simples, support du recueil de ces attitudes.

De façon moins formelle, nous dirons que la démarche de la decision analysis repose sur trois principes :

1) il existe des attitudes de base du décideur vis-à-vis du problème qu'il est possible de cerner au travers d'une comparaison d'actions idéales simples ;

2) ces attitudes de base sont conformes aux axiomes du modèle formel ;

3) l'extrapolation de ces attitudes à des actions réelles, souvent complexes, fournit une base adéquate à la prescription.

Les techniques d'estimation décrites au 1) permettent de se faire une idée sur la nature des attitudes de base nécessaires au fonctionnement du modèle. Nous reviendrons sur ce point plus en détail au b). Mentionnons simplement que, pour pouvoir être utilisées de façon opérationnelle, ces attitudes doivent être :

1) suffisamment "riches" pour pouvoir servir de fondement à la comparaison d'actions complexes ;

2) suffisamment stables et bien définies pour pouvoir être appréhendées de façon opérationnelle.

Comme dans l'exemple de l'équelle qualitative décrit plus haut, on suppose généralement que la richesse de ces attitudes est telle qu'elle permet de classer toute action de façon non ambiguë. Ceci revient à dire que le décideur est capable, de façon potentielle, de classer toutes les actions. Pour parvenir à ce classement, il suffit en effet de faire application des axiomes A_2 et A_3, que le décideur respectait de façon "intuitive", dans ces attitudes de base. Le préordre total mentionné dans l'axiome A_1 peut donc être vu ici comme un "préordre total latent" que l'intervention de l'homme d'étude permet de mettre à jour. Roy et Bouyssou (1983) qualifient un tel modèle de "descriptif" au sens où il cherche à rendre compte de la façon la plus précise possible d'une relation de préférence existante. Il est clair, à notre sens, que ce terme de "descriptif" s'applique également même si l'on suppose seulement l'existence d'un ensemble d'attitudes de base, puisqu'en présence d'axiomes (déjà vérifiés, souvent implicitement, au départ) cette hypothèse est équivalente à celle de l'existence d'une relation de préférence complète.

Concernant l'existence et la nature de ces attitudes de base, beaucoup de questions soulevées jusqu'ici ne pourront avoir de réponse qu'au travers d'études empiriques. Il convient, avant d'aborder directement ce point, d'analyser plus avant les mécanismes sous-tendant cette démarche.

b) <u>Les techniques d'évaluation des fonctions d'utilité</u>

Les techniques classiques décrites au 1) visent à recueillir, sur la base de comparaison d'actions idéales simples, évaluées sur un nombre d'attribut le plus restreint possible et faisant intervenir des probabilités simples (1/4, 1/2, 3/4), les attitudes de base du décideur. Il est d'usage de distinguer deux types d'attitudes qui sont encodées de façon séparées :

- celle concernant l'aversion ou le goût pour le risque du décideur servant à définir la forme des fonctions d'utilité partielles ;
- celle concernant les substitutions entre critères permettant de définir les coefficients k_i.

Il est clair que la qualité de ce recueil dépend, de façon cruciale, de l'habileté et de l'expérience de l'analyste. Keeney (1977) qualifie même cette partie du travail d'"art". La démarche classique consiste, pour chacune des questions posées, à cerner le plus précisément possible le paramètre (conséquence ou probabilité selon la technique retenue) assurant l'indifférence entre les deux loteries proposées. Tous les auteurs insistent cependant sur le fait qu'une analyse de sensibilité systématique sur les paramètres ainsi estimés doit être conduite afin d'apprécier la robustesse de la prescription. Il faut noter que cette démarche n'est pas la seule concevable. Certains auteurs ont insisté sur le fait que la recherche systématique d'attitudes de base d'une richesse "infinie" (c'est-à-dire permettant de spécifier sans ambiguïtés tous les paramètres de la fonction d'utilité) pouvait conduire à certains biais. Dans certains cas, la mauvaise connaissance du problème par le décideur, le manque de temps pour réaliser le recueil ou la présence de divergences parmi les acteurs du processus de décision pourront conduire à la recherche d'une information moins riche. Ainsi, dans l'exemple de l'échelle qualitative mentionné plus haut, on pourrait se contenter de demander au décideur non pas n - 2 probabilités p_i mais n - 2 bornes p_i^*, p_{i*} telles que :

$$e_i \; P \; \circ\!\!\begin{array}{l} \xrightarrow{\;p_{i*}\;} e_n \\ \xrightarrow[\;1-p_{i*}\;]{} e_1 \end{array} \qquad \text{et} \qquad \circ\!\!\begin{array}{l} \xrightarrow{\;p_i^*\;} e_n \\ \xrightarrow[\;1-p_i^*\;]{} e_1 \end{array} \; P \; e_i$$

Pour être cohérent avec les préférences ordinales exprimées sur l'échelle, ces bornes devront être telles que $p_{i_*} > p_j^* \;\; \forall\, i > j$. Il va de soi que la prescription sera, dans ce dernier cas, moins "riche" qu'un préordre complet puisque l'on ne peut affecter à chaque échelon qu'un "intervalle" d'utilité.

Aucune considération théorique ne permet de préférer telle ou telle méthode de recueil. Tout dépend en effet de la nature des attitudes de base du décideur face au problème considéré. La description détaillée d'un processus de recueil de telles attitudes, donnée par Keeney (1977), montre bien que, dans certains cas, pour un échelon donné e_i, il existe un intervalle $[p_{i*}, p_i^*]$ à l'intérieur duquel toutes les actions du type $\circ\!\!\begin{array}{l} \xrightarrow{\;p\;} e_n \\ \xrightarrow[\;1-p\;]{} e_1 \end{array}$ avec $p \in [p_{i*}, p_i^*]$ sont perçues comme équivalentes. Nous reproduisons ci-dessous une courte partie du dialogue enregistré par Keeney (1977) où il s'agit d'encoder les préférences du Dr. Buehring concernant des politiques de développement énergétiques évaluées sur 11 critères (le dialogue se rapporte à une première estimation corrigée quelques jours plus tard après réflexion). La partie reproduite traite de l'estimation d'un point sur la fonction d'utilité partielle de l'attribut X_{10} représentant des tonnes de plombs dégagés par les systèmes produisant de l'énergie dans l'atmosphère.

Keeney : Considérons maintenant la loterie $\circ\!\!\begin{array}{l} \xrightarrow{\;1/2\;} x_{10} = 2\,000 \\ \xrightarrow[\;1/2\;]{} x_{10} = 0 \end{array}$ et l'option $x_{10} = 500$. Que choisireriez-vous ?

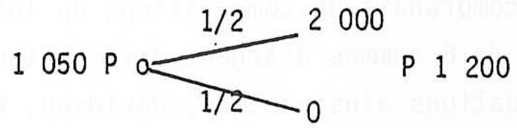
Buehring : 500

Keeney : La loterie ou 1 500 ?

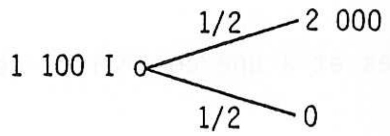
Buehring : Je prendrais la loterie.

Keeney : Et à 1 200 ?
Buehring : Je continuerais probablement à choisir la loterie.
Keeney : Que se passe-t-il à 800 ?
Buehring : Je prendrais l'option x_{10} = 800.
Keeney : A 1 000 ?
Buehring : Je pense que je prendrai 1 000.
Keeney : L'espérance de la loterie est 1 000 comme vous savez. Et à 1 100 ?
Buehring : Là, nous sommes très proches. Vous pouvez probablement dire que je suis indifférent entre les deux à 1 100. Est-ce que je prendrai 1 050 ?
Keeney : Prendriez-vous 1 050 ou la loterie ?
Buehring : Oui, je prendrai 1 050 plutôt que la loterie.
Keeney : Et pas 1 100 ?
Buehring : 1 100 je ne sais pas, les deux sont très proches.
Keeney : Et 1 200 ?
Buehring : A 1 200, je prendrais la loterie.
Keeney : Bien. Prenons 1 100 comme point d'indifférence.
Buehring : OK.

Il ressort de ce dialogue, à notre sens, que si l'on peut affirmer avec certitude que :



l'affirmation :



n'est pas exempte d'un certain arbitraire.

Davidson, Suppes et Siegel (1957) (voir également Luce et Suppes (1965)) ont proposé une technique permettant d'intégrer explicitement la plus ou moins grande richesse des attitudes de base recueillies. Ils préconisent de ne pas formuler les questions posées au décideur en termes de recherche d'une relation d'indifférence pour retenir seulement des préférences bien affirmées entre couples de loteries. Les données ainsi obtenues sont traitées par une technique de programmation linéaire qui sera souvent reprise par la suite.

L'étude expérimentale rapportée par Davidson, Suppes et Siegel vise à estimer la fonction d'utilité pour la monnaie d'un ensemble de personnes. Leur procédure se fonde sur la comparaison de loteries du type

où la probabilité 1/2 est "visualisée" par un jeu de dés et où les sommes d'argent a, b, c et d sont variées au cours de l'analyse. Conformément aux principes de l'utilité espérée, on a :

$$L \; P \; L' \iff u(a) + u(b) > u(c) + u(d).$$

Le plan d'expérience retenu comprenait 35 comparaisons de loteries du type L et L' obtenues à partir de 6 sommes d'argent différentes. Pour résoudre le système de 35 inéquations ainsi obtenu, Davidson, Suppes et Siegel ont associé à certaines contraintes une variable d'erreur θ et ont résolu le programme linéaire

Min θ
s.a. l'ensemble des 35 contraintes et à une contrainte de normalisation de la fonction d'utilité.

Il est clair que l'estimation ainsi obtenue n'est pas unique et qu'au minimum de θ correspond un ensemble de fonctions d'utilité "compatibles" avec les données obtenues (cf. sur ce type de problème Siskos (1983)).

La parenté de cette procédure avec la méthode UTA (cf. Siskos (1980), Jacquet-Lagrèze et Siskos (1982)) et les méthodes connues en marketing sous le nom de "trade-off" (cf. Johnson (1974), Bérault (1981)) est patente. Dans tous les cas, il s'agit d'analyser un ensemble de préférences exprimées sur un ensemble d'actions de référence (supposées soit bien connues, soit facilement analysables) pour aboutir à une ou plusieurs estimations.

Nous renvoyons le lecteur à Vedder (1973) pour une tentative de formalisation de ce type de situations. Il est cependant fort peu probable, à notre sens, qu'une analyse purement théorique permette de contourner ce problème. En effet, il est nécessaire de supposer un axiome d'existence d'une relation de préférence (aussi "faible" soit-elle, cf. A.3) pour parvenir à une représentation numérique. Que les attitudes de base soient peu structurées dans l'esprit du décideur ou que les techniques de recueil induisent un certain "bruit", ces problèmes sont susceptibles d'avoir des conséquences pratiques non négligeables. Les techniques d'estimation décrites au 1) sont en effet le plus souvent mises en oeuvre de façon à ce que, à un instant donné, l'estimation présente dépende des estimations passées. Cette technique présente en particulier l'avantage de permettre au décideur de concentrer son attention sur un groupe restreint d'attributs jouant un rôle central. Elle permet toutefois de propager les marges d'incertitude en "cascade". A titre d'exemple, considérons l'ensemble du dialogue rapporté par Keeney (1977) où il s'agit d'estimer une fonction d'utilité de type additif sur 11 attributs (cf. Tableau 2.6) (les données présentées ici portent sur la première estimation réalisée). Les estimations suivantes ont été réalisées :

- Estimation des fonctions d'utilité partielles (cf. figure 2.7)

$$\left.\begin{matrix} u_1(X_1) & u_2(X_7) \\ u_2(X_2) & u_8(X_8) \end{matrix}\right\} \text{Fonctions linéaires estimées sur 1 point}$$

$u_3(X_3)$, $u_4(X_4)$, $u_5(X_5)$, $u_6(X_6)$, $u_9(X_9)$, $u_{10}(X_{10}$, $U_{11}(X_{11})$: fonctions présentant de l'aversion pour le risque du type
$u(x) = b - a\ e^{-cx}$ estimées sur un point.

Tableau 2.6 : Attributs pris en compte dans l'étude de Keeney (1977)

Attributs	Unité de mesure	Niveaux extrêmes possibles	
		Pire	Meilleur
X_1 : Morts	Nombre de morts	700	100
X_2 : Utilisation permanente de terrain	Acres	2 000	0
X_3 : Utilisation temporaire de terrain	10^3 Acres	200	10
X_4 : Evaporation d'eau	10^{12} Gallons	1,5	0,5
X_5 : Pollution de SO^2	10^6 tonnes (US)	80	5
X_6 : Pollution solide	10^6 tonnes (US)	10	0,2
X_7 : Demande d'énergie thermique	10^{12} kW/h	6	3
X_8 : Déchets radioactifs	Tonne (métriques)	200	0
X_9 : Sécurité	Tonnes (US) de plutonium produites	50	0
X_{10} : Santé	Tonnes (US) de plomb dégagées	2 000	0
X_{11} : Production d'électricité	10^{12} kW/h	0,5	3

- Estimation de taux de substitution (après rangement des k_i) - Exemple : $(X_1 = 700, X_{10} = 0)$ I $(X_1 = 500, X_{10} = 2\ 000) \iff k_{10} = k_1 \times u_1(500)$. On a :

$$k_{10} = k_1\, u_1(500), K_{11} = k_1\, u_1(616), K_9 = k_{10}\, u_{10}(1\ 500), k_5 = k_{10}\, u_{10}(1\ 600)$$
$$k_8 = k_{10}\, u_{10}(1700), k_2 = k_8\, u_8(50), k_3 = k_8\, u_8(75), k_9 = k_8\, u_8(100),$$
$$k_6 = k_8\, u_8(150), k_7 = k_8\, u_8(180)$$

où les attributs X_1, X_{10} et X_8 sont successivement pris comme pivot.

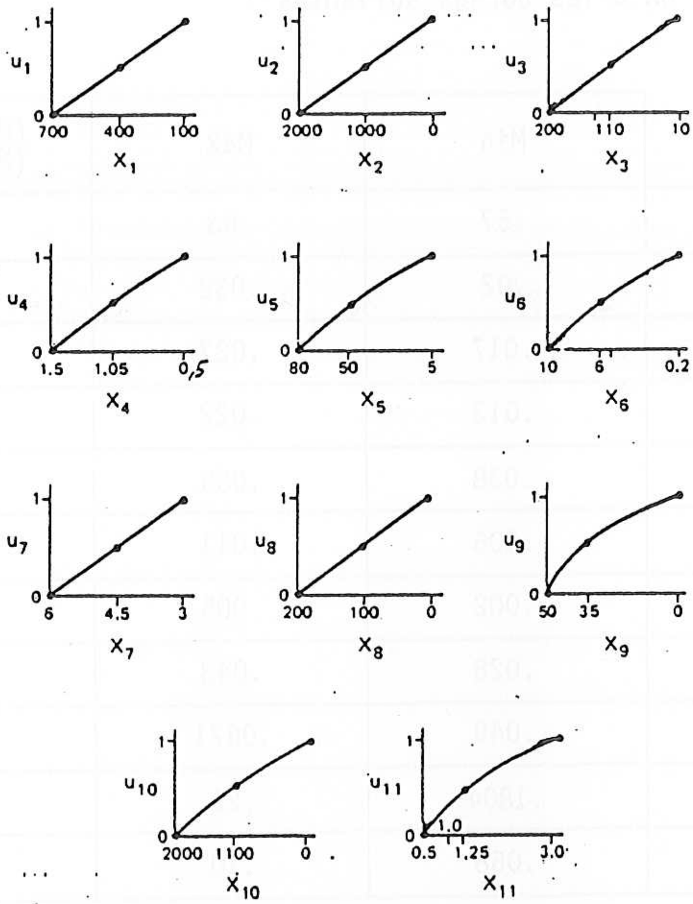


Figure 2.7 : Fonctions d'utilités partielles (source : Keeney (1977))

- Estimation de k_1

$$(\bar{X}_1, \underline{X}_2, \underline{X}_3, \ldots, \underline{X}_{11}) \; I \; \begin{cases} .6 & (\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3, \ldots, \bar{X}_{11}) \\ .4 & (\underline{X}_1, \underline{X}_2, \underline{X}_3, \ldots, \underline{X}_{11}) \end{cases}$$

d'où les valeurs des k_i :

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
k_i	.6	0,026	0,022	0,0175	.0467	0,00875	0,0035	0,035	0,058	.2	.084

$\Sigma\, k_i = 1{,}10.$

En supposant k_1 connu à ± 5 % près et chacun des taux de substitution à ± 2 % près, on a les bornes suivantes :

	Min	Max	$\frac{(Max - Min)}{(Max + Min)}$
k_1	.57	.63	.05
k_2	.02	.032	0,57
k_3	.017	.027	0,22
k_4	.013	.022	0,25
k_5	.038	.055	0,18
k_6	.006	.011	0,29
k_7	.002	.005	0,42
k_8	.028	.043	0,21
k_9	.049	.0671	0,15
k_{10}	.1804	.22	0,10
k_{11}	.068	.10	0,19

Les marges de variation auraient été encore bien supérieures si nous avions supposé les fonctions d'utilité mal définies dans un petit intervalle. Cet exemple permet de mieux mesurer l'ampleur nécessaire de l'analyse de sensibilité (nous reviendrons sur ce point au d). Mentionnons enfin que Eliashberg et Hauser (1981) ont tenté de formaliser le problème de l'estimation d'une fonction d'utilité comme un problème statistique d'estimation. Il suffit pour cela de considérer que la réponse obtenue à chacune des questions posées ne fournit pas une estimation précise des différents paramètres recherchés mais induit, sur l'ensemble des paramètres, une distribution de probabilité dont on a spécifié une forme fonctionnelle (en pratique, loi normale ou exponentielle). Les réponses obtenues sont ensuite utilisées pour estimer les paramètres de la distribution de probabilité. Il est alors possible de recourir à des techniques statistiques classiques pour obtenir des intervalles de confiance sur les paramètres de la fonction d'utilité ou la probabilité qu'une action ait une utilité supérieure à une autre. Bien que particulièrement élégant, le travail de Eliashberg et Hauser ne nous paraît pas présenter des avantages déterminants par rapport à une analyse de sensibilité classique. Leur procédure est en effet assez lourde et demande parfois de recourir à des techniques numériques. Dans un tel cas, l'interaction entre l'analyste et le décideur lors du processus de recueil est réduite à sa plus simple expression. Plus fondamentalement, ces techniques d'estimation supposent la forme fonctionnelle des fonctions d'utilité connues (c'est-à-dire qu'il a été possible de cerner auparavant, avec précision, la nature du goût ou de l'aversion pour le risque du décideur) alors qu'à notre sens, si l'on suppose les réponses fournies par le décideur entachées d'un "bruit aléatoire" (sans rentrer dans la question de savoir si ce bruit est dû aux perturbations induites par les techniques de recueil ou si il traduit une instabilité des attitudes de base), ce problème du choix ce la forme fonctionnelle la plus adéquate est crucial.

Keeney et Raiffa (1976) voient, dans les techniques classiques d'encodage qui imposent au décideur de répondre à des questions parfois délicates, un moyen d'"obliger le décideur à réfléchir sur ses préférences et à les structurer dans son esprit" (p. 190) en se penchant sur ses sentiments vis-à-vis des conséquences de la mise à exécution des actions. Il n'est pas contestable en effet que l'expression de ses "attitudes fondamentales" demande au décideur un travail de réflexion important qui contribue certainement à enrichir sa perception du problème. Cette maleutique (cf. la référence précise à Socrate dans Keeney et Raiffa (1976), p. 9) auquel l'analyste soumet le décideur (qui n'est pas sans rappeler la psychothérapie, cf. Fischhoff (1980)) doit s'analyser comme un processus de formation (on pourra consulter à ce sujet Howard (1980)) et, partant, de déformation, ce qui a des conséquences non négligeables sur la façon de concevoir le recueil des attitudes de base lors d'une étude d'aide à la décision. On peut en effet légitimement considérer (c'est principalement un acte de foi) que la réflexion difficile imposée au décideur lors du processus d'encodage ne se traduira pas simplement par une mise à jour d'attitudes "latentes" mais par un enrichissement de celles-ci pouvant, par exemple, remettre en cause des idées préconçues. Le type même de questions posées au décideur a, à notre sens, le même effet. Le recours à des loteries constituant des actions idéales simples pour raisonner le problème de décision constitue certainement une profonde modification des habitudes des décideurs qui semblent plus enclins, de façon "naturelle", à se situer par rapport à des actions réelles (cf. Hirsch, Jacquet-Lagrèze et Marchet (1978), Jacquet-Lagrèze et al (1978), Jacquet-Lagrèze et Marchet (1978)). Il est d'ailleurs assez naturel de considérer que l'analyste utilisant ce type de modèle, comme tous les analystes, perturbe et influence le processus de décision bien avant qu'il n'effectue sa prescription. Comme le remarque Roy (1983), chapitre 2 (voir aussi Roy (1981)), il est assez délicat de parler de neutralité ou d'objectivité de l'analyste. Cette remarque s'applique d'autant plus à ce modèle que, comme nous le verrons par la suite, les axiomes du modèle formel servent, au cours du processus de recueil, de "guide de cohérence" pour la "révélation" des préférences. Dans le cas où certaines des attitudes de base du décideur semblent incohérentes au regard des axiomes, l'analyste se doit de rechercher la "levée" de cette incohérence (par exemple en répétant certaines questions, en motivant le décideur, en recherchant des informations redondantes, etc.). La plupart des praticiens insistent généralement sur ce rôle pédagogique de l'analyste et sur les possibilités de manipulation qui en découlent (cf. Howard (1980), Keeney et Raiffa (1976), pp. 189-191). Sans bien sûr remettre en cause l'honnêteté intellectuelle et l'expérience des analystes, il convient toutefois de s'interroger sur l'intérêt et la possibilité de rechercher des attitudes de base stables dans un tel processus pédagogique. Dès lors que l'on renonce à supposer l'existence d'un ensemble d'attitudes de base stables et structurées, leur extrapolation aux actions réelles du problème n'est plus une simple conséquence logique des axiomes du modèle formel.

c) <u>L'extrapolation des attitudes de base</u>

Une fois supposé :

- que les attitudes de base sont conformes aux axiomes du modèle formel,

- que celles-ci sont suffisamment riches pour définir la fonction d'utilité sans ambiguïté et peuvent être appréhendées de façon opérationnelle,
- que le décideur souhaite se conformer aux axiomes A_1, A_2, A_3,

la validité de l'extrapolation des attitudes recueillies à l'ensemble des actions potentielles de l'étude d'aide à la décision est garantie par les théorèmes de représentation passés en revue au A. Pour Friedman et Savage (1948), le seul test "positif" de la théorie réside dans la confrontation des choix réels d'un décideur avec ceux déduits de l'extrapolation des attitudes de base préalablement recueillies. Cette question est donc principalement d'ordre empirique et nous y reviendrons plus longuement au 4. Mentionnons simplement que la validité de cette extrapolation dépend, de façon cruciale, de la nature des attitudes fondamentales recueillies sur la base d'actions idéales. Comme le notent Hull, Moore et Thomas (1973), la représentation des actions fictives sous forme de loterie (i.e. de jeu) est susceptible d'introduire des biais importants dans les réponses obtenues, la notion de jeu étant particulièrement chargée de considérations sociales, voire religieuses. Cette difficulté sera d'autant plus importante que ("à raison ou à tort") la perception des actions réelles par le décideur se fera davantage en termes d'imprécision, d'erreur ou d'indétermination qu'en termes d'incertitude ou de risque (cf. I.C). Le fait même de montrer au décideur l'intérêt de raisonner ses préférences pour le coût d'un réservoir à construire dans 10 ans, à partir de jeux monétaires simples, est significatif du rôle de formation et de déformation exercé par l'analyste (que le décideur se prête ou non à cette procédure).

Il convient ici de rappeler que, même dans les cas où les actions réelles sont perçues sur le même plan que les actions idéales, une littérature abondante a montré clairement que la statistique était une science rarement approximée par l'intuition (sur ces problèmes de perception des probabilités, nous renvoyons, outre les articles déjà cités, à l'imposant recueil d'articles publié récemment par Kahneman, Slovic et Tversky (1981) et à sa bibliographie). Raiffa (1967) voit précisément, dans les techniques d'encodage de l'analyse de la décision (et dans l'expérience de l'analyste), un moyen de contourner ces biais. Il est de fait incontestable que ces techniques ont souvent été mises en oeuvre dans le cadre d'études réelles avec succès. Mais, même si l'on admet qu'elles permettent d'éviter la présence de biais dans la perception des probabilités, elles n'autorisent une extrapolation des données recueillies (et donc n'ont d'intérêt en aide à la décision) que si les actions réelles sont perçues (et partant conçues) de la même manière que les actions idéales à ce stade du processus de décision, c'est-à-dire sous forme de distributions de probabilité sur un ensemble de conséquences et si le décideur souhaite que sa structure de préférence soit conforme à l'axiomatique du modèle formel. La première de ces deux conditions appelle une analyse principalement empirique, analyse qui sera probablement fortement dépendante d'un contexte social et culturel (cf. Wright et Philips (1983) et Philips et Wright (1977)). Le rôle crucial joué par l'acceptation des axiomes du modèle formel par le décideur mérite que leur statut soit discuté au sein du modèle d'aide à la décision.

d) Le rôle des axiomes

Les axiomes du modèle formel jouent, dans le modèle d'aide à la décision, un double rôle. Tout d'abord, comme le note Fishburn (1967), ils constituent un "guide de cohérence" pour le recueil des attitudes de base. Lorsqu'au cours du processus d'encodage le décideur émet des jugements incohérents (au regard des axiomes), l'analyste doit s'efforcer de promouvoir une meilleure réflexion sur les questions posées qui (c'est un acte de foi) doit permettre de parvenir à un ensemble d'attitudes de base parfaitement cohérentes avec A_1, A_2, A_3. Ceux-ci permettent de spécifier le type d'information permettant l'utilisation du modèle.

Les axiomes du modèle formel jouent également un autre rôle qui, pour être moins souvent évoqué, n'en est pas moins fondamental. Comme nous l'avons vu au c), la validité de l'extrapolation dépend de la volonté du décideur de raisonner son problème à l'aide d'une structure de préférence conforme aux axiomes. Ce rôle ne peut être tenu pour trivial puisqu'il est clair qu'il est impossible de demander au décideur s'il est d'accord avec l'ensemble des conséquences qu'entraînerait l'application des axiomes du modèle formel aux attitudes de base qu'il a exprimées. Pour que ce point ne soulève pas de difficulté, il faut que le décideur accepte le caractère normatif des axiomes (explicitement ou implicitement). Entre le recueil des attitudes de base et l'acceptation de la prescription par le décideur, il y a un "acte de foi" dans les axiomes. A notre connaissance, seul Howard (par exemple (1980)) reconnaît la nécessité du caractère normatif des axiomes dans le modèle d'aide à la décision (et non dans le modèle formel). Keeney (voir Keeney (1981), p. 387) la nie explicitement.

Ce point n'est pas spécifique à ce modèle. Dans tous les modèles d'aide à la décision, pour parvenir à une prescription, le décideur doit accepter de structurer ou de voir structurer ses préférences par rapport à certaines conventions ou normes. Au risque de contribuer à obscurcir la terminologie, nous dirons que l'acceptation de la prescription dépendra de la puissance normative de la convention proposée.

Juger de la plus ou moins grande force normative des axiomes du modèle formel n'est pas une chose aisée puisqu'elle renvoit au problème plus général de la rationalité qui a soulevé bien des malentendus (cf. la controverse entre Allais et l'"école américaine" dans Allais et Hagen (1979)). A ce titre, ce modèle présente un avantage non négligeable : celui de préciser clairement la nature de la convention proposée. Il est d'autre part indéniable que les axiomes A_1 et A_2 présentent un attrait normatif certain en première analyse. A_1 impose à la structure de préférence d'être complète et transitive tandis que A_2 semble constituer un critère particulièrement simple pour juger de deux actions complexes. Samuelson (1952) analyse l'axiome d'indépendance comme suit. Soit deux conséquences certaines a et b telles que $a \; P \; b$. Soit les deux loteries l et l' construites à l'aide de a et de b et d'une conséquence c, l (resp. l') donnant a (respectivement b) avec une probabilité α et c avec une probabilité $(1 - \alpha)$. Comme le montre le tableau 2.8, si l'événement ayant la probabilité $(1 - \alpha)$ se produit, alors 1 et 1' sont équivalentes tandis que si l'événement complémentaire se produit, la comparaison de 1 et de 1' se résume à celle de a et de b. Dès lors, l'axiome impose naturellement que 1 et 1' se comparent comme a et b.

Tableau 2.8

	α	$1 - \alpha$
1	a	c
1'	b	c

Cet axiome et son "acceptabilité normative a priori" a cependant été critiqué par Allais (1952) et Wold (1952) à l'aide d'exemples (voir également la controverse à ce propos dans Econometrica, octobre 1952, pp. 661 et ss. plus récemment quoique dans un cadre légèrement différent les implications normatives de l'axiome d'indépendance de Savage S_2 ont été sévèrement critiqués par Toulet (1982 a et b).

MacCrimmon (1968) a réalisé une expérience tendant à prouver que la plupart des individus ont tendance à "corriger" leur choix entrant en contradiction avec les axiomes du modèle formel. Cette expérience a été critiquée par Slovic et Tversky (1974), expérience 1, problème 1 qui montrent que seulement 6 % des individus acceptent de réviser des choix violant l'axiome d'indépendance après qu'il leur ait été présenté des arguments clairs en sa faveur (à l'opposé, 25 % des individus sont amenés à violer ce principe une fois critiqué devant eux). L'étude récente de MacCrimmon et Larson (1979) fournit des indications similaires en montrant l'attrait limité exercé par le principe d'indépendance sur de nombreux individus (cf. Figures 4 et 6 p. 358 et 368). Pour sa part, l'axiome A_3 impose des restrictions structurelles qui, dans la pratique, sont vérifiées la plupart du temps.

De façon générale, on peut dire que moins la "distance" entre la "capacité cognitive" du décideur et celle impliquée par les axiomes sera grande, plus leur caractère normatif sera "naturel". Il est cependant clair que cette exigence implique que l'aide à la décision pose d'autant moins de problèmes qu'elle est moins utile. En effet, si la capacité cognitive du décideur est proche de celle supposée par les axiomes, l'application de ceux-ci ne pourra contribuer que faiblement à l'enrichissement de la perception du problème. L'idéal serait bien sûr que les principes de transitivité, de complétude et d'indépendance soient contenus "en germe", même dans des structures de préférences "issues" d'une faible acuité cognitive et perceptive. Pour ce qui est de la transitivité qui est, a priori, le moins contestable de ces trois principes, l'argument de la "pompe à argent" déjà évoqué plus haut souligne le caractère "irréaliste" des structures non transitives qui exposent le décideur à de lourdes pertes monétaires. L'analyse axiomatique détaillée du Burros (1974) montre cependant que le décideur peut vouloir adopter, de façon cohérente, une structure de préférence intransitive sans pour autant encourir de pertes monétaires significatives, sous des hypothèses très générales. Pour Burros, le seul prix à payer pour maintenir une intransitivité est l'abandon des méthodes issues de la théorie de l'utilité pour résoudre le problème de décision considéré. Burros montre de plus que, des trois types d'intransitivités susceptibles de se produire :

- préférences cycliques : p P q, q P r, r P p,
- préférences semi-cycliques : p P q, q P r, p I r (ou a I b ssi non a P b et non b P a),
- indifférence non transitive : p I q, q I r, p P r,

seul le premier est susceptible de conduire à des situations "indécidables". Une fois écarté l'argument de la "pompe à argent" niant la possibilité d'intransitivité, il devient nécessaire de se demander si la transitivité des relations de préférence et, en particulier, de la relation P apparaît "naturellement" quel que soit le niveau d'acuité perceptive du décideur.

Une analyse intuitive pourrait faire croire que oui. En effet, la relation de dominance stochastique du premier ordre entre les actions correspondant à un niveau de perception extrêmement faible (cf. Fishburn (1978), dans ce cas, on montre que la classe des fonctions d'utilité compatibles avec le classement obtenu est celle de toutes les fonctions d'utilité monotones, continues et bornées) est transitive de même que les préférences très riches supposées par le modèle formel de la théorie de l'utilité (la classe des fonctions d'utilité compatibles avec le classement est réduite à une seule fonction définie à une transformation linéaire positive près ; il n'existe plus, dans ce cas, d'actions incomparables). Pour étudier ce problème, Bisdorff (1981) a mis en place une typologie des différents niveaux possibles d'acuité perceptive du décideur, chacun d'entre eux correspondant à des opérations perceptives (mutation, addition, partition, etc.) de complexité croissante permettant de comparer les actions. En se plaçant délibérément dans une perspective d'"apprentissage" d'opérations perceptives permettant au décideur d'enrichir progressivement les comparaisons qu'il peut effectuer entre les différentes actions, Bisdorff montre clairement que si la transitivité est présente aux deux niveaux extrêmes de la capacité cognitive du décideur, les situations intermédiaires font apparaître des cas de préférence semi-cycliques (au sens de Burros), une incomparabilité venant perturber la transitivité de P (cf. Bisdorff (1981), p. 167-169). Donner une démonstration complète des résultats de Bisdorff sortirait de notre propos. Mentionnons simplement que cette semi-cyclicité, correspondant à des niveaux d'acuité perceptive intermédiaires, traduit le fait que, pour être comparées, deux actions doivent avoir suffisamment de points communs mais lorsque $p\ P\ q$ et $q\ P\ r$, rien n'indique que p et r soient suffisamment proches pour être comparées. Dès lors, il est naturel que $p\ P\ q$ et $q\ P\ r$ puissent impliquer, selon les cas, $p\ P\ r$ ou $p\ R\ r$ (où R est une relation d'incomparabilité distincte de l'indifférence).

Le travail de Bisdorff permet de relativiser l'attrait normatif des axiomes du modèle formel en montrant que leur intérêt tient surtout à leur effet "divinatoire". On peut montrer en effet que, sous des hypothèses très générales, les structures préférentielles impliquées par une acuité perceptive élevée incluent les structures induites par des perceptions plus frustres. Dès lors, l'utilisation du modèle d'aide à la décision conduit à faire apparaître des situations de préférence "intuitives", ce qui est très satisfaisant pour un décideur. Cependant, la structure de préférence révélée par l'application du modèle d'aide à la décision peut contenir une part d'arbitraire non négligeable si la connaissance du problème par le décideur reste faible. Si l'effet "divinatoire" de ces méthodes contribue certainement à l'acceptation de ces méthodes dans la pratique, sa reconnaissance ne peut qu'inciter l'homme d'étude à relativiser le caractère normatif des axiomes du modèle (nous renvoyons à Bisdorff (1981), pp. 171 et ss. pour une discussion très éclairante de l'attrait normatif respectif des axiomes A_1 et A_2 ; voir également Slovic, Fischhoff et Lichenstein (1977), p. 22 pour une discussion de l'effet divinatoire).

Les quelques pistes de réflexion qui viennent d'être mentionnées ne permettent bien sûr pas de juger définitivement du caractère normatif des axiomes du modèle formel. Il reviendra à chaque décideur, en dernière analyse, soit d'accepter, soit de refuser de voir sa structure de préférence se conformer à cette convention qui, comme nous l'avons déjà mentionné, a le mérite d'être clairement explicitée. Du point de vue de l'analyste, elle présente l'avantage d'être opérationnelle puisqu'elle permet, de façon simple, de définir une fonction d'utilité. L'interprétation de cette fonction n'est cependant pas dépourvue d'ambiguïté dans la pratique.

e) L'interprétation de la fonction d'utilité

Les techniques d'encodage des fonctions d'utilité multiattributs décrites au 1) présentent, comme avantage principal, de distinguer radicalement le problème de l'attitude vis-à-vis du risque du décideur incluse dans les fonctions d'utilité partielles u_i et le problème de la substitution inter-attributs qui, une fois les fonctions d'utilités définies, est traduite par les coefficients k_i. L'interprétation de ces paramètres ne soulève en théorie aucune difficulté. Un exemple simple permet cependant de souligner l'interaction importante entre ces paramètres. Considérons une fonction d'utilité additive définie sur deux attributs X_1 et X_2. On a :

$$u(x_1, x_2) = k_1 \times u_1(x_1) + (1 - k_1)\ u_2(x_2).$$

Soit un ensemble A d'actions dont les éléments sont évalués de façon déterministe sur X_1 et de façon probabiliste sur X_2. Si la fonction d'utilité $u_1(x_1)$ ne traduisait que l'attitude vis-à-vis du risque du décideur sur l'attribut X_1, une modification de $u_1(x_1)$ ne devrait pas perturber le classement des actions de A pourvu que $u_2(x_2)$ reste constante et que k_1 soit modifié de façon appropriée. Il est facile de montrer qu'il n'en va pas ainsi. Considérons en effet quatre actions a_1, a_2, a_3 et a_4 telles que :

$$a_1\ I\ a_2 \quad \text{et} \quad a_3\ I\ a_4$$

avec

$$a_1(x_1^1, \underset{\sim}{x}_2^1), a_2(x_1^2, \underset{\sim}{x}_2^2), a_3(x_1^3, \underset{\sim}{x}_2^3), a_4(x_1^4, \underset{\sim}{x}_2^4).$$

On a :

$$k_1\ u_1(x_1^1) + (1 - k_1)\ E\ (u_2, \underset{\sim}{x}_2^1) = k_1\ u_1(x_1^2) + (1 - k_1)\ E\ (u_2, \underset{\sim}{x}_2^2) \quad \text{et}$$
$$k_1\ u_1(x_1^3) + (1 - k_1)\ E\ (u_2, \underset{\sim}{x}_2^3) = k_1\ u_1(x_1^4) + (1 - k_1)\ E\ (u_2, \underset{\sim}{x}_2^4).$$

Supposons que $u_1(x_1)$ devienne $u_1'(x_1)$. Peut-on trouver un coefficient k_1' tel que :

$$k_1'\ u_1'(x_1^1) + (1 - k_1')\ E\ (u_2, \underset{\sim}{x}_2^1) = k_1'\ u_1'(x_1^2) + (1 - k_1')\ E\ (u_2, \underset{\sim}{x}_2^2)$$
$$k_1'\ u_1'(x_1^3) + (1 - k_1')\ E\ (u_2, \underset{\sim}{x}_2^3) = k_1'\ u_1'(x_1^4) + (1 - k_1')\ E\ (u_2, \underset{\sim}{x}_2^4)\ ?$$

Si la réponse est positive, on doit avoir :

$$k_1 = \frac{E(u_2,\underset{\sim}{x}_2^2)-E(u_2,\underset{\sim}{x}_2^1)}{u_1(x_1^1)-u_1(x_1^2)-E(u_2,\underset{\sim}{x}_2^1)+E(u_2,\underset{\sim}{x}_2^2)} = \frac{E(u_2,\underset{\sim}{x}_2^4)-E(u_2,\underset{\sim}{x}_2^3)}{u_1(x_1^3)-u_1(x_1^4)-E(u_2(\underset{\sim}{x}_1^3)+E(u_2,\underset{\sim}{x}_2^4)}$$

et

$$k_1' = \frac{E(u_2,\underset{\sim}{x}_2^2)-E(u_2,\underset{\sim}{x}_2^1)}{u_1'(x_1^1)-u_1'(x_1^2)-E(u_2,\underset{\sim}{x}_2^1)+E(u_2,\underset{\sim}{x}_2^2)} = \frac{E(u_2,\underset{\sim}{x}_2^4)-E(u_2,\underset{\sim}{x}_2^3)}{u_1'(x_1^3)-u_1'(x_1^4)-E(u_2,\underset{\sim}{x}_1^3)-E(u_2,\underset{\sim}{x}_2^4)}.$$

On voit bien que si $u_1'(x_1)$ est telle que :

$$u_1'(x_1^1) - u_1'(x_1^2) > u_1(x_1^1) - u_1(x_1^2) \quad \text{et}$$
$$u_1'(x_1^3) - u_1'(x_1^4) < u_1(x_1^3) - u_1(x_1^4),$$

k_1' ne pourra être défini de façon à respecter les deux relations d'indifférence. Un exemple de cette situation est mentionné à la figure 2.9. L'interprétation des fonctions d'utilité partielles ne peut donc se faire indépendamment de références extérieures à l'attitude vis-à-vis du risque du décideur. Une fonction d'utilité de type Von Neumann et Morgenstern, bien que conceptuellement différente des fonctions de "valeur" ordinales et des fonctions d'utilité traduisant des différences (ou des intensités) de préférence (cf. Keeney et Raiffa (1976), Fishburn (1970), s'en rapproche à bien des égards. Ainsi, Keeney et Raiffa (1976, th. 6.1) prouvent que, lorsqu'une fonction de valeur additive $v(x)$ existe sur un ensemble $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ $(n \geq 3)$, il suffit qu'un des attributs soit indépendant en utilité de son complément pour que la fonction d'utilité prenne une des trois formes suivantes :

$$u(x) \sim - e^{-cv(x)}$$
$$u(x) \sim v(x)$$
$$u(x) \sim e^{cv(x)}$$

et qu'en particulier, si $u(x)$ est additive, alors $u(x)$ et $v(x)$ sont identiques. L'interprétation intuitive de ce résultat est immédiate. En effet, les conditions permettant l'additivité de $v(x)$ introduisent une

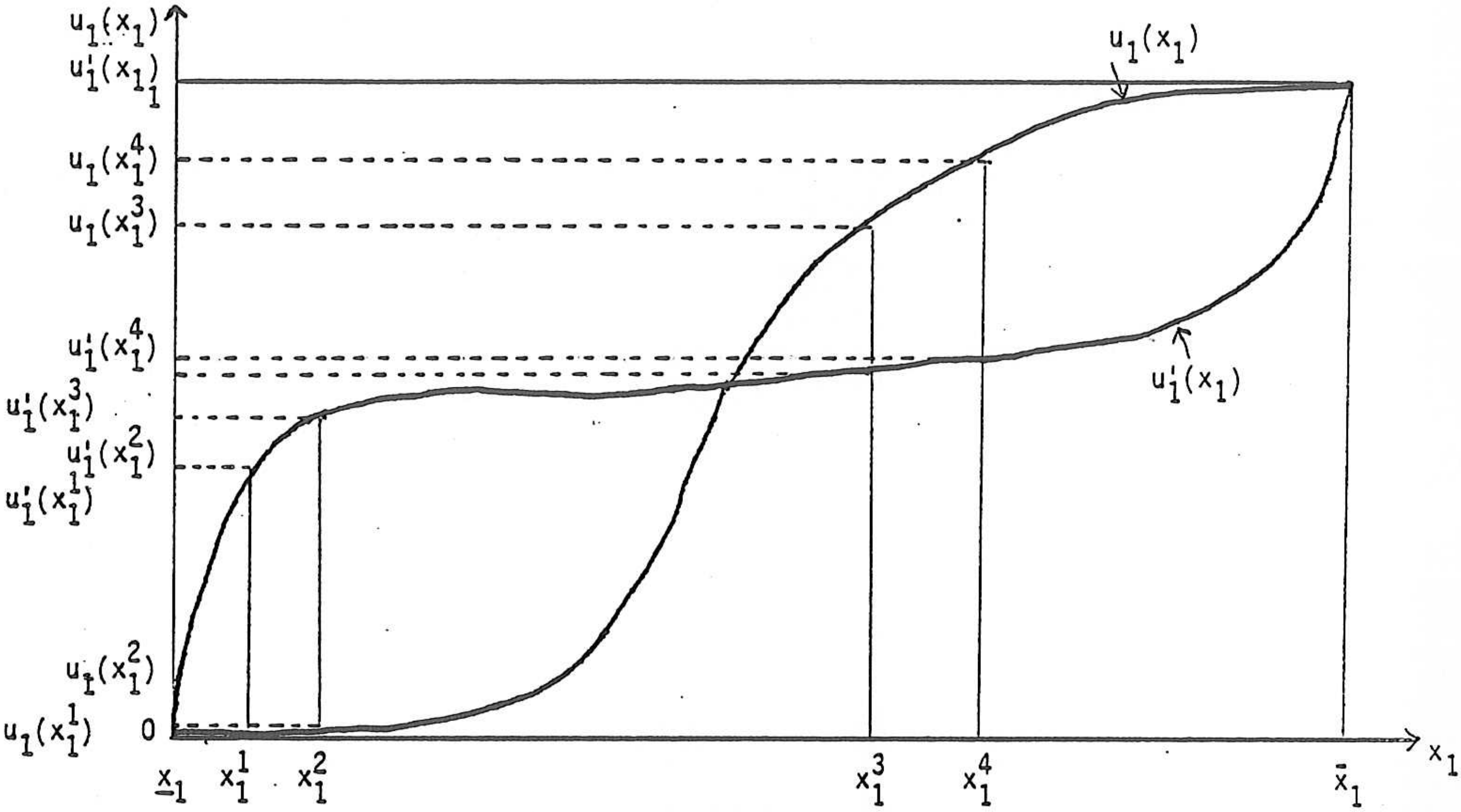
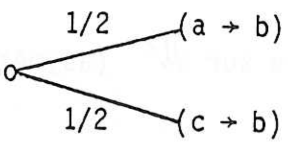


Figure 2.9 : Interprétation des coefficients k_i d'une fonction additive

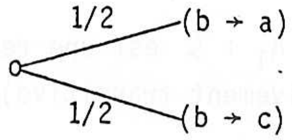
une certaine cardinalité puisque, dans ce cas, les fonctions de valeurs partielles sont intrinsèquement liées les unes aux autres (cf. th. 5.2 et 5.3 de Fishburn (1970)) étant définies à une transformation linéaire près si l'ensemble des conséquences est infini. De même, Sarin (1982) (*) (voir également Roy (1982), chap. 9) prouve que, moyennant un élargissement assez naturel de l'axiome d'indépendance, une fonction d'utilité linéaire peut être utilisée pour représenter une relation de comparaison des différences de préférence pourvu que celle-ci présente un minimum de cohérence avec la relation de préférence entre les actions. L'exemple rapporté plus haut illustre l'opinion de Bell (1981) qui inclut explicitement des considérations de différences de préférence dans la notion d'aversion pour le risque. L'intérêt de ces travaux n'est pas seulement théorique. Comme le note Sarin (1982), la reconnaissance des liens entre une fonction d'utilité et une fonction mesurant les différences de préférence accroît considérablement la variété des techniques d'encodage possible de ces

(*) Sur ce point, ou pourra également consulter Krzysztofowicz (1983a).

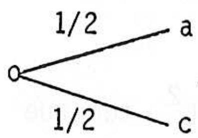
fonctions. Bien que l'interprétation de la notion de différence de préférence soulève des difficultés importantes dans un cadre théorique (cf. Fishburn (1970), chap. 6), son intérêt est évident dans la pratique (et, en particulier, une fois abandonnée l'hypothèse d'actions mutuellement exclusives, cf. Roy (1983), chap. 9) et semble assez intuitive. L'attrait normatif de cette notion n'est d'ailleurs pas négligeable. Sarin (1982) et Bell (1981) utilisent le raisonnement suivant pour justifier les liens possibles entre les préférences sur des loteries et les différences de préférence. Considérons trois conséquences a, b et c telles que la différence de préférence entre a et b soit considérée comme équivalente à la différence de préférence entre b et c. En d'autres termes, le décideur est prêt, de la même façon, à passer de a à b ou de b à c (nous dirons que ces mutations sont équivalentes). Considérons la loterie donnant, avec des probabilités 1/2, soit a, soit c. La comparaison de cette loterie avec b peut s'interpréter comme une loterie imposant de passer de a à b avec une probabilité 1/2 et de c à b avec une probabilité 1/2. Or, par définition, passer de a à b est équivalent à passer de b à c et passer de c à b est équivalent à passer de b à a (pourvu que la comparaison de ces "mutations" présente un minimum de cohérence). S'il est légitime de remplacer une mutation par une mutation équivalente au sein d'une loterie, la loterie



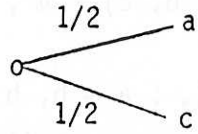
est équivalente à



cette dernière loterie pouvant s'interpréter comme une mutation de b à la loterie



. Dès lors, passer de



à b est équivalent à la mutation inverse et donc les deux composantes de cette mutation doivent être indifférentes. Il semble assez naturel de penser qu'un décideur, prêt à accepter de façon normative A_1, A_2 et A_3, sera également prêt à faire sien ce raisonnement (même si, comme le remarque Bell, des considérations ayant trait à l'anxiété et au regret interviennent également dans les situations de risque).

En d'autres termes, si l'on peut supposer qu'une accroissement de "rationalité" accroît également la cohérence des choix du décideur, il n'est pas étonnant de penser que les choix en situation de risque et les comparaisons de différences de préférence présentent des points communs. L'axiomatique de Sarin montre précisément que la rationalité supposée par les axiomes du modèle formel de la théorie de l'utilité est assez proche d'un niveau qui garantirait une cohérence très étendue. Roy (1979-1983), chapitre 9, p. 381 conjecture que l'axiomme :

R_1 : $\forall\ (a, b, c) \in \mathcal{M}$ ensemble de mélanges, alors
$$a \sim \frac{1}{2} b + \frac{1}{2} c \iff (b, a) \overset{*}{\sim} (a, c)$$

est suffisant pour établir le lien entre les comparaisons simples entre actions et les comparaisons de différences de préférences permettant, "moyennant des hypothèses additionnelles peu restrictives", de faire, d'une fonction d'utilité de Von Neumann et Morgenstern, une fonction mesurant également les différences de préférence. Ce sera l'objet du théorème suivant :

<u>Théorème 2.11</u> (*) : Soit $\mathcal{M}$ un ensemble de mélanges et $\overset{*}{\succ}$ une relation binaire sur $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$. On définit sur $\mathcal{M}$ une relation binaire $\succ$ par : $a \succ b \iff (a, b) \overset{*}{\succ} (b, b)\quad \forall\ (a, b) \in \mathcal{M}^2$. Si les axiomes suivants sont vérifiés :

A_1 : $\overset{*}{\succ}$ est une relation d'ordre faible sur $\mathcal{M}^2$ (asymétrique et négativement transitive),

A_2 : $(a \succ b)$ et $0 < \alpha < 1 \Rightarrow \alpha a + (1 - \alpha) c \succ \alpha b + (1 - \alpha) c$ $\forall\ (a, b, c) \in \mathcal{M}^3$,

A_3 : $a \succ b,\ b \succ c \Rightarrow \exists\ (\alpha, \beta) \in]0, 1[^2$ tel que
$$\alpha a + (1 - \alpha) c \succ b$$
$$b \succ \beta a + (1 - \beta) c,$$

A_4 : $(a, b) \overset{*}{\succ} (c, d) \Rightarrow (d, c) \overset{*}{\succ} (b, a)\quad \forall\ a, b, c, d \in \mathcal{M}^4$,

(*) Ces axiomes ne sont bien sûr pas indépendants. Pour une analyse plus sophistiquée, nous renvoyons à Vansnick (1984) ou à Camacho (1983) pour une approche différente.

A_5 : $(a, b) \overset{*}{\succsim} (c, d) \Rightarrow (a, c) \overset{*}{\succsim} (b, d)$ $\forall$ $a, b, c, d \in \mathcal{A}^4$,

A_6 : $\forall$ $(a, b) \in \mathcal{A}^2$, $\exists$ $c \in \mathcal{A}$ tel que $(a, c) \overset{*}{\sim} (c, b)$,

A_7 : $\forall$ $(a, b, c, d) \in \mathcal{A}^4$, $a \succ b$ et $(a, b) \overset{*}{\succsim} (c, d) \Rightarrow \exists$ $e \in \mathcal{A}$ tel que $a \succ e \succ b$ et $(a, e) \overset{*}{\succsim} (c, d)$,

A_8 : $\forall$ $(a, b, c, d) \in \mathcal{A}^4$: $a \succ b$ et $(a, b) \overset{*}{\succsim} (c, d) \Rightarrow \exists$ $(e, f) \in \mathcal{A}^2$ tel que (a, e) M^n (f, b) et $(c, d) \overset{*}{\succsim} (a, e)$ pour $n \in N$ avec M^n une relation binaire sur $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ définie récursivement par :

$$(a, b)\ M^1\ (c, d) \iff (a, b) \overset{*}{\sim} (c, d) \text{ et } b \sim c$$
$$(a, b)\ M^{n+1}\ (c, d) \iff \exists\ (e, f) \text{ tel que } (a, b)\ M^n\ (e, f) \text{ et } (e, f)\ M^1\ (c, d),$$

$A_9 = R_1$ $\forall$ $(a, b, c) \in \mathcal{A}^3$, $a \sim \frac{1}{2} b + \frac{1}{2} c \iff (b, a) \overset{*}{\sim} (a, c)$,

A_{10} : $\exists$ $(h, b) \in \mathcal{A}^2$ tel que $h \succ b$ et tel que $h \succsim a \succsim b$ $\forall$ $a \in \mathcal{A}$,

alors il existe une fonction u à valeur réelle telle que

$$(a, b) \overset{*}{\succ} (c, d) \iff u(a) - u(b) > u(c) - u(d) \tag{2.24}$$
$$u(\alpha a + (1 - \alpha) b) = \alpha u(a) + (1 - \alpha) u(b) \tag{2.25}$$

et définie à une transformation linéaire positive près.

Remarques

L'axiome A_1 implique que $\succ$ soit un ordre faible sur $\mathcal{A}$. Supposons en effet $a \succ b$ et $b \succ a$. D'après la définition de $\succ$:

$$a \succ b \iff (a, b) \overset{*}{\succ} (b, b) \overset{A_4}{\iff} (b, b) \overset{*}{\succ} (b, a).$$

Or $b \succ a \iff (b, a) \overset{*}{\succ} (a, a)$.

On a donc, d'après A_1, $(b, b) \overset{*}{\succ} (a, a)$. D'après A_5, on a donc $(b, a) \overset{*}{\succ} (b, a)$, ce qui viole A_1. $\succ$ est donc asymétrique (on a de plus $(a, a) \overset{*}{\sim} (b, b)$ $\forall\, (a, b) \in \mathcal{A}^2$). Pour prouver la transitivité négative de $\succ$, supposons :

non $a \succ b$, non $b \succ c$ et $a \succ c$.

<u>Premier cas</u> : $b \succ a$, $c \succ d$ et $a \succ c$. On a $(b, a) \overset{*}{\succ} (a, a)$ et $(c, b) \overset{*}{\succ} (b, b)$. Or, $(a, a) \overset{*}{\sim} (b, b)$, d'où $(c, b) \overset{*}{\succ} (a, a)$. D'après A_5, $(c, a) \overset{*}{\succ} (b, a)$ et, d'après A_1, $(c, a) \overset{*}{\succ} (a, a)$, ce qui viole $a \succ c$.

<u>Deuxième cas</u> : $b \sim a$, $c \succ b$ et $a \succ c$. On a de même $(c, a) \overset{*}{\succ} (b, a)$. Or, $b \sim a \Longleftrightarrow$ non $(a, b) \overset{*}{\succ} (b, b)$ et non $(b, a) \overset{*}{\succ} (a, a)$. On a donc $(b, a) \overset{*}{\sim} (a, a)$ et $(c, a) \overset{*}{\succ} (a, a)$, ce qui viole $a \succ c$.

<u>Troisième cas</u> : $b \succ a$, $c \sim b$ et $a \sim c$. $(b, a) \overset{*}{\succ} (a, a) \Longleftrightarrow (b, a) \overset{*}{\succ} (c, c) \Longleftrightarrow (c, c) \overset{*}{\succ} (a, b) \Longleftrightarrow (c, a) \overset{*}{\succ} (c, b)$. Or, $(c, b) \overset{*}{\sim} (b, b)$, d'où $(c, a) \overset{*}{\succ} (a, a)$, ce qui viole $a \succ c$.

<u>Quatrième cas</u> : $b \sim a$, $c \sim b$ et $a \succ c$. On a $(b, a) \overset{*}{\sim} (a, a)$ et $(c, b) \overset{*}{\sim} (b, b)$, d'où $(c, b) \overset{*}{\sim} (a, a)$. A_1 et A_5 impliquent (cf. Lemme 1 de Fishburn (1970b)) $(c, a) \overset{*}{\sim} (b, a)$, d'où $(c, a) \overset{*}{\sim} (a, a)$, ce qui viole $a \succ c$.

C.Q.F.D.

Les axiomes A_1, A_2 et A_3 impliquent donc ceux du théorème 2.1. Les axiomes A_1, A_4, A_5, A_6, A_7 et A_8 sont les axiomes de Suppes et Zines (1963) garantissant l'existence d'une fonction vérifiant (2.24) et définie à une transformation linéaire près (cf. Fishburn (1970), pp. 84-86) ou, pour un corps d'axiomes similaire, Krantz et al. (1971), p. 151 et ss.). L'axiome A_9 est proposé par Roy (1983) tandis que A_{10} assure que le support de l'ensemble de mélange considéré est borné.

On trouvera la démonstration de ce théorème à l'annexe 3.

Le théorème 2.11 fournit donc, avec l'axiome A_9-R_1, une condition simple et testable empiriquement, si l'on peut donner une interprétation opérationnelle claire de la notion de différence de préférence pour juger de la cohérence de la relation de préférence sur un ensemble de mélange et d'une relation d'intensité de préférence. Outre les travaux de Sarin (1982), il faut noter que c'est Allais qui, le premier, se préoccupa de ce problème (1952), Annexe 5 et surtout (1979), Annexe B. La complexité de sa démonstration est assez importante. Sa preuve repose sur un "axiome d'isovariation cardinale" qu'il est possible d'interpréter de la manière suivante en utilisant nos notations :

<u>Axiome d'isovariation cardinale</u> (Allais (1979), p. 481) :

$\forall$ (p, q) $\in \mathcal{M}^2$, $\exists$ (r, s) $\in \mathcal{M}^2$ tel que
(p, r) $\overset{*}{\sim}$ (q, s).
De plus, $\forall\, \alpha \in [0,1]$, on a :
$(\alpha\, p + (1 - \alpha)\, q,\ \alpha\, r + (1 - \alpha)\, s) \overset{*}{\sim} (p, r)$.

Cet axiome nous semble à la fois plus restrictif et beaucoup moins intuitif que A_9-R_1.

Même si l'interprétation des concepts intervenant dans le modèle n'est pas toujours évidente, l'analyse de la décision fournit un cadre permettant d'opérer des analyses de sensibilité du classement obtenu vis-à-vis des paramètres dont la quantification paraît sujette à caution (cf. Keeney (1980), chap. 8). Tous les auteurs insistent sur le caractère crucial de cette analyse de sensibilité permettant d'apprécier la plus ou moins grande probance des résultats. Cette analyse peut porter sur :

- les caractéristiques générales du problème étudié : ensemble des actions potentielles, ensemble des attributs ;
- l'évaluation des conséquences des actions ;
- les paramètres intervenant dans la fonction d'utilité globale (k_i, u_i).

Les deux premiers points ne sont pas spécifiques au modèle étudié et nous ne nous y attarderons pas, bien que, dans la plupart des études, ils aient une influence déterminante.

De façon générale, la fonction d'utilité globale s'exprime sous la forme $u = f(u_1, u_2, \ldots, u_n, k_1, k_2, \ldots, k_m)$ (cf. théorème 2.10). L'analyse de sensibilité peut donc s'opérer à la fois sur les fonctions d'utilité partielles et sur les coefficients k_i. Si, dans la plupart des cas, on peut estimer connues les caractéristiques générales de la fonction (aversion ou goût pour le risque constant, croissant ou décroissant - nous reviendrons sur ce point à la fin de ce chapitre) déterminant sa forme fonctionnelle, il convient de s'interroger sur la probance des réponses obtenues de la part du décideur ayant permis d'estimer précisément la fonction. Comme nous l'avons vu au b), il est assez courant de devoir se contenter, pour évaluer ces paramètres, d'une plage de variation parfois assez étendue. Il en va de même pour ce qui concerne les k_i ; les taux de substitution et les réponses aux questions en termes de loteries, nécessaires pour leur estimation, n'étant jamais connus avec une précision qui rendrait superflue leur remise en cause. Il importe de souligner ici que l'estimation de ces paramètres est fortement dépendante des estimations réalisées antérieurement (cf. l'exemple du choix énergétique donné au b). La figure 2.10 résume l'ensemble de ces dépendances dont il faut tenir compte lors de l'analyse de sensibilité, ce qui rend sa complexité importante si l'on souhaite effectuer un balayage systématique des valeurs plausibles de l'ensemble des paramètres. L'analyse de sensibilité doit s'opérer à partir de données de départ fournies par le décideur :

- les réponses à des loteries unidimensionnelles permettant d'estimer les u_i ;
- les réponses à des questions en termes de taux de substitution ;
- les réponses à des loteries multidimensionnelles permettant l'estimation des k_i.

Comme nous l'avons déjà mentionné au b), les techniques d'estimation utilisées permettent la propagation en cascade des marges d'incertitude. La figure 2.10 fait apparaître que seule une analyse conjointe de tous les paramètres peut permettre d'apprécier la robustesse des résultats finaux.

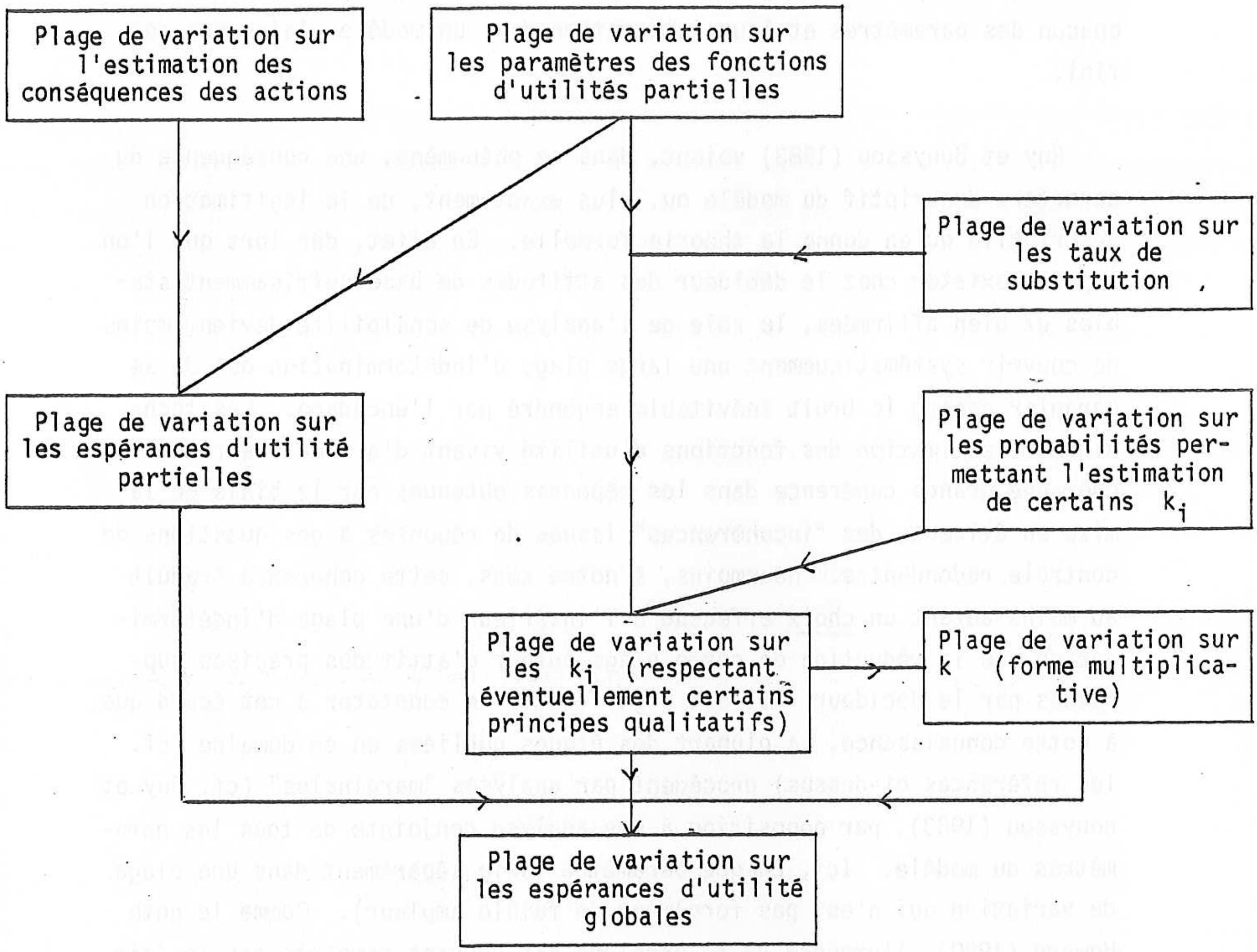


Figure 2.10 : Schéma général de l'analyse de sensibilité

On constate cependant, à la lecture de la plupart des études, que l'analyse de sensibilité est souvent effectuée directement sur le résultat des calculs (valeur des k_i) et non sur les données de départ. De plus, ces études (cf. par exemple celle de Keeney (1979) résumée au B.2) analysent généralement chaque paramètre séparément (u_i, k_i, évaluation), ne balayant ainsi qu'une faible portion de la plage de variation possible compte-tenu des marges d'imprécision fixées au départ. Il est clair que cette pratique peut avoir des conséquences non négligeables en conférant une probance indue à un résultat et, en tout état de cause, limite singulièrement les possibilités offertes par la quantification explicite de chacun des paramètres et leur intégration dans un modèle clairement défini.

Roy et Bouyssou (1983) voient, dans ce phénomène, une conséquence du caractère descriptif du modèle ou, plus exactement, de la légitimation descriptive qu'en donne la théorie formelle. En effet, dès lors que l'on suppose exister chez le décideur des attitudes de base suffisamment stables et bien affirmées, le rôle de l'analyse de sensibilité devient moins de couvrir systématiquement une large plage d'indétermination que de se garantir contre le bruit inévitable engendré par l'encodage. Les techniques d'estimation des fonctions d'utilité visent d'ailleurs à rechercher une grande cohérence dans les réponses obtenues par le biais de la mise en évidence des "incohérences" issues de réponses à des questions de contrôle redondantes. Néanmoins, à notre sens, cette cohérence traduit au moins autant un choix effectué à l'intérieur d'une plage d'indétermination que la réduction de cette plage autour d'attitudes précises supposées par le décideur. Il est significatif de constater à cet égard que, à notre connaissance, la plupart des études publiées en ce domaine (cf. les références ci-dessus) procèdent par analyses "marginales" (cf. Roy et Bouyssou (1983), par opposition à une analyse conjointe de tous les paramètres du modèle. Ici, chaque paramètre varie séparément dans une plage de variation qui n'est pas forcément de faible ampleur). Comme le note Howard (1980), l'urgence de ce problème est souvent tempérée par le fait qu'en pratique, les actions étudiées sont suffisamment contrastées pour que leur classement ne soit pas sensibles à des modifications conjointes des paramètres du modèle (*). C'est pourquoi nous ne présentons pas, dans ce travail, d'exemple numérique à propos d'une analyse de sensibilité concernant une étude publiée. La remarque de Howard ne doit cependant pas

---

(*) Il est cependant bon de noter que l'analyse de sensibilité ne vise pas seulement à gérer la part d'arbitraire entachant l'évaluation de certains paramètres mais également à fournir au décideur des informations concernant certaines "zones critiques" où de faibles variations sur les paramètres perturbent profondément les résultats du modèle. Ce dernier type d'information peut être pertinent, même si les actions sont très contrastées.

faire oublier qu'il n'y a aucune raison, a priori, pour renoncer à une analyse de sensibilité s'attachant à explorer, de manière systématique, l'espace des paramètres que l'on estime plausible. Ceci est d'autant plus justifié qu'à notre sens, la pratique d'analyse de sensibilité marginale traduit bien plus le caractère descriptif du modèle que la reconnaissance du fort contraste pouvant éventuellement exister entre les actions à étudier.

De plus, comme nous le verrons au 4, l'hypothèse d'attitudes de base stables est loin d'être corroborée par les études empiriques dans ce domaine.

4. Quelques études empiriques pour juger du modèle d'aide à la décision

Comme nous venons de le voir, la probance prescriptive de la "Decision Analysis" dépend, de façon cruciale, de l'existence, chez le décideur, d'un ensemble d'attitudes de base cohérentes vis-à-vis du problème et de la possibilité de les recueillir de façon opérationnelle. Nous présentons et analysons, dans cette section, un certains nombre d'études se rattachant à cette question.

Peu après la publication de l'ouvrage de Von Neumann et Morgenstern, des économistes (Mosteller et Nogee (1951)) et des psychologues (Davidson, Suppes et Siegel (1957)) se sont préoccupés de savoir s'il était possible de déterminer empiriquement des fonctions d'utilité à partir de choix effectués par des sujets en laboratoire. L'attention des économistes s'est cependant principalement portée, durant cette période, sur l'attrait normatif et le réalisme de l'axiome d'indépendance du modèle formel (cf. B.2) constituant la principale différence entre la rationalité supposée par Von Neumann et Morgenstern et la conception "ordinaliste" classique de la rationalité. Avec l'apparition, dans les années 1960 (cf. B.1) de la "Decision Analysis", les efforts de recherches empiriques s'orientèrent presque exclusivement vers le problème de l'encodage des probabilités subjectives, les premières études empiriques semblant avoir prouvé la possibilité de construire des fonctions d'utilité de façon opérationnelle (quitte à les définir à partir de préférences stochastiques, cf. Mosteller et Nogee (1951)). En dépit des nombreuses applications et succès des techniques de la decision analysis, le problème de l'existence et du recueil des attitudes de base a retrouvé une actualité certaine depuis une dizaine d'années. Ces études récentes laissent à penser que la construction d'une fonction d'utilité est une tâche plus délicate que ce que les premiers travaux n'avaient laissé penser. On peut schématiquement regrouper ces études autour de deux pôles : le premier concerne la perception et la manipulation des probabilités par les décideurs ; le second leurs attitudes de base face à des choix simples comportant un risque.

a) La perception des probabilités

De très nombreuses études ont été consacrées tant aux techniques d'encodage des probabilités (Speltzer et Von Holtein (1975)) qu'au problème de perception par les individus d'un environnement comportant des aspects aléatoires. Ces questions sont importantes à un double titre. Premièrement, la théorie formelle suppose que l'ensemble des actions jouisse des propriétés d'en ensemble de mélanges (cf. A). Autrement dit, la perception des actions et de leurs conséquences doit être conforme aux principes du calcul des probabilités. Ensuite, il est nécessaire de pouvoir affecter une probabilité aux diverses conséquences d'une action avant de pouvoir appliquer les principes de l'utilité espérée.

Un nombre très important d'études émanant pour la plupart de psychologues expérimentaux ont clairement montré les faibles dispositions de la plupart des individus à émettre des jugements conformes aux principes de base du calcul des probabilités. Ces jugements reposent le plus souvent sur des heuristiques hautement simplificatrices, conduisant à des incohérences importantes (cf. Tversky et Kahneman (1973) et (1980), Kahneman et Tversky (1972), Bar Hillel (1973) et (1980), la synthèse de Tversky et Kahneman (1974), la plupart des études récentes étant contenues dans le recueil de Kahneman, Slovic et Tversky (1981)). Nous avons pris le parti de ne pas revenir sur ces études désormais classiques. Mentionnons cependant que ces constatations éclairent d'un jour nouveau la position de Ponsard (1972) et de Roy (1983), refusant de voir, dans l'incertitude, la seule forme possible de non déterminisme. On peut en effet interpréter les études citées ci-dessus comme impliquant le recours à une méthodologie prescriptive pour lutter contre les biais apparaissant "naturellement" (c'est en particulier la position de Keeney (1982)) ou bien comme traduisant une incapacité plus radicale des décideurs à ne considérer le non-déterminisme qu'en recourant au calcul des probabilités. Pour Roy (79-83), ce dernier point est le plus important. En effet, les techniques d'encodage des fonctions d'utilités reposent toutes sur la comparaison d'actions "idéales" prenant la forme de loteries, définies sams ambiguïtés, ce qui est susceptible d'introduire de nombreux "biais" si ces préférences sont extrapolées à des actions réelles dont la perception inclut, en plus de probabilités, une large part d'imprécision et de mauvaise détermination. Il ne s'agit pas ici de critiquer l'usage d'actions "simples" dans le processus d'encodage (Keeney et Raiffa (1976), p. 18 et 19 répondant par avance à cette critique) mais de constater qu'il existe une césure importante entre des actions "idéales" et des actions "réelles" (nous entendons ici par action "réelle" non pas une action potentielle pour le problème considéré mais une action perçue avec la même marge d'imprécision et d'indétermination qu'une action potentielle). Bien que les actions "réelles" soient souvent "complexes", nous verrons, au chapitre suivant, que la méthodologie de Roy (1983) vise précisément à structurer les préférences d'un décideur sur la base d'actions "réelles".

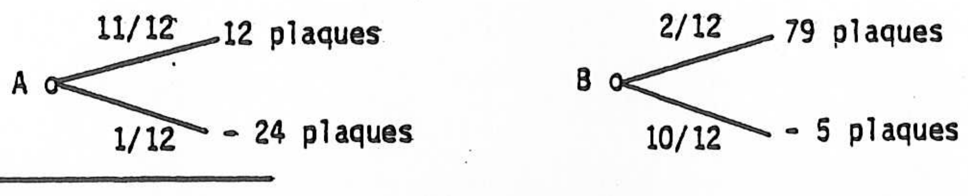
b) La perception d'actions simples et le recueil des attitudes de base (*)

Le but de cette section est de passer en revue un certain nombre d'études empiriques récentes dont les résultats peuvent être interprétés en termes d'existence et/ou de stabilité d'attitudes de base de décideurs.

(*) Nous ne traiterons, dans cette section, que du problème du recueil des attitudes de base et nous n'aborderons pas les études empiriques traitant d'hypothèses généralement admises en théorie de l'utilité concernant en particulier l'aversion pour le risque (sur ce sujet, cf. Schoemaker (1980) et sa bibliographie et Krzysztofowicz (1983b).

Nous ne reviendrons pas ici sur le problème de l'axiome d'indépendance (cf. A.2) dont de nombreuses études ont montré qu'il était violé même dans la comparaison d'actions simples. Plus fondamentalement, nous montrerons que c'est l'existence même d'attitudes de base stables qui pose problème dans certaines situations. La "philosophie" de la théorie de la décision, restant à bien des égards très proche de celle de la théorie économique néo-classique, fait que ce domaine n'ait été abordé que par des psychologues expérimentaux (à de rares exceptions près). Le nécessaire abandon d'une perspective "positiviste" (celle de la théorie économique), dès lors que l'on aborde le domaine des méthodes prescriptive, n'a malheureusement pas conduit les chercheurs opérationnels à réévaluer, sous cet angle nouveau, les "principes ordinalistes" à la base de la théorie formelle et de sa traduction opérationnelle en termes d'attitudes de base. Le "monopole" de fait des psychologues en ce domaine rend cependant parfois difficile l'interprétation de leurs résultats dans une perspective prescriptive.

Les résultats expérimentaux les plus troublants, dans une optique prescriptive, concernant l'extrême instabilité de jugements de préférence émis sur des actions idéales très proches de celles utilisées pour encoder les fonctions d'utilité. L'exemple le plus frappant de cette instabilité reste le phénomène de "renversement de préférence" (preference reversal) établi par Lindman (1971), Lichtenstein et Slovic (1971) et (1973) et confirmé par Grether et Plott (1979) (*) (voir cependant Von Winterfeld (1980) qui semble ne pas avoir rencontré ce phénomène). Ce "renversement de préférence" traduit le fait que la préférence d'un individu entre deux loteries dépend, de façon cruciale, de la façon dont on lui demande de l'exprimer (soit en termes de préférence, soit en termes du prix minimum auquel il serait prêt à vendre la loterie). A titre d'exemple, Lichtenstein et Slovic (1973) ont proposé à des joueurs (dans un casino à Las Vegas) de considérer les deux loteries suivantes :



(*) Sur ce sujet, on pourra également consulter Reilly (1982), Pommerehne et al (1982), Loomes et Sugden (1983) et la synthèse de Lichtenstein et Slovic (1983).

où la valeur de la plaque est 1/4 \$. Le jeu A présente une quasi-certitude de gain mais des pertes éventuelles (mais improbables) importantes. Le jeu B permet de gagner une somme importante mais avec une probabilité assez faible. La majorité des joueurs s'est déclarée indifférente entre A et B tandis que 88 % des joueurs n'acceptaient de vendre B qu'à un prix (minimal) supérieur au prix de A (de plus, 87 % des joueurs déclarant préférer A, le vendaient à un prix inférieur à B). Ce phénomène, comme le notent Grether et Plott (1979), ne remet pas seulement en cause l'existence d'attitudes de base stables dans le cadre d'une théorie prescriptive se fondant sur la théorie formelle de l'utilité espérée mais, plus généralement, pose un problème sérieux à tous les modèles utilisant la notion même de préférence de façon descriptive. Leur étude détaillée tend à prouver que la seule explication plausible de ce phénomène reste la sensibilité extrême des réponses obtenues au mode de recueil employé (et non une mauvaise perception des probabilités ou une absence de motivation des sujets). Une observation similaire est faite par Schoemaker et Kurenther (1979), Table 6, p. 13, Hershey et Schoemaker (1980), Hershey, Kurenther et Schoemaker (1982), expériences 4 et 5 qu'ils regroupent sous l'appellation "effet du contexte" (sur les attitudes de base). Ces études constatent que les préférences entre deux loteries peuvent être grandement affectées selon qu'elles sont présentées sous forme de jeu ou sous forme d'assurance. Hershey et Schoemaker (1980), table 1, p. 121 constatent que 80,5 % de leurs sujets préfèrent L_2 à L_1 :

- L_1 : vous courez le risque de perdre 1 000 \$ avec une probabilité de 1/100,
- L_2 : vous pouvez vous assurer pour 10 \$ contre ce risque

tandis que seulement 56,1 % des sujets préfèrent L_3 à L_1 où :

- L_3 : vous perdez 10 \$ avec certitude.

Tout se passe comme si la référence à une "assurance" faisant naître, chez certains sujets, une forte aversion pour le risque en faisant référence à certaines "normes sociales" favorables au fait de s'assurer. D'importants "effets du contexte" dus au mode de présentation des loteries ont également été observés par Conrath (1973) dans un tout autre cadre (voir également Slovic, Fischhoff et Lichtenstein (1982), Tversky et Kahneman (1981) et Zagorski (1981) et (1975)). Dans la même veine, Tversky (1975), Kahneman et Tversky (1979), Hershey, Kurenther et Schoemaker (1982) montrent que de nombreux facteurs affectent les attitudes de base de décideurs (souvent ces décideurs décident en laboratoire, cependant de nombreuses études laissent à penser que ce problème n'est pas déterminant, cf. Schoemaker (1980), chap. I et (1982)) de façon tout à fait contraire aux axiomes du modèle formel empêchant tout recueil opérationnel de celles-ci. Parmi ces facteurs, citons (outre les effets du contexte) :

- l'évaluation des actions par rapport à un point de référence qu'il est possible de manipuler (Tversky (1975), Fig. 1, 2 et 3, Kahneman et Tversky (1979), Payne et al. (1980) et (1981) et également, mais moins nettement, Herskey, Kurenther et Schoemaker (1982), exp. 3 ;
- la surévaluation des conséquences certaines (Kahneman et Tversky (1979), problems 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8) ;
- l'"isolation" des parties communes aux différentes loteries (Kahneman et Tversky (1979), problems 10, 11, 12).

L'implication, pour le modèle prescriptif, de ces études n'est cependant pas évidente pour au moins deux raisons principales (*). Premièrement, les tenants de la decicion analysis insistent sur la grande difficulté inhérente au processus d'encodage des fonctions d'utilité (cf. Keeney (1977)). En particulier, celui-ci implique que le décideur prenne conscience, de façon interactive, de l'attrait normatif des axiomes sous-jacents et implique d'avoir recours à de nombreuses questions redondantes avant de parvenir à un ensemble d'attitudes de bases cohérentes. Dans les études décrites plus haut, les sujets remplissent librement leurs questionnaires et, pour des raisons aisément compréhensibles, il n'existe aucune interaction entre ceux-ci et l'expérimentateur (homme d'étude). En conséquence, ces études prennent en compte des préférences "intuitives" susceptibles d'être modifiées par une interaction efficace insistant sur le caractère

(*) On trouvera dans Arrow (1983) une analyse de l'impact de ces phénomènes pour la théorie économique.

normatif des axiomes. On est d'autant plus fondé à s'interroger sur cette question que Kahneman et Tversky (1979), p. 277 et Tversky (1975), p. 217 considèrent explicitement une telle éventuellement fortement probable et justifient leur modèle sur un plan uniquement descriptif, laissant entendre que ce n'est que parce que les décideurs n'ont pas l'opportunité de remarquer leurs incohérences qu'ils s'écartent des axiomes du modèle formel de la théorie de l'utilité. En second lieu, les "effets dus au contexte" paraissent assez naturels (on ne se comporte pas de la même façon dans un casino et dans le cabinet d'un agent d'assurance) et tous les auteurs (Keeney et Raiffa (1976), p. 50 et ss., Keeney (1980)) insistent sur la nécessité de définir sans ambiguïté les conséquences des différentes actions, le contexte de la décision allant de soi dans le cadre d'un problème réel (on peut espérer, de la part du décideur, qu'il ne réponde pas aux questions sous forme de comparaisons de loteries comme s'il s'agissait d'un jeu d'argent alors qu'il paie très cher une équipe d'étude pour résoudre un problème d'importance, d'ailleurs sans rapport avec sa fortune personnelle).

Ces observations empiriques ne peuvent cependant pas être ignorées et il y a de bonnes raisons de penser que les effets qu'elles mettent en évidence (dans des situations particulièrement favorables) ne sont pas complètement absents lors d'une étude réelle. Tout d'abord, l'interprétation de leurs résultats est en parfaite conformité avec la façon dont les psychologues perçoivent la façon dont l'esprit humain traite l'information, usant d'heuristiques simplificatrices et ne pouvant manipuler un grand nombre d'informations à la fois (Miller (1965)). Ainsi par exemple, le phénomène du renversement de préférence tient probablement au fait que, lorsque B est évaluée à son prix de vente, le lot important de 79 plaques constitue un point de départ qui est révisé à la baisse pour tenir compte de l'éventualité de la perte de 5 plaques. Au contraire, le fait d'émettre un jugement de préférence sur A et B simultanément ne fait pas entrer les mêmes mécanismes de traitement de l'information et, dans ce cas, le choix se porte sur la loterie donnant le gain avec la probabilité la plus forte (qui, de plus, est proche de l'unité). Ces phénomènes d'ancrage constituent, semble-t-il, une constante dans la plupart des comportements humains (cf. pour une autre illustration Kahneman et Tversky (1974). De même, l'effet de référence est parfaitement compatible avec ce que les psychologues nous ont appris du fonctionnement de l'appareil sensoriel humain, sensible avant tout aux valeurs relatives et non absolues. Il faut donc admettre au minimum que, dans la plupart des cas, l'obtention d'attitudes de base stables et cohérentes ne se fera qu'au prix d'une lutte contre des comportements "naturels" chez à peu près tous les sujets (voir à ce propos Raiffa (1967) pour ce qui concerne les biais dans la perception des probabilités. Il semble que l'on ne puisse pas apprendre à lutter contre ces tendances, même si l'on est conscient de leur existence).

De plus, même si l'on conteste le réalisme de certaines situations dans lesquelles les sujets sont immergés, ces études révèlent l'extrême difficulté qu'éprouvent un grand nombre de personnes à percevoir des actions sous forme de loteries indépendamment de toute autre chose (effet de contexte et de référence). Il s'ensuit, bien que dans le cadre d'une étude d'aide à la décision le contexte général soit à peu près clair, que l'on ne peut être jamais certain d'avoir recueilli des attitudes de base indépendamment des circonstances même de leur recueil. Il conviendra donc d'être particulièrement attentif à celles-ci si l'on souhaite encoder les attitudes indépendamment de facteurs parasites (et donc s'assurer, dans une certaine mesure, que le décideur ne refusera pas en bloc la prescription ne correspondant pas à ses goûts fondamentaux). Il convient, en dernier lieu, d'insister sur la probance qu'il convient de donner à ces études. Il est d'usage, particulièrement parmi les chercheurs opérationnels et les économistes, d'être extrêmement sceptiques vis-à-vis des études expérimentales en laboratoire. Si certaines études en laboratoire (précisément réalisées par des chercheurs opérationnels ou des économistes) paraissent sujettes à caution, il serait vain de tenter de nier l'expérience accumulée par la communauté des psychologues depuis de très nombreuses années sur la conception et la conduite de ces études en laboratoire (*).

Ces effets, non conformes aux axiomes de la théorie et traduisant une mauvaise perception d'actions sous forme de loteries, restent présents si

---

(*) On pourra consulter à ce sujet Lichtenstein et Slovic (1983) à propos de cette controverse.

l'on s'intéresse au processus d'encodage d'une fonction d'utilité (utilisant les techniques classiques décrites plus haut) en laboratoire. Il convient de noter, en premier lieu, que le domaine sur lequel la fonction d'utilité est encodée joue un rôle très important, directement en liaison avec l'effet de référence. Tversky (1974) et Hershey, Kurenther et Schoemaker (1982), exp. 3, Payne et al. (1980) et (1981), Jaffray et Cohen (1982) notent qu'une fonction d'utilité encodée à l'aide de loteries faisant intervenir des pertes (c'est-à-dire des valeurs inférieures au point de référence, statu quo ou niveau d'aspiration) tend à présenter un degré de goût pour le risque bien supérieur aux fonctions encodées à l'aide de loteries ne comprenant que des gains (*). De plus, si l'on cherche à encoder une fonction d'utilité non sur des "flux" (gains ou pertes) mais sur des "stocks" (patrimoine), on parvient rarement à expliquer les choix effectués par un individu "autour" de son patrimoine présent.

Dans les études d'aide à la décision, le domaine d'encodage de la fonction d'utilité est généralement déterminé par le domaine des valeurs prises par les conséquences des actions à l'étude, ce qui tend à amoindrir cette difficulté. Certains choix effectués semblent pourtant pouvoir entraîner des conséquences au regard de ce phénomène. A titre d'exemple, Keeney et Nair (1977) encodent la fonction d'utilité pour le coût de différentes centrales nucléaires en considérant le coût différentiel des sites par rapport au site le moins coûteux. Il est légitime de se demander si la fonction obtenue aurait été identique si le point de référence adopté avait été le site le plus cher parmi ceux étudiés.

A notre connaissance, la première étude systématique pouvant s'interpréter comme traduisant une grande instabilité des attitudes de base au cours d'un processus d'encodage d'une fonction d'utilité est due à Allais. Ses résultats se fondent sur une étude menée en 1952 mais dont les résultats n'ont été publiés partiellement qu'en 1979 (Allais (1979), Appendix C).

(*) Cette constatation remet en cause également la traditionnelle hypothèse d'aversion pour le risque dans le domaine des pertes.

Bien que, dans sa version actuelle, l'interprétation de ces résultats soit particulièrement délicate, il semble ressortir de ceux-ci que les fonctions d'utilité estimées à l'aide de la méthode de la conséquence variable (cf. B.1, index B.1/2) diffèrent sensiblement de celles estimées à l'aide de la probabilité variable (index B_{200}). Allais constate que les fonctions estimées par la méthode de la conséquence variable ne présentent pas de points d'inflexion sur le domaine considéré et sont généralement concaves, le modèle de la probabilité variable produisant des fonctions ayant une forme en S très marquée (Allais (1979), Chart 7 à 15, p. 646 et ss.). Il convient cependant de noter que ces fonctions d'utilité pour la monnaie ont été encodées en faisant intervenir des sommes d'argent (*) et des probabilités (de 0,25 à 0,999, 5 estimations différentes étant effectuées à 0,9 ; 0,98 ; 0,99 et 0,999 pour l'index B_{200}) qui semblent difficilement appréhendables. En tout état de cause, seule la publication de l'intégralité des résultats de cette étude (qui a déjà fait couler beaucoup d'encre, cf. Allais et Hagen (1979)) permettra de porter une appréciation globale sur sa portée et sa validité.

Cette sensibilité de la forme des fonctions d'utilité au type de méthodes d'encodage utilisé rencontrée par Allais a récemment été mise en évidence par Hershey, Kurenther et Schoemaker (1982), MacCord et de Neufville (1982) et Kamarkar (1978) de façon plus probante. Hershey, Kurenther et Schoemaker (1982), expérience 1 constatent que la méthode de la conséquence variable produit des fonctions d'utilité présentant généralement plus de goût pour le risque que la méthode de la probabilité variable (l'attribut étudié était des pertes monétaires). MacCord et de Neufville (1982) confirment une telle influence de la méthode. Leur étude présente un double avantage par rapport à celle de Hershey, Kurenther et Schoemaker (1982). Tout d'abord, chacun de leurs 23 sujets a été interviewé séparément et on a procédé, pour chacun d'entre eux, à l'encodage d'une fonction d'utilité pour les gains monétaires (de 0 à 10 000 $) selon les deux méthodes. Il semble ensuite que ces interviews individuels aient permis de faire réagir les individus sur leur choix entrant en contradiction avec

---

(*) De 1 000 F à 1 000 000 000 F de 1952 pour l'index B.1/2.

la théorie formelle et ainsi de faire entrer en jeu l'"attrait normatif" des axiomes. MacCord et de Neufville (1982), p. 13 et p. 17 mentionnent cette possibilité sans toutefois décrire dans quelle mesure elle a joué sur les résultats. On peut résumer leurs résultats de la manière suivante :

- La méthode utilisée pour encoder la fonction d'utilité a une influence cruciale sur sa forme (sur un point, les différences peuvent aller jusqu'à 100 %).
- Cette influence ne peut en aucun cas s'interpréter comme un bruit aléatoire dans les réponses obtenues. En effet :
- La méthode de la probabilité variable donne une fonction d'utilité se situant au-dessous (resp. au-dessus) de celle donnée par la méthode de la conséquence variable pour les individus présentant de l'aversion (resp. du goût) pour le risque (cf. MacCord et de Neufville (1982) à propos de la façon dont cette classification a été opérée).
- Les fonctions obtenues à l'aide de la méthode de la conséquence variable sont très sensibles aux probabilités choisies comme référence. Que les individus présentent du goût ou de l'aversion pour le risque, plus la probabilité d'obtenir le gain le plus élevé est importante, plus la fonction d'utilité présente des valeurs élevées pour une même conséquence (cf. MacCord et de Neufville, fig. 2 et 3).

Cette dernière constatation est parfaitement compatible avec les phénomènes d'ancrage mis en évidence à propos du phénomène de renversement de préférence.

Les résultats de Hershey, Kurenther et Schoemaker (1982) se comparent difficilement avec ceux de MacCord et de Neufville puisque les premiers s'intéressent exclusivement à des pertes monétaires et les seconds à des gains. La présence de l'"effet de référence" laisse supposer que les comportements sont probablement très différents dans ces deux zones. De plus, Hershey, Kurenther et Schoemaker (1982) n'analysent pas leurs résultats selon l'attitude pour le risque de leurs sujets. En faisant cependant l'hypothèse de l'effet de miroir" (reflection effect) (cf. Kahneman et Tversky (1979), problèmes 3', 4', 7', 8' mais, pour une analyse critique, voir Hershey et Schoemaker (1980)), on peut conclure des résultats de Hershey, Kurenther et Schoemaker que, dans le domaine des gains, la méthode de la conséquence variable aurait donné lieu à des fonctions d'utilité présentant plus d'aversion pour le risque que celles obtenues à l'aide de la méthode de la probabilité variable, ce qui est parfaitement compatible avec les données obtenues par MacCord et de Neufville. Ce point mériterait de nouvelles études.

Au premier abord, ces constatations empiriques sont particulièrement troublantes. La théorie formelle n'interprète en effet, en aucune façon, la nature des conséquences sur lesquelles les préférences sont exprimées. Il s'ensuit que toutes les méthodes d'encodage passées en revue plus haut sont théoriquement équivalentes et devraient conduire à des fonctions d'utilité semblables, éventuellement à un bruit aléatoire près. Il est dès lors légitime de se demander si les fonctions d'utilité encodées lors d'études d'aide à la décision ne traduisent pas avant tout l'influence des techniques d'estimations employées. Au regard de ces constatations, de nombreuses extensions descriptives de la théorie de l'utilité ont été proposées, souvent compatibles avec un grand nombre d'études empiriques (cf. Kahneman et Tversky (1979), Karmarkar (1979), Handa (1977) (*) et les théories faisant intervenir la notion de regret, par exemple Loomes et Sugden (1982) (**)) sans qu'aucune n'offre d'explication convaincante de l'instabilité radicale des attitudes de base révélées par l'effet du contexte. En tout état de cause, l'attrait normatif et prescriptif de ces extensions "descriptives" reste faible. Fischoff, Goiten et Shapira (1982), p. 331 concluent de ces études qu'il est possible que nous n'ayons pas de préférences structurées. A un niveau fondamental, nos valeurs peuvent être incohérentes. A ce propos, MacCord et de Neufville notent (1982), p. 17 que les réponses obtenues à leurs questions étaient assez stables dans le temps tout en restant en violation avec la théorie de l'utilité. Cette stabilité des réponses à des questions en termes

(*) Voir aussi les articles récents de Chew (1983) et Munera et de Neufville (1983).

(**) On pourra également consulter Bell (1982).

d'"équivalent certain" traduit, à notre sens, le fait qu'un même contexte (la question) "déclenche" l'application d'heuristiques stables permettant de traiter l'information et non l'existence d'attitudes ou de préférences stables dans l'esprit du décideur. Cette distinction peut paraître spécieuse. Il convient cependant d'insister sur le fait que les préférences exprimées ne sont stables que parce qu'elles résultent de l'application d'un même mécanisme. Seul ce point de vue permet, à notre sens, d'expliquer pourquoi des violations systématiques de principes ayant un attrait normatif important tel que la transitivité sont susceptibles d'être prédites et reproduites (cf. Tversky (1969)). L'attrait et l'élégance des axiomes de la théorie de l'utilité nous laissent penser qu'aucun décideur n'accepterait, à un instant donné, de voir ses préférences les violer grossièrement.

Qu'en est-il alors de la pratique des études d'aide à la décision ? Il convient de remarquer tout d'abord qu'aucune des études citées plus haut ne fait un usage systématique de "l'art" nécessaire pour encoder une fonction d'utilité (cf. Keeney (1977), voir cependant la tentative de MacCord et de Neufville). Il est a priori possible de nier toute valeur à ces études en-dehors de la description du comportement intuitif d'individus dans des conditions de laboratoire. Cette critique nous semble partiellement justifiée et il serait très souhaitable d'établir des protocoles d'expérience faisant largement usage de l'attrait normatif des axiomes par la discussion des incohérences, de questions de contrôle redondantes, etc. Les résultats cités plus haut semblent toutefois tellement fondamentaux (et, dans une certaine mesure, intuitifs comme pour l'effet du contexte) qu'il est fort improbable qu'ils ne se retrouvent pas (même amoindris) dans les études d'aide à la décision. Pour bien comprendre la pratique de ces études, il faut réaliser que, lorsque la phase d'encodage proprement dite des fonctions d'utilité commence, le gros du travail est déjà réalisé. Le plus souvent, ce travail a en effet consisté à déterminer préalablement les caractéristiques générales des préférences du décideur vis-à-vis de l'attribut considéré en termes d'attitude vis-à-vis du risque. On sait en effet (cf. B.1) que différents types d'attitudes assez naturels conduisent à réduire considérablement le nombre de degrés de liberté dans le choix de la fonction d'utilité en spécifiant une forme fonctionnelle précise ($u(x) = a\,x + b$, $u(x) = a\,e^{cx} + b$, $u(b) = (x + b)^c$, etc.). Dès lors, si l'on est parvenu à cerner d'assez près ces caractéristiques générales, l'estimation proprement dite de ces coefficients implique de ne recourir qu'à un nombre extrêmement limité de questions sous forme de loteries, a priori peu sujettes à tous les effets décrits plus haut (dans le cas d'une fonction d'utilité de type exponentiel, une seule estimation permet de spécifier complètement la fonction. Si l'estimation est unique, il n'y a aucune risque d'incohérence) et sur lesquelles il est possible de concentrer l'attention du décideur. Le problème est donc le plus souvent déplacé de l'estimation proprement dite à la recherche des attitudes générales vis-à-vis du risque. Il est bien entendu hors de question d'envisager de tester complètement une hypothèse de type : "l'aversion pour le risque du décideur est constante sur l'attribut considéré" qui impliquerait un nombre infini de questions, à supposer que les préférences du décideur soient suffisamment structurées pour y répondre (hypothèse a priori peu réaliste). Dès lors, le problème se ramène non pas à une attitude descriptive cherchant à rendre compte de la manière la plus fine possible d'attitudes de base mais à "négocier", avec le décideur, la structuration de ses préférences sur la base d'une convention d'ordre principalement qualitatif. On voit alors que, si les études d'aide à la décision ne sont pas pleinement sujettes aux phénomènes décrits plus haut, ce n'est qu'au prix d'un renversement de perspective assez important entre une attitude descriptive et une attitude que Roy et Bouyssou (1983) ont qualifié de "constructive". Ces derniers concluent de leur étude que la présence du modèle formel ne confère de légitimité particulière au modèle de la "Decision Analysis" que dans une démarche descriptive. Or, celui-ci ne peut fonctionner pleinement dans la pratique que s'il découle d'une logique constructive comme la plupart des modèles d'aide à la décision.

Il n'est pas ici question pour nous de vouloir nier l'intérêt du modèle de la "Decision Analysis" dans une démarche constructive. La réalisation de nombreuses études, couronnées de succès, doit, au contraire, amener à la conclusion opposée. Cependant, dès lors que l'on se situe dans une démarche constructive, il est nécessaire de considérer que la méthode qui vient d'être décrite n'est pas la seule concevable. Son fonctionnement dépend, pour une bonne part, de la volonté du décideur d'adopter telle ou telle attitude vis-à-vis du risque pour juger d'actions évaluées sous forme de distributions de probabilités. Nous verrons au chapitre suivant que d'autres points de départ sont possibles pour aider le décideur à structurer ses préférences vis-à-vis d'actions réelles. Ces conventions répondront au double souci d'être mieux adaptée à la comparaison d'actions réelles ne pouvant se résumer à des distributions de probabilité et d'être plus facilement interprétable que celle de la théorie de l'utilité.

En conclusion, il nous semble important de souligner que le modèle de la Decision Analysis ne tire pas son intérêt de la description d'"attitudes de base" dont tout laisse à penser qu'elles sont, la plupart du temps, instables, voire inexistantes, mais, au contraire, du type de convention qu'elle propose au décideur pour bâtir ses préférences.

CHAPITRE III

UNE DEMARCHE CONSTRUCTIVE D'AIDE A LA DECISION : LES "METHODES DE TYPE ELECTRE"

Nous nous sommes intéressés, dans le chapitre précédent, à des méthodes fondées sur une théorie formelle qui leur conférait une légitimation que nous avons qualifiée, plus haut, de "descriptive" même si, en fait, elles ne présentaient d'intérêt qu'en tant qu'outils de structuration et de construction d'un système de préférence pour le décideur (ce que nous avons appelé plus haut une démarche "constructive").

Dans ce chapitre, nous traiterons de méthodes ne se fondant sur aucune théorie formelle de représentation de structures de préférences et dont la légitimation est exclusivement d'ordre "constructif". Dans une première section, nous nous attacherons à préciser plus avant ce que recouvre une démarche constructive en aide à la décision. Nous présenterons, dans une deuxième section, quelques exemples types de méthodes constructives avant de nous interroger successivement sur deux des caractéristiques essentielles de ces méthodes : le caractère partiellement non compensatoire de l'agrégation qu'elles effectuent et la façon dont elles prennent en compte les phénomènes "non-déterministes" (cf. chapitre I) au moyen de seuils.

Il convient cependant de noter que nous avons pris le parti, dans ce chapitre, de n'aborder que les approches constructives "appartenant" à ce que nous avons appelé, au chapitre I, l'"Ecole Française" (pour un autre exemple de ce type de méthodes, on pourra, par exemple, se reporter à Saaty (1980)). Les deux dernières sections de ce chapitre n'auront donc pas la prétention (irréaliste) d'analyser les caractéristiques de l'ensemble des méthodes constructives qui peuvent fort bien se concevoir dans une optique parfaitement compensatoire et à l'exclusion de seuils. Il nous semble cependant que les "méthodes de type ELECTRE" produites par l'Ecole Française représentent certainement un ensemble cohérent pouvant constituer, à lui seul, un objet d'étude (cf. Crama et Hansen (1983) à propos du "programme de recherche" ELECTRE, au sens de Lakatos) particulièrement représentatif de ces méthodes.

A. LES METHODES CONSTRUCTIVES D'AIDE A LA DECISION

On peut, de façon fort schématique, représenter une méthode d'aide à la décision comme un ensemble de techniques permettant, à partir de jugements fournis par le décideur (ou un groupe décisionnel), d'améliorer sa perception du problème de décision (ou, plus exactement, son "contrôle" sur le processus de décision, cf. Roy (1979-83), chapitre 2). Il est clair en effet que toute méthode d'aide à la décision (constructive ou non) a besoin, au départ, d'un minimum d'information sur les "attitudes" (le mot étant pris ici au sens large et non au sens précis que nous lui avons donné au chapitre 2) des acteurs vis-à-vis du problème considéré. Au départ de toute méthode existe donc une phase de "recueil" de ces attitudes et donc une description. Cette constatation nous amène donc à préciser plus avant la distinction que nous avons évoquée au chapitre II entre approches descriptives et constructives.

Il convient tout d'abord de préciser que, indépendamment de l'arbitraire et de l'imprécision inhérentes à toute typologie, cette distinction proposée par Roy et Bouyssou (1983) concerne non les méthodes proprement dites mais les "approches" sous-tendant ces méthodes (cf. Bouyssou et Roy (1983b)) (par raccourci, nous dirons "démarche" constructive ou descriptive au lieu de méthode se fondant sur une approche constructive ou descriptive). On a vu ainsi, au chapitre précédent, qu'une méthode se fondant sur une approche descriptive pouvait fort bien être utilisée de manière constructive. Cette distinction n'a pas pour but de "classer" les différents modèles d'aide à la décision en deux groupes bien distincts mais de permettre une meilleure compréhension des philosophies respectives qui les sous-tendent.

De plus, même si chacune des deux approches a besoin, pour fonctionner, de décrire un certain nombre d'attitudes du décideur, leur différence essentielle tient à la manière dont cette description est faite, à la façon dont on considère ces attitudes et dont on les exploite par la suite. On a vu, au chapitre 2, qu'une démarche descriptive imposait de faire l'hypothèse d'une grande cohérence et d'une grande stabilité des attitudes du décideur (voir également Roy (1979-1983), chapitre 10). Ceci explique que ces approches cherchent généralement à les décrire de façon exhaustive et, en particulier, en ne faisant pas abstraction des attitudes concernant les actions "extrêmes" (cf. II.B). L'exemple de la théorie de l'utilité nous a permis de montrer combien une telle précision dans la description pouvait être illusoire.

La reconnaissance explicite d'une grande instabilité de ces attitudes constitue précisément la principale originalité des approches constructives. La nécessaire description qu'opèrent ces approches ne vise pas à être exhaustive. Elle cherche au contraire à déterminer, malgré l'instabilité, voire l'absence, des attitudes certaines "lignes de force", concernant en particulier la définition des critères, l'opérationalité de leurs axes de signification sous-jacents et leur importance relative, permettant de guider la suite de l'étude. Cet objectif, bien plus modeste que celui d'une description exhaustive, emporte deux conséquences importantes. En premier lieu, la détermination de ces "lignes de force" à partir d'informations souvent confuses et contradictoires n'exclut pas un certain arbitraire. Il importera donc de ne pas accorder une valeur et une précision illusoires à ces informations et, en particulier, d'étudier systématiquement l'impact de modifications de ces "lignes de force" sur les recommandations tirées du modèle (on verra, au chapitre IV, l'importance cruciale de l'analyse de robustesse dans les méthodes de type ELECTRE dont la fonction est significativement différente de celle d'une simple analyse de sensibilité). En tout état de cause, les notions de précision, d'erreur ou de biais dans les structures de préférence n'ont que peu de pertinence dans le cadre d'une démarche constructive (cf. Roy (1979-1983), chapitre 10). Deuxièmement, il est clair que parvenir à la détermination d'une base solide à partir de laquelle on pourra bâtir une préférence, d'une "charpente" d'une structure de préférence (j'emprunte cette image à Roy), peut parfois impliquer de se situer à un niveau de généralité assez élevé, excluant toute quantification. Ceci explique que nombre de "méthodes constructives" recherchent avant tout l'"accord" du décideur sur un certain nombre de "conventions", concernant, en particulier, la définition des critères et la possible compensation que l'on peut établir entre eux, très générales. A titre d'exemple, la méthode ELECTRE III (cf. B) propose au décideur une convention partiellement non compensatoire où de petites différences sur l'évaluation des critères ne perturbent pas la préférence. Une fois réalisé cet "accord" sur des "conventions" générales, l'adaptation de celles-ci aux attitudes du décideur ne va pas toujours sans problème. On verra ainsi au B que les méthodes de l'Ecole Française manipulent un certain nombre de paramètres (seuil de concordance et ensemble de discordance, indices d'importance) dont la signification n'est pas toujours très claire, en-dehors de pures considérations techniques. Donner une valeur à ces paramètres revient à "moduler" la convention véhiculée par la méthode à ce que l'analyste perçoit de la charpente de la structure de préférence du décideur. Ce processus d'ajustement n'est pas un processus d'"estimation" au sens où l'on peut estimer une fonction d'utilité par exemple. La reconnaissance de l'instabilité et de la pauvreté des "attitudes" de base du décideur implique donc de renoncer à l'utilisation de procédures d'estimation sophistiquées pour se consacrer à un processus plus informel d'"adaptation" qui implique souvent (mais ce n'est qu'un artifice) de recourir à la quantification, toujours arbitraire, de paramètres dont l'interprétation, en l'absence de tout modèle formel sous-jacent, est parfois très délicate (cf. chapitre IV à propos de l'estimation des seuils de veto par exemple). Ces quelques considérations, qui seront éclairées par l'étude "empirique" du chapitre IV, permettent de plus de comprendre pourquoi la plupart des méthodes constructives ne se fondent sur aucune théorie formelle, leur objectif étant avant tout d'aider un décideur à améliorer sa perception d'un problème sur la base d'informations parcellaires et ambiguës (nous reviendrons sur ce point au C.1).

B. QUELQUES METHODES CONSTRUCTIVES D'AIDE A LA DECISION

1. Généralités

Nous présentons brièvement, dans cette section, deux méthodes (ELECTRE I et III) de l'Ecole Française qui semblent particulièrement représentatives d'une démarche constructive afin de permettre de mieux situer les considérations techniques qui feront l'objet des deux dernières sections de ce chapitre. La plupart des méthodes constructives de l'Ecole Française visent à bâtir, sur la base de notions assez diverses (concordance, discordance, cf. Roy (1968) et (1978), cônes de dégradation, cf. Roy (1974), taux de substitution incertains, cf. Bertier et de Montgolfier (1974), polyèdre de fonctions d'utilité additives, cf. Marchet (1980), Siskos (1980), quasi-critères, cf. Jacquet-Lagrèze (1975)) une ou plusieurs relations de "surclassement" entre les actions potentielles de l'étude d'aide à la décision (cf. Roy (1982) ou (1974)). Cette (ou ces) relation(s) indique(nt) dans quelle mesure on peut considérer qu'une action a est "au moins aussi bonne" qu'une action b. Compte-tenu de la nature de ces conventions et de la reconnaissance explicite de l'instabilité et de la pauvreté des "attitudes" du décideur, il est naturel de n'imposer aucune propriété structurelle particulière (complétude, asymétrie, transitivité) pour cette relation de surclassement. En fait, celle-ci a pour but de n'indiquer que la partie de la structure de préférence que l'analyste estime être en droit d'asseoir avec suffisamment de sûreté au vue des évaluations, éventuellement imprécises, d'actions considérées (cf. Roy (1974)). Il s'ensuit que, selon que l'analyste acceptera de prendre plus ou moins de risques, il pourra obtenir des relations de surclassement plus ou moins "riches" (c'est-à-dire plus ou moins risquées), les actions n'étant liées par aucune relation étant déclarées, à ce stade de l'étude, incomparables. Selon la problématique de l'étude d'aide à la décision (cf. chapitre I), cette relation de surclassement est ensuite exploitée de façon à choisir, trier ou classer les actions (cf. Roy (1973) ou (1974)). Nous renvoyons le lecteur à Roy (1974), à Vansnick (1979) ou à Winkels et Wäscher (1981) pour une vue d'ensemble des méthodes de construction et d'exploitation de telles relations de surclassement. Dans la suite de cette section, nous présenterons succinctement les méthodes ELECTRE I et III, ce qui nous permettra de mettre à jour certaines caractéristiques essentielles de ces méthodes.

. 2. ELECTRE I (cf. Roy (1968))

La méthode ELECTRE I vise à aider au choix d'une meilleure action (cf. chapitre I, problématique α) parmi un ensemble fini d'actions évaluées sur plusieurs critères. Pour ce faire, elle cherche à construire une relation de surclassement triviale (par opposition à une relation floue, cf. 3) sur la base des notions de concordance et de discordance et à déterminer un sous-ensemble de l'ensemble des actions (aussi restreint que possible) contenant la (ou les) meilleure(s) action(s). Les données de départ de la méthode se composent d'un tableau d'évaluation multicritère (cf. figure 3.1) où figurent, en ligne, les actions et, en colonne, leurs évaluations sur les différents critères. Elle suppose donc résolus les problèmes de construction d'une famille cohérente de critères et d'évaluation des actions sur ces critères évoqués au chapitre I. Compte-tenu de ces évaluations, une action a sera considérée comme au moins aussi bonne qu'une action b si, sur un nombre "suffisant" de critères, a est au moins aussi bien évaluée que b (condition de concordance) et si, sur les critères où l'action b est mieux évaluée que a, la différence entre les évaluations de b et de a n'est pas "trop" importante (condition de non discordance). En termes imagés, a sera considérée au moins aussi bonne que b si une majorité suffisante des critères "vote" en faveur de a sans que l'opposition de la minorité soit par trop importante.

Pour donner un sens précis à ces notions, on recourt à la définition d'une relation de concordance C et de discordance D sur l'ensemble des couples d'actions A x A. Afin de permettre de caractériser l'importance de l'ensemble des critères en concordance avec l'affirmation "a est au moins aussi bonne que b, on affecte à chaque critère un indice p_i appelé "indice d'importance du critère i". On suppose de plus que, sur chaque

	g_1	g_2	...	g_n
a_1	$g_1(a_1)$	$g_2(a_1)$		$g_n(a_1)$
a_2	$g_1(a_2)$	$g_2(a_2)$		$g_n(a_2)$
$\vdots$				
a_n	$g_1(a_n)$	$g_2(a_n)$		$g_n(a_n)$

Figure 3.1 : Tableau d'évaluation multicritère

critère, les évaluations des actions définissent sans ambiguité une relation binaire de préférence ayant les propriétés d'un préordre total (cf. chapitre II) $\succsim_i$. L'indice $p(a, b) = \sum_{i/a \succsim_i b} p_i \,/\, \sum_{i=1}^{n} p_i$ donne ainsi une idée de l'importance de la "coalition" des critères appuyant l'affirmation "a surclasse b". Cette importance sera jugée suffisante dès lors que $p(a, b) \geq s$ où $s \in [0, 1]$ est appelé seuil de concordance et on définit la relation C par : $a\ C\ b \iff p(a, b) \geq s$. On notera que, si $s = 1$, la relation C se confond avec une relation de dominance (large), des valeurs plus faibles revenant à enrichir progressivement cette relation. La définition d'une telle relation C exclut toute possibilité de compensation entre les différents critères puisque la conclusion $a\ C\ b$ ne dépend pas des évaluations de a et de b sur les critères j tels que $b \succsim_j a$. Cette notion de concordance n'est pas propre aux méthodes ELECTRE. Huber (1974) et Fishburn (1976) évoquent un concept très similaire dans le cadre de l'étude des systèmes de préférence non compensatoires. Huber (1979) montre en particulier qu'une agrégation de type concordance contient, comme cas particulier, une agrégation lexicographique ou une agrégation à la majorité moyennant un choix approprié des indices d'importance tandis qu'un modèle de différences additives (cf. Tversky (1969)) peut, dans le cas particulier où $s = 1/2$, simuler une agrégation de "type concordance". En effet, R est un modèle de différences additives si et seulement si il existe $2 \times n$ fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_n$ et $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ telles que, $\forall (a, b) \in X$ où X est l'ensemble des actions, on ait :

$$a \; R \; b \iff \sum_{i=1}^{n} \phi_i[u_i(a) - u_i(b)] \geq 0$$

avec $\phi_i(- x) = - \phi_i(x) \;\; \forall \, x \in X$ et $\forall \;\; i \in \{1, \ldots, n\}$.

Pour retrouver une agrégation de type concordance avec $s = 1/2$, il suffit de poser :

$u_i(a) = g_i(a) \;\; \forall \, a \in X$ et $\forall \, i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ (en supposant que la préférence croît avec les valeurs de $g_i(a)$) et

$$\phi_i(x) = \begin{cases} p_i & \text{si} \quad x > 0 \qquad \forall \;\; i \in \{1, 2, \ldots, n\} \\ p_i & \text{si} \quad x = 0 \\ -p_i & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

où p_i représente l'indice d'importance du critère i.

La définition d'une relation de discordance D vise précisément à atténuer les effets, parfois excessifs, de cette agrégation totalement non compensatoire. Définir une telle relation D revient à se donner, sur chaque critère, un ensemble $\mathcal{D}_j$ de couples d'évaluations $(g_j(c), g_j(c'))$ tels que l'on estime la différence entre $g_j(c)$ et $g_j(c')$ tellement importante qu'elle n'autorise pas l'affirmation c' S c (*). Dans le cas où les échelles sont qualitatives, on peut définir cet ensemble en extension. Lorsque les échelles des critères sont continues, on se fixe généralement un niveau d_i sur chaque critère tel que :

$$g_i(c) - g_i(c') \geq d_i \iff (g_i(c), g_i(c')) \in \mathcal{D}_i,$$

ce niveau d_i pouvant varier le long de l'échelle. On a $a \; D \; b \iff \exists \; i \in \{1, \ldots, n\} \; / \; (g_i(a), g_i(b)) \in \mathcal{D}_i$. L'affirmation a S b ne sera retenue en fin de compte que lorsque a C b et non b D a.

(*) Cette définition de la discordance est, en fait, celle utilisée dans ELECTRE II. Tout en étant équivalente d'un point de vue formel à celle utilisée originellement dans ELECTRE I, elle présente l'avantage de pouvoir être présentée plus simplement.

Une des originalités de la méthode consiste donc à tempérer le caractère totalement non compensatoire de la relation C en "brisant" certains de ses arcs. Contrairement à l'idée intuitive de la "compensation" entre les critères (l'exemple type de modèle compensatoire étant la somme pondérée), son introduction dans ELECTRE I ne se fait qu'au prix d'un appauvrissement de la relation de surclassement obtenue.

Des exemples simples (cf. Roy (1968), Skalka (1983)) permettent de montrer que la relation S n'est, dans le cas général, ni transitive, ni complète et qu'elle peut même présenter des circuits. Cette présence de circuit est en effet inhérente à la manière même dont on a défini la relation de surclassement. Depuis la mise à jour du célèbre "effet Condorcet", on sait en effet que les méthodes de comparaisons par paires et d'agrégation à la majorité produisent des résultats "intrinsèquement intransitifs".

Afin de retenir un sous-ensemble d'actions aussi restreint que possible et contenant la "meilleure" action, on recourt à la notion de "noyau" de la relation de surclassement, classique en théorie des graphes (cf. Roy (1969)). Le noyau d'une relation de surclassement se définit comme un sous-ensemble d'actions tel qu'aucune action du noyau ne soit surclassée par une autre action du noyau, toute action n'appartenant pas au noyau étant surclassée par (au moins) une action du noyau. On sait (cf. Roy (1969), chapitre VI) que tout graphe sans circuit admet un noyau unique. L'élaboration de la prescription dans ELECTRE I impose donc de rechercher et de "réduire" les circuits présents dans le graphe de surclassement en faisant l'hypothèse d'une équivalence entre les actions éléments d'un même circuit, compte-tenu du contenu sémantique "au moins aussi bon que" qui a été donné à la relation. Il faut cependant noter que, si le noyau contient en général la meilleure action, il peut également contenir de "mauvaises" actions à l'exclusion d'éventuels "brillants seconds" (cf. Schärlig (1983), Roy (1974)).

Conformément au A, on voit donc que la méthode ELECTRE I (pour un exemple d'application, voir Buffet et al. (1967)) propose une "convention" fortement inspirée de procédures majoritaires avec veto qui, bien que simple dans son principe, fait intervenir de nombreux paramètres (seuils de concordance, ensembles de discordance, indices d'importance) dont la quantification est souvent délicate. Une fois de plus, il faut rappeler que la prescription associée à cette méthode n'aura de sens véritable que couplée à une analyse de robustesse importante permettant d'arbitrer entre la richesse et le risque des relations manipulées.

La méthode ELECTRE I fut à l'origine des méthodes de l'Ecole Française et permet de faire ressortir clairement la convention "partiellement non compensatoire" que l'on retrouvera dans de nombreuses autres méthodes. Le successeur immédiat de cette méthode, ELECTRE II, mis à part quelques aménagements techniques, propose d'exploiter un ensemble de relations de surclassement pour répondre à une problématique de type γ, c'est-à-dire un classement des actions. ELECTRE III se propose de faire face à la même problématique mais en introduisant le concept de seuil pour gérer l'incertitude et l'imprécision des données de départ.

3. ELECTRE III

Nous ne développerons pas ici l'ensemble de la méthode qui présente une certaine complexité technique. Au contraire, nous insisterons sur l'apport spécifique de cette méthode résidant dans le passage des "critères vrais" au "pseudo-critères". Pour un exposé exhaustif des détails de la méthode, on se reportera à Roy (1978) et à Skalka, Bouyssou et Bernabeu (1983).
Les données de départ du modèle ELECTRE III consistent en effet dans l'évaluation d'un ensemble d'actions sur une famille de pseudo-critères (cf. II. A.3 et Roy (1983), chapitre 9) munies d'une pondération. Nous nous contenterons, dans cette section, de donner un aperçu de la notion de pseudo-critère.

Considérons (*) un critère $g(s)$ destiné à modéliser les préférences d'un décideur sur un axe de signification donné. Le calcul des valeurs $g(s)$ de ce critère s'effectue à partir des évaluations des actions sur

(*) Cette section est adaptée de Roy et Bouyssou (1983), Annexe 2.

les diverses conséquences concernées par cet axe de signification. Dans bien des cas, ce calcul se ramène à une "ponctualisation" (voir Roy (1983), Chapitre 9) puisqu'il s'agit de résumer une évaluation "non ponctuelle" sur une conséquence par un chiffre unique $g(s)$.

La théorie de l'utilité utilise une ponctualisation fondée sur la notion d'espérance mathématique d'une utilité. Elle considère, de plus, que le critère ainsi défini est un "vrai-critère", c'est-à-dire qu'il suffit de connaître le signe de la différence $u = g(s') - g(s)$ pour savoir laquelle des deux actions est strictement préférée à l'autre, celles-ci n'étant jugées équivalentes que si $u = 0$. Plus généralement, le vrai-critère autorise une modélisation des préférences partielles telles que :

$$s' \; P \; s \iff g(s') > g(s)$$
$$s' \; I \; s \iff g(s') = g(s)$$

où P et I sont repsectivement une relation de préférence et une relation d'indifférence restreintes à l'axe de signification considéré.

Dans bien des cas, l'imprécision, l'incertitude, le flou qui entourent tant les "données" de départ (évaluations des actions sur les conséquences) que le mode de calcul retenu pour obtenir les valeurs $g(s)$ peuvent faire douter de la probance du modèle du vrai-critère, dès lors que l'on se situe dans un problème réel. L'utilisation d'une justification axiomatique de ce modèle (cas de la théorie de l'utilité) ne doit pas faire oublier la présence de nombreux facteurs d'arbitraire et d'intermination, au double niveau conceptuel et pratique.

Le modèle de pseudo-critère tend à remédier à certaines des outrances auxquelles peut conduire l'utilisation d'un vrai-critère en intégrant explicitement les éléments mal définis ou mal connus entrant dans le calcul des valeurs de $g(s)$ (voir Jacquet-Lagrèze et Roy (1980), Roy et Vincke (1982)).

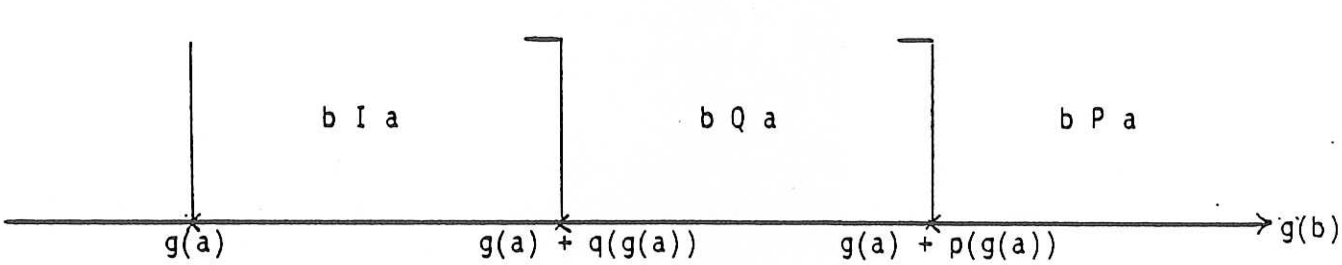
Dans tout ce qui suit, nous parlerons d'un critère g et nous admettrons de façon non restrictive que la préférence est non décroissante avec les valeurs $g(a)$.

La situation $u = g(b) - g(a) = 0$ correspond de façon non ambiguë à un cas d'indifférence b I a.

Lorsque $g(b)$ croît, la différence u cesse de refléter une indifférence au-delà d'une certaine valeur $\underline{u}$ qu'on peut, le plus souvent, exprimer sous la forme $\underline{u} = q(g(a))$. En effet, dans un problème réel, il est naturel de penser que de petites valeurs de u seront jugées non significatives compte-tenu de l'arbitraire et de l'imprécision entrant dans la définition de g. Bien qu'en théorie un individu préfèrera toujours payer 1 000 F plutôt que 1 001 F, il est fort probable qu'il jugera ces deux quantités équivalentes s'il sait qu'elles ne représentent qu'un "ordre de grandeur", comme c'est le cas pour le coût d'une centrale nucléaire par exemple.

Cette fonction $q(g(a))$ est appelée seuil d'indifférence du critère g (cf. Roy (1983), chapitre 9).

Lorsque la plage de valeur du critère g est suffisamment étendue, il est possible de trouver deux actions a et b telles que la différence $u = g(b) - g(a)$ soit révélatrice d'une préférence stricte sans ambiguïté possible. Cette différence reste probante d'une préférence stricte, lorsque $g(b)$ décroît, jusqu'à une valeur $\bar{u}$ pour les mêmes raisons que précédemment. On peut souvent exprimer $\bar{u}$ sous la forme $p(g(a))$ que l'on appellera seuil de préférence du critère g. On a généralement (mais pas nécessairement, cf. Roy (1983), chapitre 9) $q(g(a)) \neq p(g(a))$ avec $p(g(a)) > q(g(a))$. En effet, pour des valeurs de u légèrement supérieures à $q(g(a))$, on peut légitimement hésiter entre une situation d'indifférence et de préférence stricte. On conviendra de noter cette situation par b Q a que l'on interprètera comme "b faiblement préféré à a sur l'axe de signification considéré". On peut donc résumer les diverses situations par le schéma :



Pour éviter certaines incohérences (cf. Roy (1979-1983), chapitre 9), on postulera :

$$\frac{q(g(b)) - q(g(a))}{g(b) - g(a)} \geq -1 \quad \text{et} \quad \frac{p(g(b)) - p(g(a))}{g(b) - g(a)} \geq -1,$$

conditions trivialement vérifiées lorsque les deux seuils q et p sont constants en valeur absolue ou en valeur relative.

La détermination de ces deux seuils n'est pas toujours simple. On peut cependant constater que les valeurs $q(g(a)) = p(g(a)) = 0$ pour tout a, postulées par la théorie de l'utilité et correspondant au cas du vrai-critère, ne sont pas, en général, les plus réalistes.

Avec un pseudo-critère, on a donc :

$$g(b) \geq g(a) \Rightarrow \begin{cases} b\ I\ a & \text{si } g(b) - g(a) \leq q(g(a)) \\ b\ Q\ a & \text{si } q(g(a)) < g(b) - g(a) \leq p(g(a)) \\ b\ P\ a & \text{si } p(g(a)) < g(b) - g(a) \end{cases}$$

avec

$$\frac{p(g(b)) - p(g(a))}{g(b) - g(a)} \geq -1 \quad \text{et} \quad \frac{q(g(b)) - q(g(a))}{g(b) - g(a)} \geq -1.$$

Dans ELECTRE III, les notions de concordance et de discordance d'ELECTRE I sont adaptées à cette introduction de seuils et débouchent sur une relation de surclassement floue, c'est-à-dire une relation dont la crédibilité est repérée de façon continue par un indice $d \in [0, 1]$. Un des problèmes spécifiques posés par ELECTRE III (mais aussi par ELECTRE IV, cf. Roy et Hugonnard (1982) et Hugonnard (1982)) consiste donc, à partir des évaluations des actions sur les diverses conséquences, à modéliser une famille cohérente de pseudo-critères et, en particulier, à estimer les seuils qui lui sont associés.

Dans la suite de ce chapitre, nous étudierons successivement la nature de l'agrégation des critères proposés dans les méthodes de type ELECTRE et le problème de la détermination des "seuils de discrimination".

C. SYSTEMES DE PREFERENCE TOTALEMENT ET PARTIELLEMENT NON COMPENSATOIRES (*)

Dans cette section, nous nous efforcerons de montrer l'intérêt d'une convention non totalement compensatoire dans une approche constructive avant de proposer une réflexion plus théorique sur la nature de tels systèmes de préférences.

1. Non compensation et méthodes constructives

La majorité des méthodes constructives de l'école française reposent sur une idée de non totale compensation entre les critères (cf. ELECTRE I, II, III et également TACTIC, cf. Vansnick (1983)) au-travers des notions de concordance et de discordance. Ce choix peut paraître surprenant a priori puisque, à bien des égards, la méthode de la somme pondérée (et sa version sophistiquée sous forme d'utilité additive) reste la technique d'agrégation la plus intuitive.

A notre sens, l'avantage principal de ce type de convention réside dans sa grande simplicité, particulièrement adaptée à des situations où de multiples acteurs interviennent dans la prise de décision avec des systèmes de valeurs conflictuels. Il nous semble peu réaliste en effet de considérer la "convention" non compensatoire proposée par les méthodes ELECTRE comme traduisant une volonté de se rapprocher de certaines heuristiques non compensatoires (lexicographie, modèle disjonctif à niveau d'aspiration, etc.) souvent utilisées en pratique face à des tableaux de données multidimensionnels (à ce sujet, cf. MacCrimmon (1973)). L'intérêt de la convention est, à notre sens, plus subtil. Nul ne saurait en effet nier

---

(*) Cette section est inspirée de Bouyssou et Vansnick (1983).

que, mis à part dans certains cas limites, des substitutions entre critères sont possibles. Il est rare, dans un problème de décision réel (et réellement multicritère), de négliger entièrement des différences d'évaluation sur certains critères comme le fait la relation de concordance. En fait, cette convention a le mérite de faire ressortir en "tête" (dans la prescription) des actions "compromis", c'est-à-dire n'étant pas pénalisées par l'application de la condition de non-discordance et donc ne présentant pas de "manque" majeur sur l'un quelconque des critères et présentant des valeurs acceptables sur les critères importants. Il semble d'ailleurs que ce soit bien ce souci de privilégier les actions "équilibrées" qui ait motivé la conception des méthodes ELECTRE (cf. Roy (1968)).

Les méthodes totalement compensatoires permettent au contraire, fréquemment, de faire ressortir en tête des actions moins "équilibrées" pouvant présenter de très mauvaises valeurs sur certains critères, compensées par des scores excellents sur d'autres (cf. à ce propos chapitre IV). On conçoit bien que, dans un environnement conflictuel, il puisse être préférable de voir ressortir d'entrée des actions compromis (sur la base d'une importance relative des critères exprimée en termes vagues au travers des indices d'importance) plutôt que de voir l'application d'une méthode parfaitement compensatoire recommander, pour chaque système de valeur, des actions extrêmes assez déséquilibrées. Une démarche partiellement non compensatoire nous semble donc souvent fournir, à d'éventuelles négociations, des bases parfaitement adéquates. Rien n'empêche bien sûr, à une telle négociation, de se produire sur la base d'un modèle compensatoire. Il convient cependant de noter qu'un modèle compensatoire conduit à définir, de façon très fine et très précise, l'importance relative des critères (au travers de taux de substitution variables dans une fonction d'utilité additive par exemple) tandis que les méthodes non compensatoires proposent de négocier sur une base plus rudimentaire (car mal définie) : les indices d'importance. Comme souvent en matière de négociation, la présence d'un certain flou dans les monnaies d'échange utilisées favorise une moindre dramatisation des conflits. A notre sens, les notions de concordance-discordance ne doivent donc pas être vues comme traduisant un attachement irréductible à une logique non compensatoire mais comme un outil frustre, mais efficace, pour parvenir à une agrégation, évitant la mise à jour d'opinions souvent génératrices de conflits comme l'expression de taux de substitution par exemple. La logique partiellement non compensatoire d'ELECTRE ne doit donc pas être mise en opposition radicale avec celle, parfaitement compensatoire, de la théorie de l'utilité. Elle peut, jusqu'à un certain point, en constituer une "approximation" pratique. Ce terme d'approximation ne signifie pas que les deux approches conduisent à peu près au même résultat (on verra, à ce propos, les données de Goumas (1983)) mais, plus modestement, qu'elles permettent, chacune à leur façon, d'apporter des éléments de réponse aux mêmes types de problèmes.

2. Une théorie formelle des méthodes constructives ?

Nous présentons, dans le reste de cette section, une analyse de type axiomatique des systèmes de préférence non compensatoires. Avant d'aborder directement cette question, il convient cependant de se demander quelle peut être la nature et la portée d'une telle analyse théorique dont nous avons auparavant douté (cf. chapitre I ou A) qu'elle puisse fonder une méthode constructive.

L'analyse que nous présentons dans les sections suivantes ne vise pas à donner une légitimation axiomatique aux méthodes de type ELECTRE. Elle ne constitue pas une théorie de l'apprentissage et de la structuration de structures de préférence qui, seule, pourrait fonder une méthode constructive. Comme nous l'avons mentionné plus haut, une telle théorie, si tant est qu'elle puisse être conçue, n'est pas aujourd'hui disponible. Ce qui suit ne peut donc, en aucun cas, être considéré comme une tentative de légitimation d'un groupe de méthodes par une analyse mathématique. Plus modestement, notre objectif aura été d'approfondir une réflexion sur les outils que ces méthodes utilisent afin, espérons-nous, de mieux les comprendre et, si possible, d'améliorer ceux existants.

Si l'analyse qui suit est d'ordre axiomatique, elle se distingue des théories formelles de représentation de structures de préférences au moyen de fonctions d'utilité, évoquées au chapitre II, sur au moins deux plans.

Tout d'abord, cette analyse théorique ne vise qu'à enrichir une réflexion sur des méthodes déjà existantes et n'ambitionne pas de pouvoir trouver des applications extérieures au domaine de l'aide à la décision (comme c'est bien sûr le cas, avec succès, pour la théorie de l'utilité). En second lieu, cette analyse n'a pu être menée qu'au prix du sacrifice d'un critère souvent déterminant en mathématiques (pures ou appliquées) : l'élégance. Notre objet d'étude étant des structures de préférences conçues dans une optique constructive, indépendamment de tout souci de formalisation, impose parfois une certaine lourdeur.

Il convient, avant d'aborder cette analyse proprement dite, de noter que nous avons voulu donner ici un cadre très général de réflexion et que, en particulier, nous ne nous sommes pas attachés à chercher à théoriser <u>une</u> méthode de type ELECTRE en particulier. Le lecteur constatera que, à certaines reprises, nous avons pris quelques libertés avec les méthodes existantes dans un souci de clarté et de simplification. On verra ainsi que nous avons pris le parti de travailler sur une relation de préférence asymétrique en choisissant de ne pas distinguer l'indifférence de l'incomparabilité (ce qui peut sembler une gageure puisque l'apport crucial des méthodes françaises réside précisément dans cette introduction de l'incomparabilité), ce que nous justifierons par la suite.

3. <u>Systèmes de Préférence Totalement Non Compensatoires (SPTNC)</u>

Dans cette sous-section, nous reprendrons la caractérisation des SPTNC donnée de façon indépendante par Fishburn (1976) (voir aussi (1977)) et Plott, Little et Parks (1975), ces derniers fournissant une interprétation économique très détaillée des structures de préférences non compensatoires (on pourra également consulter Chen (1981), chapitre 2). Cette analyse sera étendue pour retrouver une classe de systèmes de préférence particulièrement intéressante : celle des systèmes de préférence de type concordance.

Soit $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ un ensemble d'actions évaluées sur n attributs. On supposera, jusqu'à la fin de la section, que $n \geq 2$ et que $X_i \neq \emptyset \ \forall\, i \in \Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$. On se donne, sur X, une relation binaire asymétrique $\succ$ que l'on pourra interpréter comme une relation de préférence stricte ; le couple $(X, \succ)$ sera appelé une structure de préférence (SP). On notera, classiquement, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un élément de X, l'élément noté $(x_i, (y_j)_{j \neq i})$ recevant, sur l'attribut i, l'évaluation x_i et, sur tous les autres, des évaluations $(y_1, y_2, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n)$.

<u>Définition 3.1</u> : On se donne, sur X, une relation binaire $\sim$ définie par $a \sim b \iff (a, b) \in X^2$ et non $a \succ b$ et non $b \succ a$.

La définition 3.1 implique, de façon triviale, la symétrie de la relation $\sim$. Il faut noter que cette relation $\sim$ ne peut s'interpréter que comme une "absence de préférence", mêlant des situations d'indifférence et d'incomparabilité. On a :

<u>Définition 3.2</u> : On définit, sur chaque attribut X_i, une relation binaire $\succ_i$ de la façon suivante :

$$
\begin{aligned}
x_i \succ_i y_i \quad \text{ssi} \quad & (x_i, y_i) \in X_i^2 \ \text{et} \\
& (x_i, (a_j)_{j \neq i}) \succ (y_i, (a_j)_{j \neq i}) \\
& \forall\, (a_j)_{j \neq i} \in \underset{j \neq i}{\times} X_j .
\end{aligned}
$$

Il faut noter que l'asymétrie de $\succ$ implique l'asymétrie de toutes les relations $\succ_i$. La définition des $\succ_i$ n'implique nullement des notions d'indépendance au sens des préférences (cf. chapitres I et II) puisque la relation $x_i \succ_i y_i$ n'est vérifiée que si $(x_i, (a_j)_{j \neq i}) \succ (y_i, (a_j)_{j \neq i})$ est vérifiée pour <u>tous</u> les vecteurs $(a_j)_{j \neq i}$. On définit de même un ensemble de relations $\underset{i}{\sim}$ symétriques par $a_i \underset{i}{\sim} b_i \iff (a_i, b_i) \in X_i^2$ et non $a_i \underset{i}{\succ} b_i$ et non $b_i \underset{i}{\succ} a_i$.

<u>Définition 3.3</u> : Un attribut X_i est essentiel ssi $\exists\, (x_i, y_i) \in X_i^2$ tel que $x_i \underset{i}{\succ} y_i$.

Nous imposerons, dans la suite de cette section, que tous les attributs X_i soient essentiels.

Définition 3.4 : On définir une fonction P de la manière suivante :

$P : X^2 \to \mathcal{P}(\Omega)$

$(x, y) \to \{i \mid i \in \Omega \text{ et } x_i \succ_i y_i\}$.

L'ensemble $P(x, y)$ (*) contient donc les attributs sur lesquels on a une préférence stricte de x sur y. A l'aide de ces notions, Fishburn (1976) propose la définition des SPTNC suivante :

Définition 3.5 : Le SP $(X, \succ)$ est un SPTNC ssi $\forall\, (x, y, z, w) \in X^4$, on a :

$$\{[P(x, y), P(y, x)] = [P(z, w), P(w, z)]\} \Rightarrow [x \succ y \Leftrightarrow z \succ w].$$

Cette définition indique clairement le caractère non compensatoire de l'agrégation puisque la préférence globale ne dépend que des sous-ensembles de Ω sur lesquels on a une préférence partielle stricte. Il est également important de constater que cette définition n'implique aucune propriété particulière sur $\succ$ qui, comme nous le verrons par la suite, n'est en particulier pas transitive. Il est, d'autre part, clair que cette définition des SPTNC permet de formaliser, de façon très générale, le concept de concordance des méthodes ELECTRE (cf. B). On a la conséquence importante suivante :

Propriété 3.6 : Si $(X, \succ)$ est un SPTNC, alors chaque attribut X_i est indépendant, au sens des préférences, des autres attributs.

Démonstration : Soit $x = (x_i, (a_j)_{j \neq i})$, $y = (y_i, (a_j)_{j \neq i})$, $z = (x_i, (b_j)_{j \neq i})$ et $w = (y_i, (b_j)_{j \neq i})$. Chaque relation $\succ_i$ étant asymétrique

(*) Compte-tenu de la propriété 3.6, le lecteur s'assurera que $P(x, y)$ est identique à l'ensemble souvent noté $I^+(x, y)$ ou $C(x, y)$ dans les méthodes ELECTRE (cf. Roy (1968), p. 66 ou Roy et Bertier (1971), p. 20).

$\forall$ i $\in \Omega$, on a :

$$P(x, y) = P(z, w) \quad \text{et} \quad P(y, x) = P(w, z).$$

On a donc, par définition d'un SPTNC, $x \succ y \iff z \succ w$ et donc $(x_i, (a_j)_{j \neq i}) \succ (y_i, (a_j)_{j \neq i}) \iff (x_i, (b_j)_{j \neq i}) \succ (y_i, (b_j)_{j \neq i})$, ce qui est la définition de l'indépendance au sens des préférences.

C.Q.F.D.

Cette propriété d'indépendance au sens des préférences est donc commune aux modèles totalement compensatoires (utilité additive par exemple) et aux modèles totalement non compensatoires. La propriété 3.6 permet de plus d'éclairer d'un jour nouveau la discussion du chapitre I.A.3 en montrant que le recours à un mode d'agrégation non compensatoire vient encore renforcer la nécessité de travailler (et donc de concevoir) des axes de signification "indépendants" dans une démarche constructive. La définition 3.5 permet également de montrer que la notion de SPTNC est liée intrinsèquement à une notion d'"importance" sur les groupes de critères. On a :

<u>Définition 3.7</u> : Soit $S = \{A, B) \, / \, (A, B) \in [\mathcal{P}(\Omega)]^2$ et $A \cap B = \emptyset\}$ l'ensemble des couples de sous-ensembles disjoints de $\mathcal{P}(\Omega)$.

<u>Définition 3.8</u> : On définit sur $\mathcal{P}(\Omega)$ les relations $\gg$ et $\approx$ par :

$$\begin{aligned} A \gg B \iff & (A, B) \in S \text{ et } x \succ y \text{ dès lors que} \\ & [P(x, y), P(y, x)] = (A, B) \\ A \approx B \iff & (A, B) \in S \text{ et } x \sim y \text{ dès lors que} \\ & [P(x, y), P(y, x)] = (A, B). \end{aligned}$$

La relation $\gg$ peut s'interpréter sémantiquement comme une relation "plus important que" sur des groupes (des coalitions) d'attributs. La relation $\approx$ ne peut s'interpréter comme une relation "aussi important que" puisque $\sim$ est une relation d'"indifférence-incomparabilité" sur X. Il est clair que l'asymétrie de $\succ$ implique l'asymétrie de $\gg$ (*) et que la symétrie de $\sim$ implique celle de $\approx$. D'après la définition d'un SPTNC, la donnée de $(X, \succ)$ implique celle de $(S, \gg)$, ce qui est une propriété cruciale de ces SP. Nous terminons ce paragraphe par l'énoncé de deux propriétés extrêmement importantes, démontrées par Fishburn (1976), auquel nous renvoyons le lecteur pour une démonstration complète.

<u>Propriété 3.9</u> (Fishburn (1976), Lemme 1) : Un SP $(X, \succ)$ est un SPTNC si et seulement si :

- $\emptyset \approx \emptyset$;
- $\{i\} \gg \emptyset \ \forall i \in \Omega$;
- $\forall (A, B) \in S$, on a soit $A \gg B$, soit $A \approx B$, soit $B \gg A$.

Ainsi, dans un SPTNC, tous les attributs sont plus importants que l'ensemble vide. Rien n'empêche cependant des configurations du type $\{i\} \gg \emptyset$, $\{j\} \gg \emptyset$ mais $\emptyset \gg \{i, j\}$. On trouvera une discussion de ce genre de situations dans Fishburn (1976). Fishburn (1976) (et, sous une forme légèrement moins générale, Plott, Little et Parks (1975)) prouve le théorème suivant :

<u>Théorème 3.10</u> (Fishburn (1976), Théorème 1, partie g) : Un SPTNC $(X, \succ)$ tel que :

- $\succ$ soit un ordre faible (asymétrique et négativement transitif),
- $\forall i \in \Omega, \exists (x_i, y_i, z_i) \in X_i^3$ tel que $x_i \succ_i y_i \succ_i z_i$ (propriété de double essentialité)

est de type lexicographique, c'est-à-dire qu'il existe une permutation σ de $\{1, 2, \ldots, n\}$ telle que

$$\forall (x, y) \in X, x \succ y \iff \exists i \in \Omega \ / \text{ non } x_i \sim_i y_i \text{ et } x_{\sigma(i)} \succ_{\sigma(i)} y_{\sigma(i)}$$

pour le plus petit i tel que non $x_{\sigma(i)} \sim_{\sigma(i)} y_{\sigma(i)}$.

(*) Rappelons que l'essentialité de chaque attribut implique : $\forall (A, B) \in S, \exists (x, y) \in X^2 \ / \ (P(x, y), P(y, x)) = (A, B)$.

On trouvera dans Fishburn (1976) les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un SPTNC soit lexicographique portant sur les propriétés des relations $>>$ et $\approx$. Le théorème 3.10 présente l'avantage de montrer clairement pourquoi la recherche de la transitivité est incompatible avec une agrégation non compensatoire. Demander aux méthodes ELECTRE de fournir une relation de concordance sous forme de préordre complet revient à leur imposer d'être lexicographiques dans leur agrégation.

Cependant, comme le note Huber (1979), ces modèles totalement non compensatoires, excluant toute notion de compensation "cardinale", débouchent souvent sur des situations aberrantes lorsque la différence entre les évaluations de deux actions x et y sur les attributs de $P(y, x)$ devient tellement importante qu'il est irréaliste de supposer $x \succ y$. La notion de discordance dans les méthodes ELECTRE vise précisément à atténuer ce genre de situation en réintroduisant une certaine notion de cardinalité dans les comparaisons au travers de l'ensemble de discordance.

4. Systèmes de Préférence Partiellement Non Compensatoires (SPPNC), Concordance, Discordance

Dans cette sous-section, nous utilisons les mêmes notations et hypothèses qu'au 3 ($\succ$ asymétrique, X_i non vides, $n \geq 2$, tous attributs essentiels). On définit, de façon classique, la relation binaire $\succsim$ sur X par $a \succsim b \iff (a, b) \in X^2$ et $[a \succ b$ ou $a \sim b]$. On a donc $a \succsim b \iff (a, b) \in X^2$ et non $b \succ a$.

Afin de tempérer les excès des SPTNC, nous proposons la définition suivante :

Définition 3.11 : $(X, \succ)$ est un système de préférence partiellement non compensatoire (SPPNC) si et seulement si, $\forall\ (x, y, z, w) \in X^4$:

$$\{[P(x, y), P(y, x)] = [P(z, w), P(w, z)]\} \Rightarrow [x \succ y \Rightarrow z \succsim w] \quad (3.1)$$

et $[P(x, y) = P(z, w)$ et $P(y, x) = P(w, z) = \emptyset] \Rightarrow$
$[x \succ y \iff z \succ w]$. (3.2)

Cette définition représente une généralisation assez naturelle de la définition 3.5. A la différence des SPTNC, les SPPNC autorisent une possible prise en compte de la notion de discordance puisque (3.1) interdit seulement d'avoir à la fois $x \succ y$ et $w \succ z$. Le complément de définition 3.2 permet de s'assurer que chaque attribut est indépendant, au sens des préférences, de son complément dans Ω, propriété que (3.1) seul ne permet pas de garantir. On a :

Propriété 3.12 : Si $(X, \succ)$ est un SPPNC, alors chaque attribut X_i est indépendant, au sens des préférences, des autres attributs.

Démonstration : Compte-tenu de (3.2), la démonstration est identique à celle de la propriété 3.6.

On a également la propriété importante suivante :

Propriété 3.13 : Si $(X, \succ)$ est un SPTNC, alors $(X, \succ)$ est un SPPNC (démonstration triviale).

La correspondance entre $(X, \succ)$ et $(S, >>)$ que nous avons établie pour les SPTNC n'est plus aussi évidente pour les SPPNC. Ce cas, plus général, implique de redéfinir les relations $>>$ et $\approx$:

Définition 3.14 : On définit, sur $\mathcal{P}(\Omega)$, une relation binaire $>>$ telle que :

$$A >> B \Longleftrightarrow \exists\, (x, y) \in X^2 \text{ tel que } [P(x, y), P(y, x)] = (A, B) \text{ et } x \succ y.$$

Cette définition, dans le cadre d'un SPPNC, implique, de façon évidente, l'asymétrie de $>>$ qui découle de celle de $\succ$. Rien n'empêche, dans le cadre d'un SPPNC, d'avoir quatre actions telles que $[P(x, y) = P(z, w)]$, $[P(y, x) = P(w, z)]$ avec $x \succ y$ et $z \sim w$. On a donc :

<u>Définition 3.15</u> : On définit, sur $\mathcal{P}(\Omega)$, une relation binaire $\approx$ telle que :

$$A \approx B \iff [\forall\ (x, y) \text{ tel que } [P(x, y), P(y, x)] = [A, B] \Rightarrow x \sim y] \text{ et } A \cap B = \emptyset.$$

<u>Propriétés 3.16</u>

1) Si $A \cap B = \emptyset$, alors non $A \gg B$, non $B \gg A$ et non $A \approx B$ car, $\forall\ (x, y) \in X^2$, on a $P(x, y) \cap P(y, x) = \emptyset$ de par l'asymétrie des $\underset{i}{\succ}$.

2) Si $A \cap B = \emptyset$, alors on a une et une seule des propositions : $A \gg B$, $B \gg A$, $A \approx B$.

3) La définition 3.15 est équivalente à : $A \approx B \iff A \cap B = \emptyset$ et non $A \gg B$ et non $B \gg A$.

<u>Démonstration</u>

1) et 2) Trivial d'après les définitions.

3) $A \approx B \iff A \cap B = \emptyset$ et

$\nexists\ (x, y) \in X^2$ avec $x \succ y$ et $[P(x, y), P(y, x)] = (A, B)$ (3.3)
et $\nexists\ (z, w) \in X^2$ avec $z \succ w$ et $[P(z, w), P(w, z)] = (B, A)$ (3.4).

Or, d'après la définition 3.14, (3.3) $\iff$ non $A \gg B$ et (3.4) $\iff$ non $B \gg A$.

C.Q.F.D.

Les définitions 3.14 et 3.15 présentent, de plus, l'avantage d'être parfaitement cohérentes avec la définition 3.8. On a en effet :

Propriété 3.17 : Si $(X, \succ)$ est un SPTNC, alors

$$A \gg B \Longleftrightarrow A \cap B = \emptyset \text{ et } \forall\ (x, y) \text{ tel que } [P(x, y), P(y, x)] = (A, B), \text{ on a } x \succ y \qquad (3.5)$$

$$A \approx B \Longleftrightarrow A \cap B = \emptyset \text{ et } \forall\ (x, y) \text{ tel que } [P(x, y), P(y, x)] = (A, B), \text{ on a } x \sim y. \qquad (3.6)$$

Démonstration

$A \gg B \Longleftrightarrow \exists\ (x, y) \in X^2$ avec $[P(x, y), P(y, x)] = (A, B)$ et $x \succ y$. Si $(X, \succ)$ est un SPTNC, alors $\forall\ (z, w)$ tel que $[P(x, y), P(y, x)] = [P(z, w), P(w, z)]$, on a $z \succ w$, d'où (3.5).

C.Q.F.D.

La définition des SPPNC que nous proposons permet de retrouver certaines propriétés intéressantes des SPTNC. On a :

Propriété 3.18 : Si $(X, \succ)$ est un SPPNC, alors :

1) $\emptyset \approx \emptyset$,

2) $\{i\} \gg \emptyset \quad \forall\ i \in \Omega$.

Démonstration

1) Soit x et $y \in X$ tel que $x_i \underset{i}{\sim} y_i \quad \forall\ i \in \Omega$. Supposons $x \succ y$; alors $x \succ x$ d'après (3.2), ce qui impossible, d'où $x \sim y$ et $\emptyset \approx \emptyset$.

2) $\{i\} \gg \emptyset \Longleftrightarrow \exists\ (x, y) \in X^2$ tel que $[P(x, y), P(y, x)] = (\{i\}, \emptyset)$ et $x \succ y$. Tous les attributs étant essentiels, on sait qu'il existe x_i et y_i tels que $x_i \underset{i}{\succ} y_i$. Or, $x_i \underset{i}{\succ} y_i \Rightarrow (x_i, (a_j)_{j \neq i}) \succ (y_i, (a_j)_{j \neq i})$.

C.Q.F.D.

A titre d'exemple, soit $X = \{x_1, y_1, z_1\} \times \{x_2, y_2, z_2\}$ avec

$(x_1, x_2) \succ (y_1, x_2)$
$(x_1, y_2) \succ (y_1, y_2)$
$(x_1, z_2) \succ (y_1, z_2)$
$(y_1, x_2) \succ (z_1, x_2)$
$(y_1, y_2) \succ (z_1, y_2)$
$(y_1, z_2) \succ (z_1, z_2)$
$(x_1, x_2) \succ (z_1, x_2)$
$(x_1, y_2) \succ (z_1, y_2)$
$(x_1, z_2) \succ (z_1, z_2)$
$(x_1, x_2) \succ (x_1, y_2)$
$(y_1, x_2) \succ (y_1, y_2)$
$(z_1, x_2) \succ (z_1, y_2)$
$(x_1, y_2) \succ (x_1, z_2)$
$(y_1, y_2) \succ (y_1, z_2)$
$(z_1, y_2) \succ (z_1, z_2)$
$(x_1, y_2) \succ (y_1, x_2)$

Il est facile de montrer que, dans ce cas, $(X, \succ)$ est un SPPNC avec

$x_1 \underset{1}{\succ} y_1$, $y_1 \underset{1}{\succ} z_1$, $x_1 \underset{1}{\succ} z_1$, $x_2 \underset{2}{\succ} y_2$, $y_2 \underset{2}{\succ} z_2$ et
$\{1\} \gg \emptyset$, $\{2\} \gg \emptyset$, $\{1\} \gg \{2\}$

mais n'est pas un SPTNC puisque $(x_1, z_2) \sim (y_1, y_2)$ par exemple.

La définition suivante nous permet d'établir une correspondance très utile entre les SPTNC et les SPPNC.

Définition 3.19 : Soit $(X, \succ)$ un SPPNC. On définit sur X une relation binaire $\overset{*}{\succ}$ telle que :

$$x \overset{*}{\succ} y \iff (x, y) \in X^2 \text{ et } P(x, y) \gg P(y, x).$$

La relation $\overset{*}{\succ}$ est donc définie de manière non ambiguë puisque $(X, \succ)$ définit la relation $\gg$ de manière univoque.

On a les conséquences très importantes suivantes :

Théorème 3.20 : Soit $(X, \succ)$ un SPPNC et $\overset{*}{\succ}$ une relation binaire définie par la définition 3.19. Alors :

1) $x \succ y \Longrightarrow x \overset{*}{\succ} y \ \forall (x, y) \in X^2$,

2) $(X, \overset{*}{\succ})$ est un SPTNC.

Démonstration

1) $A >> B \Longrightarrow \exists (x, y) \in X^2$ tel que $[P(x, y), P(y, x)] = (A, B)$ et $x \succ y$. Or $P(x, y) >> P(y, x) \Longrightarrow x \overset{*}{\succ} y$.

2) Les relations $>>$ et $\approx$ sur $\mathcal{P}(\Omega)$ définies par $(X, \succ)$ sont telles que $x \overset{*}{\succ} y$ dès lors que $P(x, y) >> (P(y, x)$.

C.Q.F.D.

Prolonger un SPPNC $(X, \succ)$ en un SPTNC $(X, \overset{*}{\succ})$ revient donc à ajouter à $\succ$ des arcs en rendant impossibles des situations du type $[P(x, y), P(y, x)] = [P(z, w), P(w, z)]$ et $x \succ y$ et $z \sim w$. En reprenant l'exemple du SPPNC $(X, \succ)$ étudié plus haut, on voit que son SPTNC associé n'est autre que :

$$\begin{aligned}
&(x_1, x_2) \overset{*}{\succ} (y_1, x_2),\ (x_1, y_2) \overset{*}{\succ} (y_1, y_2),\ (x_1, z_2) \overset{*}{\succ} (y_1, z_2),\\
&(y_1, x_2) \overset{*}{\succ} (z_1, x_2),\ (y_1, y_2) \overset{*}{\succ} (z_1, y_2),\ (y_1, z_2) \overset{*}{\succ} (z_1, z_2),\\
&(x_1, x_2) \overset{*}{\succ} (z_1, x_2),\ (x_1, y_2) \overset{*}{\succ} (z_1, y_2),\ (x_1, z_2) \overset{*}{\succ} (z_1, z_2),\\
&(x_1, x_2) \overset{*}{\succ} (x_1, y_2),\ (y_1, x_2) \overset{*}{\succ} (y_1, y_2),\ (z_1, x_2) \overset{*}{\succ} (z_1, y_2),\\
&(x_1, y_2) \overset{*}{\succ} (x_1, z_2),\ (y_1, y_2) \overset{*}{\succ} (y_1, z_2),\ (z_1, y_2) \overset{*}{\succ} (z_1, z_2),\\
&(x_1, y_2) \overset{*}{\succ} (y_1, x_2),\ (x_1, z_2) \overset{*}{\succ} (y_1, y_2),\ (x_1, y_2) \overset{*}{\succ} (z_1, x_2),\\
&(x_1, z_2) \overset{*}{\succ} (z_1, y_2),\ (y_1, y_2) \overset{*}{\succ} (z_1, x_2),\ (y_1, z_2) \overset{*}{\succ} (z_1, y_2).
\end{aligned}$$

Dans le reste de cette section, nous nous efforçons de relier ces concepts de SPPNC et de STPNC au type d'agrégation retenu dans les méthodes ELECTRE utilisant les notions de concordance-discordance. On voit, de façon intuitive, que les SPTNC ont des liens évidents avec les calculs de concordance tandis que les SPPNC ne sont que des SPTNC auxquels on a judicieusement enlevé certains arcs et sont donc très proches des relations de surclassement utilisées dans ELECTRE. Les méthodes ELECTRE utilisent une grande variété de techniques pour mener à bien ces calculs de concordance-discordance. Nous avons pris le parti de formaliser ces notions de façon plus précise, tentant d'en conserver l'esprit, sans pour autant chercher à reproduire fidèlement les techniques retenues dans telle ou telle méthode (sur ces différentes méthodes de calcul, on pourra se reporter à Vansnick (1979) ou à Schärlig (1983)). On posera :

Définition 3.21 : $(X, \succ)$ est un système de préférence de concordance du type ρ (SPCρ) avec $\rho \geq 1$ et $\rho \in Q$ ssi :

$$\exists\, p_1, p_2, \ldots, p_n \in \mathbb{R}^{*+} \text{ et } \exists\, \varepsilon \in \mathbb{R}^{+} \text{ tel que } \forall\, (x, y) \in X^2$$
$$x \succ y \Leftrightarrow \sum_{i \in P(x,y)} p_i > \rho \sum_{i \in P(y,x)} p_i + \varepsilon.$$

Cette définition de la concordance est explicitement retenue par Vansnick (1983) et contient, comme cas particulier, les définitions de Rochat (1980) et la seconde condition de concordance d'ELECTRE II (cf. Roy et Bertier (1971), p. 20-21). La figure 3.2, inspirée des graphiques proposés par Vansnick (1979), permet d'interpréter simplement la condition de concordance d'un SPCρ. La définition 3.21 fait d'un SPCρ un SPTNC de façon évidente et impose à $\gg$ d'être transitive et compatible avec l'inclusion. On s'assurera facilement que le SPTNC associé au SPPNC pris comme exemple n'est pas un SPCρ puisque l'on a $\{1, 2\} \approx \emptyset$. Le théorème suivant permet de spécifier les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'un SPCρ. Ces conditions sont fondées sur des théorèmes de représentation de relations de plausibilités par des probabilités qualitatives (sur ce sujet, on pourra consulter Scott (1964), Domotor et Stelzer (1971), Fishburn (1969) et les synthèses de Krantz et al. (1971), chapitre 9 et de Roberts (1979), chapitre 8). On verra par la suite la grande parenté, au niveau formel, existant entre les indices d'importance $p_1, p_2, \ldots, p_n$ d'un SPCρ et des probabilités qualitatives. On a :

Théorème 3.22 : $(X, \succ)$ est un SPCρ ssi

1) $(X, \succ)$ est un SPTNC.

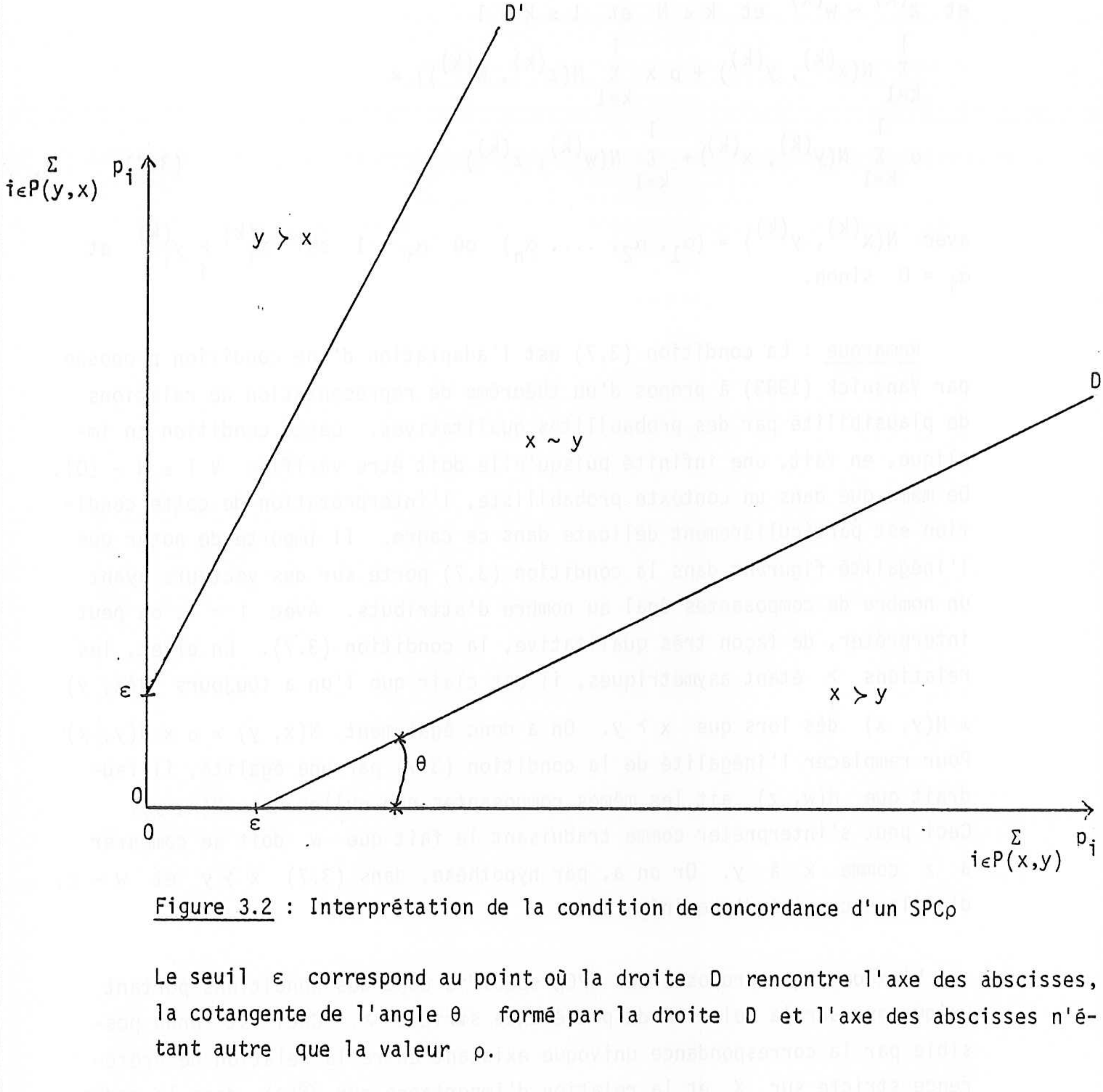


Figure 3.2 : Interprétation de la condition de concordance d'un SPCρ

Le seuil ε correspond au point où la droite D rencontre l'axe des abscisses, la cotangente de l'angle θ formé par la droite D et l'axe des abscisses n'étant autre que la valeur ρ.

2) $\forall\, l \in N - \{0\}$, $\forall\, x^{(k)}, y^{(k)}, z^{(k)}, w^{(k)} \in X^4$ avec $x^{(k)} \succ y^{(k)}$ et $z^{(k)} \sim w^{(k)}$ et $k \in N$ et $1 \leq k \leq l$

$$\sum_{k=1}^{l} N(x^{(k)}, y^{(k)}) + \rho \times \sum_{k=1}^{l} N(z^{(k)}, w^{(k)})) \neq$$

$$\rho \sum_{k=1}^{l} N(y^{(k)}, x^{(k)}) + \sum_{k=1}^{l} N(w^{(k)}, z^{(k)}) \qquad (3.7)$$

avec $N(x^{(k)}, y^{(k)}) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ où $\alpha_i = 1$ ssi $x_i^{(k)} \underset{i}{\succ} y_i^{(k)}$ et $\alpha_i = 0$ sinon.

<u>Remarque</u> : La condition (3.7) est l'adaptation d'une condition proposée par Vansnick (1983) à propos d'un théorème de représentation de relations de plausibilité par des probabilités qualitatives. Cette condition en implique, en fait, une infinité puisqu'elle doit être vérifiée $\forall\, l \in N - \{0\}$. De même que dans un contexte probabiliste, l'interprétation de cette condition est particulièrement délicate dans ce cadre. Il importe de noter que l'inégalité figurant dans la condition (3.7) porte sur des vecteurs ayant un nombre de composantes égal au nombre d'attributs. Avec $l = 1$, on peut interpréter, de façon très qualitative, la condition (3.7). En effet, les relations $\underset{i}{\succ}$ étant asymétriques, il est clair que l'on a toujours $N(x, y) \neq N(y, x)$ dès lors que $x \succ y$. On a donc également $N(x, y) \neq \rho \times N(y, x)$. Pour remplacer l'inégalité de la condition (3.7) par une égalité, il faudrait que $N(w, z)$ ait les mêmes composantes non nulles que $N(x, y)$. Ceci peut s'interpréter comme traduisant le fait que w doit se comparer à z comme x à y. Or on a, par hypothèse, dans (3.7) $x \succ y$ et $w \sim z$, d'où la nécessité d'une inégalité.

L'axiomatique proposée des SPCρ spécifie donc des conditions portant uniquement sur la relation de préférence stricte $\succ$. Ceci est rendu possible par la correspondance univoque existant entre la relation de préférence stricte sur X et la relation d'importance sur $\mathcal{P}(\Omega)$ dans le cadre d'une SPTNC. Bien que la relation d'importance n'intervienne pas explicitement dans la démonstration, on verra que c'est cette correspondance qui la sous-tend.

La démonstration de ce théorème figure à l'annexe 4.

Le théorème 3.22 fournit donc des conditions nécessaires et suffisantes pour parvenir à un SPCρ qui recouvre un nombre très important de techniques de calcul de concordance utilisées dans les méthodes de type ELECTRE.

Il est de plus possible de spécifier plus précisément le rôle de la discordance dans les méthodes de type ELECTRE. Ce sera l'objet de la définition suivante :

Définition 3.23 (*) : $(X, \succ)$ est un Système de Préférence de type Discordance (SPD) ssi :

- $(X, \succ)$ est un SPPNC et
- $\forall j \in P(y, x)$, $x \succ y \Rightarrow \forall x_j^* \succsim_j x_j$, $x^* \succ y$ avec $x^* = ((x_i)_{i \neq j}, x_j^*)$.

Cette définition traduit le fait qu'un SPD ne "brise" par les arcs de son SPTNC associé de façon aléatoire mais n'introduit de l'incomparabilité que lorsque les écarts de préférence sur les attributs discordants deviennent "suffisamment importants". On vérifiera sans peine que le SPPNC $(X, \succ)$ donné en exemple est également un SPD. Pour parvenir à une définition de "seuils de veto" ou d'écarts de discordance, la définition 3.23 n'est cependant pas suffisante puisque les relations $\succsim_i$ n'ont jamais été supposées transitives ou même exemptes de cycles. Cette définition fera l'objet de la propriété suivante :

Propriété 3.24 : Soit $(X, \succ)$ un SPD ; alors si, $\forall i \in \Omega$ et $\forall Y_i \subset X_i$ et $Y_i \neq \emptyset$, $\exists \bar{x}_i$ et $\underline{x}_i \in Y_i$ tels que $\bar{x}_i \succsim_i x_i$ $\forall x_i \in Y_i$ et $x_i \succsim_i \underline{x}_i$ $\forall x_i \in Y_i$ et si $\forall (x, y, z) \in X$ $[P(x, y) = P(z, y)$ et $P(y, x) \supset P(y, z)]$ $\Rightarrow [x \succ y \Rightarrow z \succsim y]$, alors $x \succ y \Rightarrow \forall j \in P(y, x)$.

$$\text{Soit } \forall x'_j \in X_j, x' \succ y \text{ avec } x' = (x'_j, (x_i)_{i \neq j}) \tag{3.13}$$

Soit $\exists y_j^V(x_{\Omega-\{j\}}, y) \in X_j$ tel que

$$\forall x'_j \in X_j, x'_j \succ_j y_j^V(x_{\Omega-\{j\}}, y) \Leftrightarrow x' \succ y \tag{3.14}$$

avec $x' = (x'_j), (x_i)_{i \neq j})$.

(*) On trouvera dans Bouyssou et Vansnick (1984) plusieurs définitions alternatives permettant l'introduction de la discordance.

Démonstration

Soit $\underline{x}_j \in X_j$ tel que $x_j \succsim_j \underline{x}_j \; \forall x_j \in X_j$ et $\underline{x} = (\underline{x}_j, (x_i)_{i \neq j})$.
On a $x \succ y$. D'après la définition de $\underline{x}$, on a :

$$P(x, y) = P(\underline{x}, y) \text{ et } P(y, x) = P(y, \underline{x}) \text{ ou } P(y, x) \supset P(y, \underline{x}).$$

Donc, d'après la définition d'un SPPNC :

- Soit $\underline{x} \succ y$ et, d'après la définition 3.23, on a :

$x' \succ y \;\; \forall x'_j \in X_j$ ou $x' = (x'_j), (x_i)_{i \neq j})$, d'où (3.13).

- Soit $\underline{x} \sim y$. Posons :

$$\underset{\sim}{X}_j = \{\underset{\sim}{x}_j \,/\, \underset{\sim}{x}_j \in X_j \text{ et } \underset{\sim}{x} \sim y \text{ avec } \underset{\sim}{x} = (\underset{\sim}{x}_j, (x_i)_{i \neq j})\}$$
$$\tilde{X}_j = \{\tilde{x}_j \,/\, \tilde{x}_j \in X_j \text{ et } \tilde{x} \succ y \text{ avec } \tilde{x} = (\tilde{x}_j, (x_i)_{i \neq j})\}.$$

On a $\underset{\sim}{X}_j \cap \tilde{X}_j = \emptyset$ et, d'après la définition d'un SPPNC, $\underset{\sim}{X}_j \cup \tilde{X}_j = X_j$. De plus, $\forall \tilde{x}_j \in \tilde{X}_j$ et $\forall \underset{\sim}{x}_j \in \underset{\sim}{X}_j$, $\tilde{x}_j \succ_j \underset{\sim}{x}_j$ d'après la définition d'un SPD.

Soit $y_j^V(x_{\Omega-\{j\}}, y_j) \in X_j$ tel que $y_j^V(x_{\Omega-\{j\}}, y_j) \succsim_j \underset{\sim}{x}_j \;\; \forall \underset{\sim}{x}_j \in \underset{\sim}{X}_j$.
Cette valeur existe par hypothèse, d'où (3.14).

C.Q.F.D.

La condition-clé de la propriété 3.24 stipule que, pour tout sous-ensemble de valeurs sur un attribut, il existe une d'entre elles qui est "au moins aussi bonne" que toutes les autres. Il est facile de montrer que cette condition implique l'acyclicité de $\succ$. Pour le prouver, il suffit de supposer $Y_1 = \{x_1, x_2, x_3\}$ et $x_1 \succ x_2 \succ x_3 \succ x_1$. Elle n'implique cependant ni la transitivité de $\succ$, ni celle de $\sim$. En effet, soit $X = x_1, x_2, x_3$ et $\succ$ telle que $x_1 \succ x_2$, $x_2 \succ x_3$ et $x_1 \sim x_3$ qui vérifient la condition de la propriété 3.24. Il en aurait été de même avec $x_1 \sim x_2$, $x_2 \sim x_3$ et $x_1 \succ x_3$. La restriction structurelle introduite dans la propriété 3.24 nous semble donc peu contraignante dans le cadre de problèmes réels.

La propriété 3.24 permet donc d'établir, sous certaines conditions, l'existence d'un "seuil de veto". En toute rigueur cependant, celui-ci dépend non seulement de l'évaluation de y sur l'attribut j mais aussi de son évaluation sur tous les autres attributs et n'est pertinent que pour une action x dont on connaît les évaluations sur tous les attributs autres que j (d'où la notation $\overset{v}{y}_j(x_{\Omega-\{j\}}, y)$. A ce stade, on peut donc caractériser, de façon formelle, les systèmes de préférences "de type ELECTRE" faisant appel à la double notion de concordance-discordance.

<u>Définition 3.25</u> : Un système de préférence $(X, \succ)$ est de type ELECTRE (SPE) si et seulement si :

- $(X, \overset{*}{\succ})$ est un SPCρ.
- $(X, \succ)$ est un SPD vérifiant les conditions de la propriété 3.24.
- $\forall$ $(x, y, z, w) \in X^4$ avec $P(y, x) = P(w, z)$ et $x \succ y$ et $z \succ w$ et $\exists\, j \in P(y, x)$ tel que $y_j = w_j$, alors

$$\overset{v}{y}_j(x_{(\Omega-\{j\})}, y) = \overset{v}{w}_j(z_{(\Omega-\{j\})}, w).$$

Cette définition traduit le fait qu'un SPE est issu de l'application des principes de concordance et de discordance, les seuils de veto sur chaque attribut ne dépendant que du niveau où l'on se situe sur cet attribut.

Cette série de définitions appelle deux remarques principales :

a) La définition 3.25 montre bien qu'un SPE est un SPPNC de type tout à fait particulier. Il est cependant clair que l'intérêt des SPE, d'un point de vue pratique, est indépendant de leur généralité du point de vue théorique. Les SPE présentent l'immense avantage de pouvoir être obtenus sur un plan constructif par application de règles très simples, sur la base d'une "convention" très générale dont on a montré qu'elle pouvait se révéler particulièrement utile dans certaines situations.

b) Les développements de ce chapitre ont été effectués sur la base d'une relation de préférence stricte $\succ$ antisymétrique et ne permettent donc pas de distinguer, au sein de la relation ~, les situations d'indifférence et d'incomparabilité. Il est clair que cette option a été prise, en premier lieu, en raison de considérations techniques. Indépendamment de celles-ci, ce choix peut néanmoins se justifier par :

- Un souci de cohérence avec les autres branches de la théorie de la décision n'utilisant que des relations asymétriques.

- Le sentiment que, dans un modèle de nature constructive, l'essentiel est avant tout de rechercher des relations de préférence bien affirmées entre les actions. A partir du moment où l'on reconnaît explicitement que la relation ~, définie de manière négative, ne traduit pas (ou pas seulement) une indifférence entre les actions, il nous semble peu utile, d'un point de vue théorique, de vouloir rechercher à la séparer en deux composantes distinctes. Comme le note Huber (1979), le seul cas d'indifférence (dans une logique non compensatoire) véritable reste celui où deux actions sont indifférentes sur tous les critères. Dans une logique non compensatoire, le statut de l'indifférence est donc très proche de celui d'une "équivalence" entre les actions dans la pratique. Cependant, dès lors que l'on considère que de petites différences d'évaluation sur un critère peuvent ne pas être significatives, cette notion d'"équivalence" n'apparaît plus aussi clairement. Il devient dès lors nécessaire de chercher à nouveau à séparer cette notion de l'incomparabilité, ce qui est fait dans la plupart des méthodes de l'Ecole Française. Dans une logique d'agrégation compensatoire, au contraire, la notion d'indifférence est cruciale (cf. les techniques décrites au chapitre 2 permettant d'estimer les fonctions d'utilité ou les techniques classiques d'estimation de taux de substitution) et son rôle ne se limite, bien sûr, plus à celui d'une simple "équivalence".

D'un point de vue théorique, le choix que nous avons effectué a donc le mérite de souligner le caractère très spécifique de la notion d'indifférence dans le cadre d'une logique d'agrégation non compensatoire. La nécessaire distinction entre l'indifférence et l'incomparabilité, dans la pratique, tient principalement au problème de la définition d'une "équivalence" entre actions lorsque celles-ci sont évaluées de façon imprécise et/ou non probante sur les attributs (ou critères).

D. L'INTRODUCTION DE SEUILS DANS UNE APPROCHE CONSTRUCTIVE

Une des principales originalités des deux plus récentes des méthodes de la famille ELECTRE (ELECTRE III, cf. Roy (1978) et ELECTRE IV, cf. Roy et Hugonnard (1982) et Skalka, Bouyssou et Bernabeu (1983)) consiste dans l'introduction de seuils dits de "discrimination" dans la définition des critères. Comme nous l'avons vu au B.3 à propos d'ELECTRE III, les données de départ de ces méthodes consistent en une famille cohérente de pseudo-critères, c'est-à-dire que chaque critère est muni de deux seuils : un "seuil d'indifférence" et un "seuil de préférence". Nous nous efforcerons tour à tour, dans cette section, de montrer en quoi ces seuils de discrimination se rapprochent ou se différentient d'autres façons d'utiliser la notion de seuil avant de tenter de mieux cerner leur rôle et de passer en revue certaines techniques permettant de raisonner leur quantification.

1. Seuils et seuils de discrimination

La conception probablement la plus ancienne et la plus répandue de la notion de seuils trouve sa source dans les "Sciences Expérimentales" et, plus particulièrement, en physique. On a très tôt reconnu l'impossibilité de mesurer, de façon exacte, une quantité physique pour un grand nombre de raisons (erreurs dites "systématiques" dans la construction ou l'étalonnage des appareils de mesure, erreurs dites "fortuites" dues aux conditions d'expérimentation et à l'intervention de l'expérimentateur, etc.), indépendamment des problèmes plus fondamentaux que peut soulever la possibilité même d'effectuer une mesure dans certaines situations (principe d'incertitude par exemple). Le calcul classique des erreurs en physique (cf. par exemple Ney (1963) ou Lefrançois (1959)) consiste, compte-tenu de ce que l'on sait des erreurs systématiques possibles dues à la structure de l'appareil de mesure et après de multiples expériences visant à limiter l'effet des erreurs fortuites, à donner les bornes par excès et par défaut à l'intérieur desquelles on estime (avec certitude ou par rapport à une notion d'"intervalle de confiance" statistique) que la "vraie valeur" se situe. Pour ce faire, on adopte un certain nombre de règles simples concernant la manipulation de ces bornes dans des opérations arithmétiques. Notons que ces procédures classiques reposent toutes sur l'idée qu'il existe une quantité "vraie" mais inconnue (c'est-à-dire ici non mesurable). Ce seuil d'"approximation" recouvre donc une incapacité à mesurer, de façon exacte, une quantité existante.

Parallèlement aux physiciens, de nombreux psychologues ont également utilisé une notion de seuil, cette fois liée à l'"inertie" de l'appareil sensoriel humain qui ne peut déceler une différence entre deux stimulii que lorsque celle-ci excède une "différence minimale significative" ("Just Noticeable Difference" J.N.D.). Ce seuil est donc un seuil de "perception" qui est, dans son principe, relativement proche du seuil d'approximation des physiciens puisqu'il vise à intégrer l'imperfection de l'appareil de mesure que constituent nos sens. Luce (1956) a montré qu'il était possible, au travers de la notion de "quasi-ordre" (cf. chapitre II) de formaliser, de façon très générale, de telles structures de perception "imparfaites" (cf. le célèbre exemple de la tasse de café). Certains économistes ont tenté d'intégrer explicitement ce type de seuils dans une formalisation poussée (cf. par exemple Devletoglou (1971)). Il convient cependant de noter que le passage d'une relation de perception (ou de similarité) faisant intervenir des seuils à une relation de préférence n'est pas exempt d'ambiguité. En reprenant l'exemple de la tasse de café de Luce, s'il est clair qu'en l'absence d'informations sur la quantité de sucre dans chaque tasse la structure de perception de celles-ci fera intervenir des seuils, il est légitime de se demander si un individu, confronté à une succession de tasses dont il connait la teneur en sucre, ne préfèrera pas une tasse t à une tasse t' dès lors que t est plus sucrée que t', même s'il est incapable de les distinguer en les goûtant (on constate par exemple souvent que l'achat d'un matériel acoustique se fait sur la base d'indicateurs chiffrés dont les variations ne sont certainement pas décelables en-deça de certaines limites).

Comme nous l'avons déjà vu (cf. chapitre II et B.3), le modèle du pseudo-critère ainsi que la structure de pseudo-ordre qui lui est associée présentent, sur le plan formel, une grande parenté avec les modèles utilisés par les psychologues. On verra de plus, au 3, que, dans de nombreuses études, les seuils de discrimination semblent avoir été utilisés de façon à prendre en compte la part d'imprécision affectant les données de départ, ce qui ne va pas sans rappeler le seuil d'"approximation" des physiciens. Le reste de cette section s'efforcera de montrer que les "seuils de discrimination" ne peuvent cependant pas se ramener à l'une ou l'autre de ces conceptions et présente une profonde originalité dans le cadre de l'aide à la décision.

2. Le rôle des seuils de discrimination

Parvenir à une famille cohérente de critères munis de seuils de discrimination relève d'une double démarche de "conception" d'axes de signification (si possible "indépendants", cf. chapitre I) et de "ponctualisation" (cf. Roy (1979-1983), chapitre 9). Comme nous l'avons vu au chapitre I, les données de départ consistent le plus souvent, pour chaque action, en un ensemble d'évaluations "non déterministes" sur une famille de conséquences $X_1, X_2, \dots, X_m$ qu'il s'agit de "transformer" en une famille de pseudo-critères $\{g_1, p_1, q_1\}, \{g_2, p_2, q_2\}, \dots, \{g_n, p_n, q_n\}$. Il est, bien sûr, vraisemblable que les évaluations non déterministes sur le "spectre des conséquences" $X_1, X_2, \dots, X_m$ (cf. Roy (1979-1983)) feront intervenir des seuils d'"approximation" (certaines conséquences sont mesurées) et/ou des seuils de "perception" (certaines conséquences font intervenir la perception d'acteurs divers). Les seuils de discrimination ne sont donc pas sans liens avec ceux d'"approximation" ou de "perception". Comme nous allons le voir, leur fonction principale est cependant toute différente, même si, dans certains cas, il est possible d'établir des liaisons entre ces différentes notions.

Pour bien comprendre la spécificité du rôle des seuils de discrimination, il convient de s'interroger plus avant sur les arguments avancés pour les introduire. On a vu, au chapitre précédent, qu'il existait de nombreuses techniques qui, en imposant une restriction structurelle sur la forme des évaluations non déterministes sur les conséquences élémentaires, permettaient de bâtir des critères sans seuils, ce que nous avons appelé des "vrais-critères". Dans le cadre d'une démarche constructive, Roy (1979-1983), chapitre 9 p. 300 donne trois raisons principales justifiant le recours à des seuils de discrimination :

a) les évaluations des actions potentielles sur les conséquences élémentaires $X_1, X_2, \ldots, X_m$ sont souvent entachées d'une large part d'imprécision, d'incertitude, voire d'arbitraire ;

b) les techniques permettant de passer de ces évaluations non déterministes aux critères (constituant une information plus opérationnelle et donc plus pauvre) emportent souvent de nombreux éléments d'arbitraire qu'il est souhaitable de gérer explicitement dans la modélisation ;

c) les actions à comparer étant des actions réelles (et non idéales), il est prudent d'estimer que leur comparaison pourra faire intervenir des éléments difficilement modélisables explicitement (et donc ne pourra s'opérer, seulement, comme celle de deux nombres).

En résumé, l'argument principal en faveur de l'introduction de seuils de discrimination tient aux outrances engendrées par le modèle du vrai-critère où l'on considère toute différence $u = g(a') - g(a)$ comme révélatrice d'une préférence stricte de a' sur a dès lors qu'elle est positive. Au contraire, comme le fait remarquer Roy (1979-1983), chapitre 9 p. 319 : *"le modèle du pseudo-critère a pour objet ... de cerner des situations d'indifférence et de préférence aussi peu discutables que possible"*. Les seuils de discrimination doivent donc avant tout être considérés comme des "seuils de probance". En matière d'aide à la décision, on constate en effet bien souvent qu'un problème crucial réside précisément dans le "flou conceptuel" entourant les axes de signification manipulés. Comme le font remarquer par exemple Roy, Présent et Silhol (1983), s'il est clair que la notion de "trafic sur un quai" est importante pour décider d'un ordre de priorité de rénovation des stations de métro, sa mesure reste fortement problématique : quel jour choisira-t-on pour effectuer la mesure ? A quelle heure ? Quelle est la fiabilité des méthodes de comptage ? S'agit-il de prendre en compte des trafics "moyens" ou "instantanés" ?, etc. On voit bien ici que le "non-déterminisme" affectant ce concept de trafic ne peut se résumer par un seuil d'approximation ou de perception. Parler ici de "vraie valeur" n'a plus sens dans la mesure où c'est la notion même de ce qui doit être appréhendé qui pose problème. Pour reprendre l'exemple du "trafic", on conçoit bien que les mesures effectuées permettent de donner un ordre de grandeur de ce qui devrait être "idéalement" appréhendé. Introduire des seuils de discrimination revient alors à ne pas vouloir faire dire à des "ordres de grandeur" plus que ce qu'ils ne signifient en réalité.

Lorsque les conséquences élémentaires n'échappent pas à ce "flou conceptuel" (c'est le plus souvent le cas), les évaluations des actions potentielles prennent souvent la forme d'un intervalle, ce que Roy (1979-1983), chapitre 8 a appelé une évaluation ponctuelle avec seuils de dispersion. D'un point de vue formel, ces seuils de dispersion sont très proches des "seuils d'approximation" de la physique. Ils ne visent cependant pas à "entourer" une valeur vraie mais à permettre à l'analyste de gérer toute l'imprécision et l'arbitraire issu de la "mauvaise" définition (en toute rigueur, il faudrait parler de l'impossibilité d'une définition) de ce qu'il cherche à mesurer. Cette similitude formelle a parfois entraîné une certaine confusion entre ces deux notions qui s'est traduite par le fait qu'on a souvent envisagé les seuils de discrimination (raisonnés sur base des seuils de dispersion) comme devant refléter la "mauvaise mesure" des données de départ. On verra plus avant, au 3, quels sont les liens entre seuils de dispersion et seuils de discrimination.

Cette idée de "seuil de probance" explique que, lors de l'introduction de la notion de "seuil de discrimination" (cf. Roy (1975)), aucune technique précise d'évaluation de ces grandeurs n'était proposée, en-dehors du raisonnement évoqué au B.3 consistant, à partir d'une différence

$u = g(a') - g(a)$ révélatrice sans ambiguïté d'une préférence stricte (resp. d'une indifférence) et à la réduire (resp. à l'augmenter) jusqu'au point où la différence ne semble plus révélatrice d'une situation de préférence claire, définissant ainsi le seuil de préférence (resp. d'indifférence). En effet, compte-tenu de ce qui précède, le bien-fondé de l'existence des seuils de discrimination découlait du fait que toute valeur (raisonnable) non nulle semblait plus réaliste que de poser $p(g(a)) = q(g(a)) = 0$ pour toute action potentielle a.

Avant de rentrer plus avant dans les techniques permettant de quantifier ces seuils, nous ferons quelques remarques préliminaires sur la nature du modèle du pseudo-critère. Comme le fait remarquer Roy (1979-1983), chapitre 9, le modèle du pseudo-critère (tout en recouvrant comme cas particulier celui du quasi-critère qui génère, sur l'ensemble des actions, la structure connue de quasi-ordre) est loin d'être le plus général qui puisse se concevoir pour guider la comparaison de deux actions. Ainsi que nous l'avons vu au 8.3, le modèle du pseudo-critère ne fait intervenir que <u>deux</u> seuils dont les valeurs sont liées non aux actions elles-mêmes mais à leurs évaluations sur l'échelle associée au critère. Ces deux limites méritent quelques brefs commentaires. En premier lieu, il faut signaler qu'il est parfaitement possible de formaliser des structures de préférence faisant intervenir un nombre arbitraire de seuils (cf. par exemple Vincke (1977a) ou, de façon liée, la littérature abondante sur les relations de préférences floues, cf. Roubens et Vincke (1983)). Le choix d'un modèle à deux seuils peut donc paraître entaché d'un certain arbitraire. Pour bien comprendre les raisons de ce choix, il convient d'aborder à nouveau la façon dont sont introduits ces deux seuils.

L'objectif des méthodes de type ELECTRE est de bâtir, entre les actions, une relation de surclassement. Pour ce faire, elles cherchent au préalable à comparer les actions potentielles relativement à chaque axe de signification. Dès lors que, sur chacun de ces axes, l'on ne distingue pas entre différents niveaux d'<u>intensité</u> de cette préférence (on peut noter que ce concept d'intensité n'est d'ailleurs pas lié directement à la probance de la comparaison) et l'on prend l'option d'exclure d'éventuelles incomparabilités (cf. pour une option contraire Bisdorff (1981)), il est "naturel" de vouloir séparer les cas où, compte-tenu des données de départ, on a des raisons suffisantes d'admettre une préférence stricte en faveur de l'une ou l'autre des actions, de ceux où l'indifférence semble s'imposer. En raison du caractère parfois arbitraire de certaines options de modélisation, il semble cependant prudent d'admettre que, dans certaines situations, il est légitime d'hésiter entre une préférence stricte et une indifférence, cette zone correspondant à la "préférence faible" du modèle du pseudo-critère. Pour séparer ces trois zones, l'utilisation de deux seuils semble donc naturelle.

L'existence de ces deux seuils est donc intrinsèquement liée au refus de distinguer différents "niveaux de préférence" et d'accepter des situations d'incomparabilité au niveau de chaque axe de signification. La pertinence de ces deux hypothèses nous semble fortement dépendante du type d'agrégation des critères que ces méthodes utilisent par ailleurs. Ainsi, l'hypothèse d'absence d'incomparabilité au niveau de chaque axe de signification est étroitement liée à la façon dont ces axes sont bâtis dans une démarche constructive. Comme nous l'avons déjà mentionné, la possibilité de toujours comparer, toutes choses égales par ailleurs, deux actions potentielles relativement à chaque axe de signification constitue un préalable à la constitution de ce que nous avons appelé une "charpente" d'une structure de préférence sans laquelle la possibilité d'une construction semble inexistante.

Ce raisonnement permet par ailleurs de mieux percevoir la nature de la relation de "préférence faible" qui est une notion assez peu classique en théorie de la décision. Accepter la pertinence du modèle du pseudo-critère revient à refuser l'interprétation de cette relation en termes d'"intensité" de préférence. Une préférence faible n'est pas une préférence moins "marquée" qu'une préférence stricte mais une préférence stricte que l'on n'a pas pu établir avec suffisamment de sécurité, autrement dit avec moins de probance. La différence entre cette hésitation et une moindre intensité n'est pas toujours claire dans la façon dont ces méthodes exploitent cette relation (voir également l'interprétation de Brans et Vincke (1982)). A titre d'exemple, la méthode ELECTRE III fait correspondre, à cette zone de préférence faible, des "degrés de crédibilité" $c_j(a, b)$ du surclassement variant linéairement avec les évaluations (cf. figure 3.3). Cette crédibilité différenciée dans la zone de préférence faible pourrait faire croire à une intensité de préférence. Elle doit cependant être interprétée, à notre sens, comme une façon d'apprécier qualitativement comment l'"hésitation" peut varier dans la zone comprise entre les deux seuils en évitant des "effets de bords" difficilement justifiable intuitivement (pour une interprétation de ce degré de crédibilité en termes d'intensité de la préférence, voir cependant Vansnick (1982)). Les deux seuils du modèle du pseudo-critère sont de plus intrinsèquement liés à l'échelle du critère et non aux actions elles-mêmes.

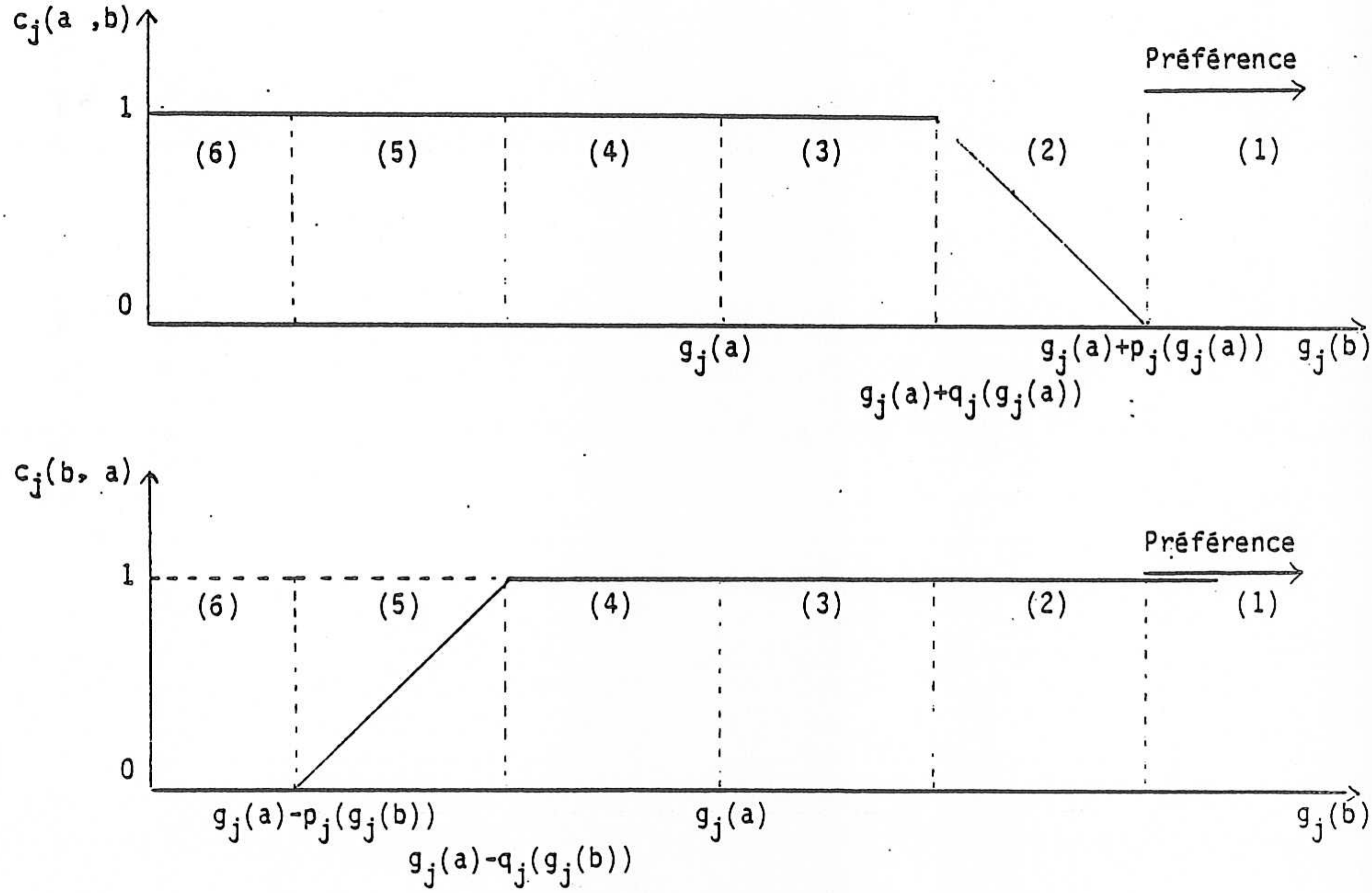


Figure 3.3 : Degré de crédibilité du surclassement partiel dans la méthode ELECTRE III (préférences croissantes avec les évaluations)

On trouvera dans Roy (1979-1983), chapitre 9 divers exemples montrant que, dans certains cas, le raisonnement que nous avons présenté (cf. B.3) pour aboutir à la notion de seuil de discrimination conduit à faire dépendre les seuils non pas de la position des actions sur l'échelle du critère mais, plus généralement, de l'évaluation des deux actions à comparer sur l'ensemble des conséquences élémentaires prises en compte dans l'axe de signification du critère. Les raisons de cette option de modélisation qui, à première vue, peut paraître relativement restrictive, n'apparaîtront clairement que lorsque nous aurons passé en revue certaines techniques permettant de raisonner la quantification de ces seuils. Rien ne s'oppose cependant à l'utilisation de méthodes telles que ELECTRE III et IV lorsque les seuils ne sont pas intrinsèques. Une telle éventualité reviendrait cependant à manipuler un volume d'informations très important dont on peut se demander s'il serait véritablement significatif (dans une approche constructive).

Dans un grand nombre d'études réelles menées à l'aide d'une méthode faisant intervenir la notion de seuil de discrimination, il semble que leur rôle soit resté très proche de celui d'un seuil d'approximation ou de perception, étant fondés sur des "seuils de dispersion" dont on n'a pas reconnu l'élément spécifique. Jacquet-Lagrèze (1975b) considère explicitement que le seuil de discrimination est soit un seuil "d'incertitude" traduisant une mesure approximative, soit un seuil d'"indifférence" liée à une perception imparfaite de petites différences. Siskos et al. (1983) interprètent le seuil de préférence (le seuil d'indifférence étant considéré comme toujours nul) comme un "seuil maximal de non-signification" traduisant une imprécision de mesure. Au-delà de cette zone de "flou", il devient possible de comparer deux actions sans ambiguité.

Une telle pratique nous semble cependant fort restrictive puisqu'elle revient à nier à la notion de seuil de discrimination toute son originalité. Il nous semble d'autant plus difficile, sur un plan conceptuel, de vouloir réduire le rôle des seuils de discrimination au fait d'intégrer explicitement, dans la modélisation, le caractère non déterministe des données de départ que, a priori, aucune restriction n'est faite sur la nature de ce non-déterminisme. Il est clair qu'il sera impossible de rendre compte à tout coup, de façon probante, de cette information à l'aide d'un pseudo-critère.

De fait, des tentatives ont été effectuées (même si elles n'ont pas toutes pleinement abouti) pour ne pas réduire le rôle des seuils de discrimination à celui d'un simple seuil d'approximation. On pourra consulter à ce sujet Roy et Bouyssou (1983) ou chapitre IV, Roy et Hugonnard (1982), Salomon (1983) et Schnabele (1983). Pour une étude détaillée de l'évaluation des seuils dans le cadre d'une étude réelle et, en particulier, sur l'idée de probance, on se reportera à Roy, Présent et Silhol (1983) (*).

Mentionnons enfin que les seuils de discrimination doivent servir à la mise à jour de situations de préférence probantes non seulement compte-tenu de l'évaluation des actions sur des axes de signification difficilement appréhendables mais encore compte-tenu de la méthode qui sera utilisée pour parvenir à une agrégation (**). Comme le font remarquer Roy et Bouyssou (1983), *"l'utilisation du modèle du pseudo-critère reste ... dans la suite logique de la prudence, voire de la méfiance, que l'homme d'étude ... garde vis-à-vis de sa méthodologie"*. Les seuils de discrimination ne doivent donc pas intégrer seulement la mauvaise qualité des données de départ mais également la "mauvaise qualité" des outils utilisés pour parvenir à une prescription (ainsi que la difficulté de modéliser explicitement tous les éléments pouvant entrer dans la perception d'actions "réelles"). A ce titre, l'interprétation de ces seuils n'est pas <u>fondamentalement</u> différente de celle des divers <u>paramètres</u> (ensemble de discordance, seuil de concordance) entrant dans la plupart des méthodes

---

(*) Lorsque l'axe de signification du critère recouvre une réalité physique claire, il peut être utile de lier les seuils de discrimination aux problèmes d'"indivisibilité" sur ce critère. A propos d'un problème de choix d'équipements collectifs, c'est l'option qui a été retenue par Norese et Ostanello (1979) qui lient les seuils à l'équipement collectif le plus petit susceptible d'être entrepris.

(**) Ces deux "rôles" des seuils sont, bien sûr, intrinsèquement liés puisque c'est la notion de "probance" des comparaisons qui les engendrent tous deux. La "mauvaise qualité" de la méthode tient bien sûr au fait qu'elle est destinée à prendre en compte des axes de signification "flous".

de type ELECTRE. De même que dans ELECTRE I, le seuil de concordance visait à s'assurer que les critères concordants étaient "suffisamment" importants, de même ici les seuils de discrimination visent à s'assurer de l'établissement, sur chaque axe de signification, d'une structure de préférence "suffisamment" probante compte-tenu à la fois des données de départ et de la part d'arbitraire (cf. III.A) inhérente aux choix de ces axes de signification, considérés comme les lignes de force d'une construction future. A ce sujet, Roy et Bouyssou (1983) notent (l'homme d'étude) : *"N'ayant pas pour repère des préférences existantes, celui-ci n'estime être en droit de conclure à une préférence probante que si les outils, souvent grossiers, qu'il utilise ne lui laissent aucun doute à ce sujet, d'où l'utilisation d'une "zone tampon" traduite par les seuils de discrimination".*

Une fois mis en évidence le rôle complexe joué par les seuils de discrimination dans une démarche constructive, il convient de passer en revue certaines "techniques" permettant de leur donner une valeur.

3. Le mode de calcul des seuils de discrimination

Fréquemment, il pourra être suffisant, pour avoir un ordre d'idée de la valeur à donner aux deux seuils de discrimination, d'appliquer, avec le décideur, le type de raisonnement évoqué au B.3 (cf. Roy (1979-1983), chapitre 9 p. 318 et ss.). Pour certaines situations se produisant fréquemment, il est cependant utile de structurer un peu plus avant ce raisonnement.

a) Seuils de dispersion et seuils de discrimination (*) (cf. Roy (1979-1983), chapitre 9)

Dans de nombreuses situations, il n'est pas possible de résumer l'évaluation d'une action a sur une conséquence i par un seul nombre $x_i(a)$. Grâce à un calcul d'erreurs, à une estimation de marges de tolérance ou de fluctuation, on peut souvent évaluer une action au travers de :

(*) Cette sous-section est inspirée de Roy et Bouyssou (1983), annexe 4.

- son évaluation $x_i(a)$,
- une approximation par excès de cette valeur : $x_i(a) + \eta_i^+(a)$,
- une approximation par défaut de cette valeur : $x_i(a) - \eta_i^-(a)$

où $\eta_i^+(a)$ et $\eta_i^-(a)$ peuvent fort bien être différents (marge d'erreur sur un devis de construction par exemple). Une telle évaluation constitue ce que nous avons appelé "évaluation ponctuelle entourée d'un seuil de dispersion".

Dans une telle situation, il est naturel de poser $g_i(a) = x_i(a)$. Cependant, compte-tenu de l'imprécision entourant le nombre $x_i(a)$, on ne peut regarder la différence $g_i(a) - g_i(a')$ comme probante d'une situation de préférence stricte dès lors qu'elle est positive.

Roy (1979-1983), chapitre 9) montre que, lorsque les seuils de dispersion η^+ et η^- sont intrinsèques, c'est-à-dire qu'ils ne dépendent que de l'évaluation de l'action et non de l'action elle-même, on peut faire du critère $g(a)$ un pseudo-critère (on trouvera dans Siskos et Hubert (1983) certaines techniques permettant de traiter le cas où η^+ et η^- ne sont pas intrinsèques).

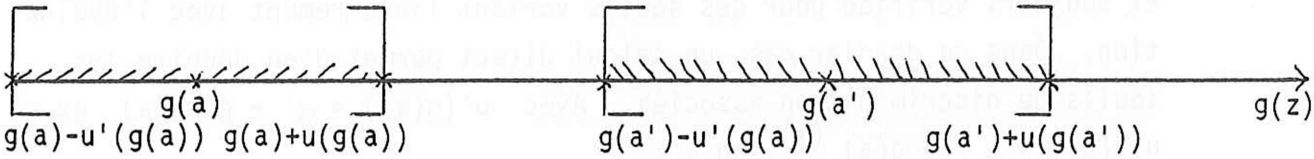
Les seuils de dispersion étant intrinsèques, on peut poser :

$$\eta^+(a) = u(g(a))$$
$$\eta^-(a) = u'(g(a)).$$

Il est alors raisonnable de considérer que a' est strictement préféré à a lorsque :

$$g(a') - u'[g(a')] > g(a) + u[g(a)],$$

c'est-à-dire lorsque les deux intervalles d'imprécision sont disjoints. Soit, graphiquement :

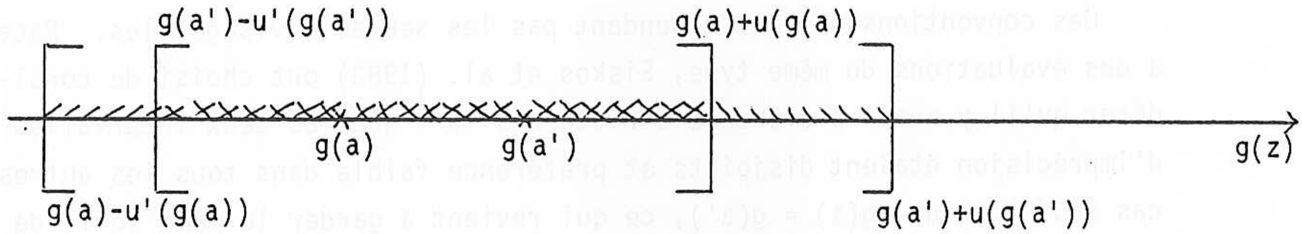


Si l'on fait décroître $g(a')$, les deux intervalles hachurés vont se chevaucher progressivement. On peut admettre que ce chevauchement ne traduira une situation d'indifférence entre a' et a que lorsque :

$$g(a) \in [g(a') - u'(g(a')) \; ; \; g(a') + u(g(a'))]$$

$$\text{et} \quad g(a') \in [g(a) - u'(g(a)) \; ; \; g(a) + u(g(a))],$$

situation où l'évaluation de chaque action est comprise dans l'intervalle d'imprécision de l'autre action. Soit, graphiquement :



La situation intermédiaire correspond alors à un domaine d'hésitation entre indifférence et préférence stricte que l'on a interprétée comme une préférence faible de a' par rapport à a.

On trouvera dans Roy (1979-1983), chapitre 9 une justification détaillée de ces conventions que des considérations de bon sens nous ont permis de comprendre. Roy (1979-1983) montre qu'il est toujours possible de rendre compte de ces conventions à l'aide d'un pseudo-critère, c'est-à-dire qu'il existe deux fonctions $p(g(a))$ et $q(g(a))$ telles que :

$$g(a') > g(a) + p(g(a)) \iff g(a') - u'(g(a')) > g(a) + u(g(a))$$

$$\text{et} \quad g(a') > g(a) + q(g(a)) \iff g(a') > g(a) + u(g(a))$$

$$\text{ou} \quad g(a) < g(a') - u'(g(a'))$$

sous réserve que u et u' vérifient une condition de cohérence simple et toujours vérifiée pour des seuils variant linéairement avec l'évaluation. Dans ce dernier cas, un calcul direct permet d'en déduire les seuils de discrimination associés. Avec $u'(g(a)) = \alpha' + \beta' g(a)$ et $u(g(a)) = \alpha + \beta g(a)$ (*), on a :

$$p(g(a)) = \frac{\alpha + \alpha' + (\beta + \beta')\, g(a)}{1 - \beta'}$$

et

$$q(g(a)) = \mathrm{Min}(\alpha + \beta\, g(a), \frac{\alpha' + \beta'\, g(a)}{1 - \beta'}).$$

Remarque : Lorsque les préférences décroissent avec les valeurs du critère, ces formules donnent des seuils inverses et non des seuils directs (sur ces notions, on se reportera à Roy (1979-1983), chapitre 9 et à Skalka, Bouyssou et Bernabeu (1983) sur leur prise en compte dans les méthodes ELECTRE).

Ces conventions ne sont cependant pas les seules envisageables. Face à des évaluations du même type, Siskos et al. (1983) ont choisi de considérer qu'il y avait préférence stricte dès lors que les deux intervalles d'imprécision étaient disjoints et préférence faible dans tous les autres cas sauf lorsque $g(a) = g(a')$, ce qui revient à garder le même seuil de préférence que précédemment avec un seuil d'indifférence égal à 0.

b) Evaluations distributionnelles et seuils de discrimination

Il arrive fréquemment qu'il soit impossible de connaître avec précision les conséquences de la mise à exécution d'une action potentielle mais que l'on puisse apprécier qualitativement la vraisemblance des différentes conséquences possibles. C'est ce que Roy (1979-1983) appelle une évaluation "distributionnelle" (cf. également chapitre I). Rappelons que la modulation de la vraisemblance entre les diverses valeurs possibles n'a pas forcément ici la signification d'une probabilité. Lorsque la distribution de vraisemblance ne présente pas de singularités trop importantes (et qu'en particulier elle est unimodale), il est tentant de chercher à opérer

(*) Pour éviter certaines incohérences, il est naturel d'imposer : $\beta' \leq 1$ et $\beta \geq -1$ (cf. Roy (1979-1983), chapitre 8).

une troncature de cette distribution pour arriver à un "intervalle de confiance" et ainsi se ramener au cas précédent (cf. Lebrun (1981)). Cependant, il serait nettement plus probant non pas d'effectuer une troncature a priori mais de pouvoir apprécier la vraisemblance de l'intervalle où les évaluations distributionnelles se chevauchent et de tenter de tirer des conclusions selon que l'importance de cet intervalle est ou non négligeable. Cette technique n'est cependant pas exemple de difficultés dans le cas général, rien ne garantissant la définition de seuils qui soient intrinsèques (cf. Roy (1979-1983), chapitre 9, pp. 328 et ss.).

Recourir à une troncature implique souvent de renoncer à s'intéresser aux valeurs extrêmes des conséquences de la mise à exécution d'une action et ne permet donc pas (avec un seul critère de ponctualisation) de rendre compte des phénomènes liés à la présence d'aversion ou de goût pour le risque. Dans ces cas, lorsque la vraisemblance est de type probabiliste, il peut être utile de recourir à une ponctualisation inspirée des méthodes de la théorie de l'utilité (cf. Roy et Bouyssou (1983), p. 37) (*). Une telle technique de ponctualisation, dans le cadre d'une approche constructive, n'implique pas de recourir au modèle du vrai-critère. En effet, compte-tenu du "flou conceptuel" affectant les axes de signification, le rôle des seuils de discrimination reste entier dans ce dernier cas. Vansnick (1983), p. 13 indique que, dans ce cas, il est généralement possible de recourir à des seuils de discrimination constants entourant le critère d'utilité espérée. Cette remarque se fonde sur une interprétation d'une fonction d'utilité de type Von Neumann et Morgenstern en termes de mesure de différence de préférence (cf. chapitre II, § B.3.e). Si, au-delà d'une certaine différence de préférence, l'hésitation entre préférence et indifférence ne semble plus possible, il est "naturel" d'adopter des seuils constants sur l'échelle d'utilité. Retenir un tel critère de ponctualisation revient cependant à utiliser une information sur des "préférences du

(*) Cette possibilité doit bien sûr être considérée indépendamment du résultat du théorème 2.6. Un tel théorème, s'il fait apparaître la notion de seuils, ne peut pas être considéré comme la base possible d'une technique de ponctualisation. Il n'offre en effet aucune possibilité de "construire", de façon opérationnelle, une telle fonction d'utilité entourée de seuils.

second ordre" dont on a vu qu'elles devaient s'interpréter avec la plus grande précaution au sein du modèle du pseudo-critère.

Si (*) l'on admet le raisonnement de Vansnick (1983) qui consiste à assimiler l'"hésitation" à une plus ou moins grande "différence de préférence", il est alors aisé de montrer que le type de seuil retenu sur une échelle quelconque est fortement dépendant de la forme fonctionnelle de la "fonction d'utilité" (si elle existe) sur cette échelle. A titre d'exemple, supposons un critère g canoniquement associé à un indicateur d'état ponctuel sur une conséquence élémentaire (cf. Roy (1979-1983), chapitre 9). Supposons que l'on associe à g un seuil de discrimination du type :

$p(g(a)) = \alpha \times g(a) \quad \forall a \in A$ où A est l'ensemble des actions potentielles.

Soit $b \in A$ telle que $g(b) = g(a)(1 + \alpha)$. En suivant le raisonnement de Vansnick, l'existence d'une fonction d'utilité mesurant les différences de préférences conduit à poser :

$$u(g(b)) - u(g(a)) = K \text{ avec } K \in \mathbb{R}^{+*}.$$

Plus généralement, $\forall (a, b) \in A$, on a :

$$u(g(b)) - u(g(a)) = K \iff \frac{g(b)}{g(a)} = \alpha + 1.$$

Il s'ensuit que la fonction d'utilité u est de type logarithmique lorsque les seuils de discrimination sont constants en valeur relative, si l'on admet l'hypothèse selon laquelle une différence constante en termes de différence de préférence correspond toujours à une même probance dans la comparaison. Un calcul simple permettrait de montrer (sous les mêmes hypothèses) que des seuils constants en valeur absolue peuvent être interprétés à l'aide d'une fonction d'utilité linéaire sur l'échelle.

(*) Ce paragraphe est inspiré d'une communication personnelle de J.C. Vansnick.

4. Conclusion

Les techniques que nous venons d'évoquer sont loin de permettre de pouvoir raisonner dans tous les cas l'évaluation des seuils de discrimination. Leur rôle étant avant tout de permettre d'obtenir des situations de préférence "probantes", on conçoit bien que leur évaluation ne saurait entièrement dépendre d'un calcul "objectif". La parenté que nous avons relevée entre ces deux seuils et d'autres paramètres utilisés dans les méthodes ELECTRE ne doit cependant pas faire croire que leur évaluation doit se faire principalement sur la base de positions volontaristes (au contraire des écarts de discordance ou des seuils de veto par exemple). Comme le font remarquer Roy, Présent et Silhol (1983), p. 8 : *"Fixer les seuils relève autant d'une appréciation subjective que d'un calcul d'erreur au sens de la physique. Ces seuils ne sont pas des grandeurs expérimentales qu'il faudrait approcher au plus juste. Ce sont au contraire des grandeurs d'opportunité qu'il est commode, voire nécessaire, d'introduire pour refléter ce qu'il y a d'approximatif ou d'arbitraire dans les données".* C'est dire que l'évaluation des seuils de discrimination est intrinsèquement liée à la représentation qu'ont les acteurs du processus de décision (y compris l'homme d'étude) des axes de signification mis à jour et qu'elle est par conséquent difficilement justiciable d'une analyse théorique. Le rôle de l'analyse de robustesse effectuée sur ces paramètres (cf. par exemple chapitre IV) devient alors plus claire. Il consiste principalement à limiter l'influence de la part d'arbitraire incluse dans l'évaluation de ces seuils. Notons cependant que cette analyse de robustesse doit rester "compatible" avec l'"appréciation subjective" des actions du processus de décision à propos de la probance des évaluations sur les différents axes de signification. La plage de variation de ces paramètres n'est donc pas seulement contrainte par de simples considérations de bon sens comme c'est le cas pour des paramètres purement "techniques" et volontaristes (seuils de veto). On verra, au chapitre IV, comment ces paramètres sont intégrés dans une étude réelle. Mentionnons enfin que l'introduction explicite de ces seuils présente l'avantage considérable d'inciter les acteurs du processus de décision à questionner la précision et l'exactitude des données sur lesquelles ils raisonnent (contrairement à un usage qui semble assez fréquent chez de nombreux techniciens) et ainsi à approfondir leur perception du problème faisant l'objet de l'étude.

CHAPITRE IV

COMPARAISON, SUR UN EXEMPLE PRECIS, DE DEUX DEMARCHES D'AIDE A LA DECISION (*)

(*) Ce chapitre s'inspire de Roy et Bouyssou (1983).

Dans les deux chapitres précédents, nous nous sommes efforcés de clarifier les fondements de deux groupes de méthodes d'aide à la décision : celles issues de la théorie de l'utilité et celles recourant à la notion de surclassement. Nous avons vu que la distinction entre une approche constructive et une approche descriptive d'aide à la décision permettait de mieux mesurer les similitudes et les divergences de ces méthodes. D'un point de vue pratique cependant, il convient d'aller au-delà de cette simple analyse conceptuelle pour s'intéresser à la mise en oeuvre de ces méthodes. Comme nous l'avons mentionné au chapitre I, les modèles d'aide à la décision doivent avant tout être considérés comme des "modes opératoires" dont la légitimité et la validation doivent être analysées dans leur mise en oeuvre au sein de processus décisionnels. Pour ce faire, nous procèderons, dans ce chapitre, à une comparaison de deux méthodes d'aide à la décision particulièrement représentatives, à notre sens, des deux "écoles" concurrentes, sur un exemple précis. Après quelques remarques sur la méthodologie, les objectifs et les limites de cette analyse comparative, nous nous efforcerons de montrer, étape par étape, comment chacune des méthodes permet d'élaborer progressivement des éléments de réponses à un problème de décision avant de tirer quelques conclusions synthétiques de cette analyse.

A. INTRODUCTION

1. Méthodologie de la comparaison

Pour comparer deux modèles d'aide à la décision, la solution la plus "naturelle" consisterait à traiter un même problème de décision à l'aide des deux méthodes et à analyser comment chacune d'entre elles est perçue par les acteurs du processus de décision et influence son déroulement. Cette mise en oeuvre simultanée de deux méthodes au sein d'un même processus de décision semble pourtant se heurter à des obstacles tant matériels que méthodologiques difficilement surmontables. En premier lieu, on voit mal ce qui pourrait inciter le demandeur d'une étude à accepter cette double analyse pour des raisons tant financières que de délai aisément compréhensibles. En second lieu, comme nous l'avons déjà souligné à plusieurs reprises, il est clair que la mise en oeuvre d'une méthode d'aide à la décision perturbe le processus de décision bien avant l'énoncé de la prescription. Cette mise en oeuvre implique, en particulier, d'aider le décideur à améliorer sa perception du problème sur la base de conventions précises. En mêlant deux types d'approches différents, le risque est grand, selon nous, de "troubler" profondément les acteurs du processus de décision et ainsi d'empêcher toute véritable aide à la décision. A titre d'exemple, on ne peut demander aux mêmes personnes d'apprécier les éléments non déterministes dans l'évaluation des actions potentielles à la fois en termes de distribution de probabilité et de seuils de dispersion (il en va de même pour l'importance relative des critères ou le caractère plus ou moins compensatoire de l'agrégation par exemple). C'est pourquoi, pour comparer ces deux modèles et, plus généralement, les deux approches correspondantes, nous avons eu recours à un cas précis : il concerne le choix d'un site de la côte Nord-Ouest du Pacifique en vue d'y implanter une centrale nucléaire. Le Washington Public Power Supply System (WPPSS) a demandé, voilà quelques années, aux Woodward-Clyde Consultants, une étude à ce sujet. Les travaux effectués à l'aide de la théorie de l'utilité paraissent exemplaires à bien des égards. Ils ont suscité diverses publications, notamment Keeney et Nair (1977), Keeney et Robillard (1977).

A l'issue d'une première phase d'étude, l'ensemble des sites possibles a été réduit à 9. Pour les juger et les comparer, 6 axes de signification donnant lieu à 6 fonctions d'utilité partielles (et, par conséquent, à 6 critères si l'on raisonne en espérance mathématique) ont été retenus en conformité avec les options prises à ce niveau. Nous avons tenté de réaliser, en laboratoire, le travail qui aurait été fait en utilisant un modèle de l'Ecole Française (en l'occurrence ELECTRE III, cf. Roy (1978) et chapitre III) - que nous appellerons désormais modèle S - au lieu d'être le premier - que nous appellerons désormais modèle U -. Nous résumons ci-après en quoi a consisté l'élaboration du modèle U et mettons en parallèle, étape après étape, ce en quoi aurait consisté le nôtre si nous avions eu à élaborer le modèle S dans les mêmes conditions. Les informations relatives au cas proprement dit, nécessaires à la compréhension de nos propos, sont fournies au fur et à mesure de l'exposé, lequel traite successivement :

- de la modélisation des préférences partielles sur chacun des 6 axes de signification, autrement dit de la conception des critères ;
- du modèle d'agrégation définissant les préférences globales ;
- de l'élaboration et du contenu de la prescription.

Etant dans l'impossibilité d'interroger ni experts, ni responsables du WPPSS, nous avons dû, à diverses reprises, supputer une réponse sur la base des seules informations disponibles. Notre but n'étant pas de refaire l'étude mais de comparer les modèles U et S, les inconvénients découlant de cette impossibilité se sont avérés peu importants.

2. Le but de la comparaison

En confrontant de la sorte deux modèles à une même réalité en vue d'éclairer une même décision, nous nous étions fixé trois objectifs :

a) mieux mettre en évidence les différences que l'un et l'autre induisent quant à la manière de questionner la réalité et d'élaborer ce que l'on appelle traditionnellement (à tort) des données (ces dernières étant, le plus souvent, des "construits") ;

b) mieux comprendre ce que l'un et l'autre ont d'arbitraire, de fragile, de réaliste, de robuste (tous aspects essentiels pour apprécier leur degré de probance respectif) ;

c) mieux percevoir en quoi l'un et l'autre peuvent conduire à des prescriptions convergentes ou divergentes.

Il serait certes intéressant de chercher à placer la comparaison sur un autre plan : celui de leur insertion dans le processus de décision, c'est-à-dire celui de leur acceptabilité par les différents acteurs et de leur impact sur le déroulement effectif du processus. Ceci réclamerait un travail d'expérimentation de nature tout à fait différente de celui rapporté ici.

La dernière partie de ce chapitre sera consacrée au bilan du travail relativement aux trois objectifs ci-dessus.

B. CONCEPTION DES CRITERES

1. Généralités

Les auteurs du modèle U ont retenu 6 axes de signification pertinents pour comparer les sites. Discuter de leur bien-fondé sortirait du cadre de ce travail. C'est dire que nous chercherons à établir le modèle S en supposant qu'ils nous sont imposés par nos interlocuteurs du WPPSS. Ils ont respectivement trait à :

- axe n° 1 : santé et sécurité de la population environnante ;
- axe n° 2 : pertes de saumons dans les rivières servant au refroidissement de la centrale ;
- axe n° 3 : impact biologique sur la région environnant la centrale (à l'exclusion des pertes de saumons) ;
- axe n° 4 : impact socio-économique de l'implantation ;
- axe n° 5 : impact esthétique des lignes à haute tension ;
- axe n° 6 : coût d'investissement et d'exploitation de la centrale.

(Pour plus de détails, nous renvoyons à Keeney et Nair (1977)).

La description des conséquences de l'action s (implantation d'une centrale sur le site s) ayant trait à l'un quelconque de ces 6 axes de signification ne s'impose pas de toute évidence. Ici encore, nous avons imaginé le modèle S à partir de la description faite par Keeney et Nair dans la perspective du modèle U. Nous préciserons, axe par axe, la teneur de celle-ci au paragraphe suivant. Il nous faut rappeler auparavant en quoi consiste une telle description et comment on en déduit, relativement à chaque axe, une représentation des préférences dans le modèle U. Il nous faut également indiquer en quoi le modèle S diffère sur ces deux plans. Nous verrons ainsi que, dans les deux approches, on élabore, pour chaque axe de signification, un sous-modèle de préférence qui lui est propre. Ce dernier constitue ce que l'on appelle couramment un critère. Nous le noterons g_i pour l'axe de signification i.

Dans le modèle U (cf. chapitre II), on pose a priori que les conséquences d'une action s peuvent être décrites par 6 variables aléatoires $X_i(s)$ ($i = 1, \ldots, 6$). Chaque variable est regardée comme un attribut lié à l'action. La mise à exécution de cette dernière doit s'accompagner d'une réalisation de $X_i(s)$ selon un tirage aléatoire conforme à sa loi de probabilité. La valeur particulière $x_i(s)$ qui se réalisera doit, à elle seule, résumer, en vue des comparaisons, toute l'information à prendre en compte relativement à l'axe de signification considéré. Il s'agit par conséquent tout d'abord de cerner concrètement cette information de façon à définir l'attribut, puis d'en expliciter la loi de probabilité, mais celle-ci peut, en toute rigueur, dépendre des réalisations des autres attributs. Il convient donc, en toute généralité, de s'intéresser à la loi liée des 6 variables aléatoires.

Ceci explique que le système de préférence auquel le corps d'axiomes fait référence porte sur la comparaison de telles lois de probabilité multidimensionnelles. En pratique, dans le cas qui nous intéresse comme dans la plupart de ceux ayant trait à des problèmes réels d'aide à la décision, on admet :

- d'une part l'indépendance en probabilité des variables aléatoires $X_i(x)$;
- d'autre part que le système de préférence jouit de deux propriétés simplificatrices dénommées indépendance au sens des préférences et indépendance au sens des utilités (*) (cf. Keeney et Raiffa (1976), Keeney (1974)).

(*) Cf. Chapitre I.B et Annexe 1.

Ces hypothèses (*), jointes aux axiomes classiques de la théorie de l'utilité, rendent en particulier légitime la démarche suivante :

- l'homme d'étude interroge celui qui apparaît comme le dépositaire du système de préférence à représenter en vue de construire une fonction d'utilité partielle $u_i(x)$ ayant trait à l'axe de signification i ;
- il explicite la loi de probabilité marginale de l'attribut $X_i(s)$;
- il calcule l'espérance mathématique de cette utilité partielle pour chacune des actions : $g_i(s) = E[u_i(X_i(s)]$;
- dans le système de préférence qu'il s'agit de représenter, l'action s est, toutes choses égales par ailleurs, d'autant meilleure que $g_i(s)$ est plus grand.

Dans ces conditions, la comparaison selon le seul axe de signification i de deux actions s et s', abstraction faite de leurs conséquences selon les axes de signification autres que i, a un sens. Elle s'opère comme celle des nombres $g_i(s)$ et $g_i(s')$. C'est dire que la fonction g_i est un "vrai-critère" (cf. chapitre III.B.3).

Cette possibilité de comparer deux actions quelconques, toutes choses égales par ailleurs, selon chacun des axes de signification considérés, constitue un préalable pour le modèle S (cf. chapitres I.B et III). Les axes de signification i doivent précisément être conçus de telle sorte que les comparaisons faites avec ce genre de restrictions constituent un point de départ convenable pour asseoir les rapports que l'homme d'étude a pour mission d'établir entre les intervenants (éventuellement décideurs) qu'il est censé aider et ce qui leur apparaît être la réalité. Le système de préférence de ces intervenants n'étant plus regardé comme pré-existant dans cette réalité, l'existence et la définition des critères g_i ne peut plus être une simple conséquence de propriétés observables du système de préférence. Ces critères méritent en particulier d'être définis en fonction de la nature des informations disponibles ayant trait à chaque axe

(*) Seule une démarche purement descriptive permettrait d'opérer un test de celles-ci.

de signification et en tenant le plus grand compte des facteurs d'imprécision, d'incertitude, d'indétermination qui affectent ces informations. Rien ne s'oppose bien évidemment à ce que tel ou tel critère prenne la forme d'une espérance mathématique d'utilité (cf. chapitre III.D). Dans bien des cas, on pourra estimer que le concept de lois de probabilités ne permet pas de saisir ces facteurs dans toute leur étendue. De plus, le cadre du vrai-critère peut paraître trop étroit et insuffisamment nuancé pour décrire les conclusions de telles comparaisons. Le modèle S conduit donc à substituer des pseudo-critères aux vrais-critères du modèle U.

Dans le modèle U, les critères g_i sont définis dès l'instant où l'on a construit les fonctions d'utilité u_i et fait choix d'une description probabiliste pour chacun des attributs X_i. La démarche qui aboutit à l'explicitation de $g_i(s)$ et des deux seuils de discrimination associés caractérisant chacun des pseudo-critères du modèle S est toute autre (cf. Roy (1979-1983), chapitres 8 et 9). Elle repose sur une analyse des conséquences concernées par l'axe i et sur notre capacité à les décrire, soit par un seul nombre constituant ce que nous appelons une évaluation ponctuelle (celle-ci pouvant ou non être affectée d'un seuil d'imprécision), soit par plusieurs nombres constituant une évaluation non ponctuelle, chacun de ces nombres pouvant être affecté d'un indice d'importance ayant par exemple la signification d'une probabilité. Cette analyse n'a pu être entreprise ici que très imparfaitement au travers de la description des conséquences établies pour le modèle U. Dans le modèle S, elle a donc été fondée avant tout sur des considérations de bon sens, même si nous avons cherché à nous rapprocher le plus possible de ce que l'étude aurait pu être, à notre avis, dans un contexte réel. Le type de raisonnement utilisé dans les paragraphes suivants est par conséquent plus important que les valeurs numériques retenues. C'est le travail d'élaboration des critères dans le modèle U et dans le modèle S que nous allons présenter maintenant.

2. Cas des deux critères (n° 1 et 5) fondés sur des évaluations quantitatives ponctuelles

Parmi les 6 attributs servant à décrire les conséquences des actions dans le modèle U, il en est deux, X_1 et X_5, qui ont été regardés non pas comme des grandeurs aléatoires mais comme des grandeurs connues avec certitude. Autrement dit, relativement à l'un et l'autre de ces axes de signification, un site quelconque s est caractérisé par deux nombres $(x_1(s), x_5(s))$; c'est pourquoi nous parlons dans ce cas d'évaluations quantitatives ponctuelles. L'évaluation sur l'axe n° 5 étant, à certains égards, plus simple, c'est celle que nous examinons en premier.

Le nombre $x_5(s)$ représente la longueur (exprimée en miles) des lignes à haute tension (nécessaires pour raccorder la centrale au réseau) qui porteront atteinte à l'environnement si la centrale est installée. Sur les 9 sites considérés, ce nombre varie de 0 à 12 miles (*). Bien que la mesure de cet attribut n'ait pas été regardée comme une grandeur aléatoire, la définition d'une fonction d'utilité $u_5(x_5)$ s'est avérée nécessaire pour le prendre en compte dans le modèle des préférences globales. L'encodage de cette fonction a été effectuée selon la technique classique des loteries 50-50 (cf. chapitre II.B). Les réponses obtenues conduisent à retenir une expression linéaire pour l'utilité partielle étudiée :

$$u_5(x_5) = 1 - \frac{x_5}{50}.$$

Il s'ensuit que le vrai-critère g_5 du modèle U n'est autre que :

$$g_5(s) = 1 - \frac{x_5(s)}{50}.$$

Tout conduit à penser que, ayant à élaborer le modèle S, un critère associé à cet axe de signification aurait été défini en posant $g_5(s) = x_5(s)$. Toutefois, ce nombre ne paraît pas connu avec une précision telle que l'on puisse affirmer que, si deux sites s et s' sont respectivement caractérisés par :

$$x_5(s) = 10,\ x_5(s') = 9,$$

(*) L'intégralité des données numériques utilisées dans les modèles U et S figure à l'Annexe 5.

le site s' puisse, de ce fait, être regardé (toutes choses égales d'ailleurs) comme significativement meilleur que le site s. L'écart de 1 mile peut en effet ne pas sembler probant compte-tenu de l'incertitude des tracés de lignes, de la part d'arbitraire que recèle le choix des portions de lignes à prendre en considération, ... Ne disposant pas de l'information nécessaire pour appréhender la portée de ces facteurs, nous avons admis que les nombres $x_5(s)$ étaient entachés, par excès et par défaut, d'une erreur au moins égale à 1 mile pour les faibles longueurs, erreur qui pouvait croître proportionnellement avec cette longueur. Il nous a semblé raisonnable de choisir un taux de croissance très faible, 3 % (un taux de 10 % n'aurait pas changé les résultats). Ceci revient à dire que $g_5(s) = x_5(s)$ est mal déterminé dans un intervalle de la forme :

$$[g_5(s) - \eta_5(g_5(s)) \; ; \; g_5(s) + \eta_5(g_5(s))]$$

$$\text{avec} \quad \eta_5(s) = 1 + \frac{3}{100} g_5(s).$$

La fonction η_5 caractérise ce que l'on appelle un seuil de dispersion (cf. Roy (1983), chapitre 8). Des formules générales (cf. chapitre III.D) permettent d'en déduire les deux seuils de discrimination achevant de définir le pseudo-critère g_5 :

seuil d'indifférence : $q_5(g_5(s)) = 1 + \frac{3}{100} g_5(s)$

seuil de préférence : $p_5(g_5(s)) = 2{,}0618 + 0{,}0618\, g_5(s)$.

Le nombre certain $x_1(s)$ correspond à un indice officiel, le "site population factor". Cet indice prend en compte l'ensemble de la population dont la santé et la sécurité risquent d'être affectées par l'implantation d'une centrale sur le site et ceci en fonction de l'éloignement de ces populations à cette centrale. La valeur de cet indice varie ici entre 0,011 et 0,057. Toujours par référence à la technique des loteries 50-50, c'est encore une forme linéaire qui a été retenue pour la fonction d'utilité relative à cet axe de signification. Les valeurs extrêmes envisageables pour x_1 étant 0 et 0,2, il vient :

$$u_1(x_1) = 1 - 5\, x_1,$$

d'où le vrai-critère du modèle U :

$$g_1(s) = 1 - 5 . x_1(s).$$

Dans le modèle S, il aurait, ici encore, été naturel de poser $g_1(s) = x_1(s)$. Plus encore que $x_5(s)$, $x_1(s)$ paraît entaché d'erreur et d'arbitraire. Ce nombre résulte en effet d'une opération de "ponctualisation" ayant pour objet de résumer en un seul nombre une distribution caractérisant un nombre de personnes situées à des distances de plus en plus grandes de la centrale. Or, cette distribution est appelée à évoluer. La forme de l'opérateur de ponctualisation n'est pas la seule concevable. La manière même de l'appliquer prête à variation. Il nous a, dans ces conditions, semblé légitime d'adopter un seuil de dispersion servant à délimiter la zone de mauvaise détermination autour de x_1 égal à $\frac{10}{100} x_1$. Les seuils d'indifférence et de préférence caractérisant le pseudo-critère $g_1(s)$ valent, dans ces conditions :

$$q_1(g_1(s)) = 0,1\ g_1(s) \ ;\ p_1(g_1(s)) = \frac{2}{9}\ g_1(s).$$

3. <u>Cas des deux critères (n° 3 et 4) fondés sur des évaluations qualitatives non ponctuelles</u>

Pour définir les attributs X_3 et X_4, Keeney et Nair ont introduit deux échelles qualitatives possédant respectivement 8 et 7 intervalles entre échelons consécutifs. La nature de l'impact biologique ou socio-économique que chacun des intervalles de ces deux échelles est destiné à recouvrir a été cerné à l'aide de descriptions relativement concrètes et précises des situations futures qui étaient, par définition, concernées. Pour chacun de ces deux axes et pour chaque site s, 10 experts environ ont été invités à se prononcer, sur la base de tels descriptifs, sur la situation future qu'ils jugeaient la plus vraisemblable dans l'hypothèse où la centrale serait installée sur le site. La proportion des voix ainsi recueillies par chaque intervalle a servi à définir les lois de probabilités (subjectives) de $X_3(s)$ et $X_4(s)$.

Deux fonctions d'utilité $u_3(x_3)$ et $u_4(x_4)$ ont ensuite été estimées (selon une technique particulière du fait du caractère qualitatif de ces échelles, cf. Keeney et Nair (1977)), $g_3(x_3)$ et $g_4(x_4)$ correspondant, respectivement, à l'espérance d'utilité de $X_3(s)$ et $X_4(s)$.

Il est ici encore vraisemblable d'admettre que, devant mettre au point le modèle S, nous aurions procédé de façon analogue pour évaluer l'impact biologique et l'impact socio-économique des sites à étudier. L'évaluation obtenue (distribution d'avis d'experts faisant en général intervenir plus d'un intervalle de l'échelle concernée) est dite non ponctuelle. Pour définir $g_3(s)$ comme $g_4(s)$, il faut faire choix d'un seul des intervalles envisagés par les experts. Nous avons retenu le plus central, c'est-à-dire celui qui partage le plus également la population des experts entre ceux qui sont au moins aussi optimistes et ceux qui sont au moins aussi pessimistes que cette valeur (cf. annexe 5). Compte-tenu de la nature des échelles en cause, il est normal d'adopter des seuils de discrimination constants. Après examen des distributions d'avis d'experts, nous avons retenu :

$q_3 = 1$, $p_3 = 2$,
$q_4 = 0$, $p_4 = 1$.

4. <u>Cas d'un premier critère (n° 2) fondé sur des évaluations quantitatives non ponctuelles</u>.

L'attribut X_2 est plus complexe que les précédents. La quantité totale Q des saumons dont on redoute la disparition suite à l'installation d'une centrale a été jugée insuffisante, dans certains cas, pour appréhender la conséquence "perte de saumons". Compte-tenu de la précarité de certains équilibre écologiques, la destruction de 10 000 saumons dans une rivière qui en compte 20 000 ne pouvait être regardée comme équivalente à celle de 10 000 saumons dans une rivière qui en compte 300 000. La conséquence étudiée devait donc être analysée selon deux dimensions :

- le nombre total Y de saumons vivant dans la rivière ;
- le pourcentage Z de saumons détruits.

Une étude très approfondie (cf. Keeney et Robillard (1977) a conduit les auteurs à distinguer le cas des très grandes rivières ($Y > 300\,000$) et celui des petites rivières ($Y < 100\,000$), aucune rivière moyenne n'intervenant dans l'étude. Pour les très grandes rivières, l'attribut étudié X_2 pouvait être pris en compte en ne faisant intervenir que la quantité $Q = Y.Z$ et ce au travers d'une fonction d'utilité définie par :

$$u_2(X_2) = 0{,}568 + 0{,}432\ u_Q(Q)$$

avec

$$U_Q(Q) = 0{,}7843\ (e^{0{,}00274(300-Q)} - 1)$$ (Q étant exprimé en milliers).

Pour les petites rivières, en revanche, il est apparu indispensable de faire intervenir séparément Y et Z au travers de deux fonctions d'utilité partielles $u_Y(Y)$ et $u_Z(Z)$ (cf. annexe 5), l'utilité de X_2 s'en déduisant par :

$$u_2(X_2) = u_Y(Y) + u_Z(Z) - u_Y(Y).u_Z(Z).$$

Pour calculer l'espérance mathématique $g_2(s)$, les auteurs ont admis que :

- pour chaque site s, Y prenait une valeur $y(s)$ connue avec certitude ;
- Z était une variable aléatoire gaussienne d'écart-type égal à la moitié de l'espérance mathématique.

Si nous avions eu à établir le modèle S, il est probable que nous ne nous serions pas livrés à une étude aussi complexe pour définir le critère g_2. On est d'autant plus fondé à s'interroger sur la portée d'un tel travail que :

- d'une part les lois de probabilités des aléas Y et Z n'ont pas été définies avec un soin comparable à celui mis pour asseoir la fonction d'utilité ;
- d'autre part les valeurs de l'espérance $g_2(s)$ (qui ordonnent les 9 sites exactement comme les nombres $E(Q(s))$) paraissent assez mal refléter les principes qualitatifs posés au départ de l'analyse d'utilité.

Nous aurions, pour notre part, cherché à mieux comprendre pourquoi, étant donné deux rivières comptant exactement y et y' saumons, il pouvait être plus préjudiciable d'en détruire un nombre q dans la première, supposée ici la moins poissonneuse, plutôt qu'un nombre légèrement plus élevé q' dans la seconde. Prenant ensuite appui sur des considérations d'ordre qualitatif, nous aurions cherché à relier q' à q, y, y' de telle sorte que les préjudices causés dans les deux rivières soient du même ordre. On aurait par exemple pu examiner si une formule simple du type $q' = q.(\frac{y'}{y})^{\alpha}$ était susceptible de rendre compte (moyennant une valeur convenablement choisie de α entre 0 et 1) d'avis d'experts portant sur de tels cas de préjudices équivalents. Ne disposant que de la seule analyse d'utilité, il nous a paru possible de définir le critère g_2 sur la vase de la formule ci-dessus tout en adoptant deux versions différentes de ce critère correspondant respectivement à :

$$\alpha = \frac{1}{2} : g_2'(s) = \frac{q}{\sqrt{y}} = z\sqrt{y}$$

$$\alpha = 0 : g_2''(s) = q = z.y$$

(les valeurs des critères g_2 sont calculées, dans le modèle S, en posant $z = \bar{z}(s)$).

Le raisonnement qui précède a été conduit en faisant abstraction des difficultés qu'il y a, pour chaque rivière, à cerner la valeur y et à prévoir le taux z. La valeur élevée adoptée pour l'écart-type de Z et la nécessité de regarder y comme non connue avec une précision absolue nous ont amené à adopter un seuil de dispersion élevé que nous avons fixé égal à $0{,}5\ g_2'(s)$ et $0{,}5\ g_2''(s)$. On en déduit :

$$q_2' = 0{,}5\ g_2'(s),\ p_2' = 2\ g_2'(s),\ q_2'' = 0{,}5\ g_2''(s),\ p_2'' = 2\ g_2''(s).$$

5. <u>Cas d'un second critère (n° 6) fondé sur des évaluations quantitatives non ponctuelles</u>

Les auteurs du modèle U ont considéré que les coûts occasionnés par la construction et l'exploitation d'une centrale sur un site quelconque s pouvaient être analysés par référence à ceux relatifs au site le plus économique s_2. L'attribut $X_6(s)$ reflète par conséquent un coût différentiel. Il a été admis que la mauvaise connaissance qui entachait ce coût pouvait être prise en compte en traitant $X_6(s)$ comme une variable aléatoire gaussienne d'écart-type égal au quart de son espérance mathématique (*). Cette dernière a été estimée par des valeurs $\bar{x}_6(s)$ variant de 0 à 17,7 (l'unité étant le million de Dollars par an, cf. annexe 5). Faisons observer que $X_6(x_2) = 0$ avec certitude.

Le critère $g_6(s)$ du modèle U traduit l'espérance mathématique de l'utilité attachée à ce coût différentiel aléatoire. C'est toujours en ayant recours à la technique des loteries que la fonction d'utilité $u_6(x_6)$ a été définie (**) :

$$u_6(x_6) = 1 + 2{,}3\ (1 - e^{0{,}009\ x_6}).$$

Ici encore, il est probable que nous aurions procédé autrement pour établir le modèle S. Dans la mesure où ce ne sont pas les mêmes acteurs qui supportent les coûts d'investissement et les coûts d'exploitation, nous aurions peut-être introduit un critère pour chacun d'eux. N'ayant pas la possibilité d'analyser ces coûts dans le détail, nous nous contenterons, dans le présent travail, de poser :

$$g_6(s) = \bar{x}_6(s).$$

Faute de bases plus objectives, nous croyons pouvoir raisonner comme suit pour asseoir les seuils de dispersion. En premier lieu, les valeurs de $\bar{x}_6(s)$ qui ont été avancées supposent que les travaux et les éléments de fonctionnement qui n'entrent pas dans le coût différentiel conduiront bien aux mêmes dépenses sur le site s_2 et sur un site quelconque s. Il y a évidemment là une source d'erreurs qui suffit à faire douter du

(*) Les coûts sont supposés correspondre à un type standard de construction que l'on n'envisage pas de remettre en cause pour augmenter la sécurité (critère 1) par exemple).

(**) Sur la définition de cette fonction, voir notre remarque au chapitre II.B.4.b (p. 115).

fait qu'un site s' est plus économique qu'un site s lorsque $\bar{x}_6(s)$ - $\bar{x}_6(s')$ est faible eu égard au montant de ces dépenses supposé identique sur les deux sites. Nous avons admis que, du fait de cette seule hypothèse, le coût différentiel réel devait être regardé comme mal déterminé sur un intervalle caractérisé à partir de $\bar{x}_6(s)$ de façon dissymétrique comme suit : $[\bar{x}_6(s) - 1 ; \bar{x}_6(s) + 2]$.

En second lieu, le calcul de $\bar{x}_6(s)$ découle de l'évaluation de multiples facteurs qui, tous, concernent des suppléments de dépenses propres au site s. Or, tant que la construction n'est pas décidée, l'étude faite relativement à chaque site reste sommaire. C'est dire que ces coûts ne sont pas forcément bien tous recensés, qu'ils sont vraisemblablement chiffrés de façon assez imprécise et peut-être optimiste. La marge d'erreur qui en découle apparaît dissymétrique et d'autant plus élevée que $\bar{x}_6(s)$ est plus grand. Les facteurs intervenant à ce niveau nous semblent être sans lien avec ceux pris en compte précédemment. Nous admettrons donc qu'il y a additivité des effets et regarderons le coût différentiel comme finalement mal déterminé dans l'intervalle :

$$[\bar{x}_6(s) - 1 - 0{,}1\ \bar{x}_6(s),\ \bar{x}_6(s) + 2 + 0{,}5\ \bar{x}_6(s)].$$

Il vient alors :

$$q_6[g_6(s)] = 1{,}1 + 0{,}11\ g_6(s),\quad p_6[g_6(s)] = 3{,}33 + 0{,}67\ g_6(s).$$

C. AGREGATION DES CRITERES ET PREFERENCE GLOBALE

1. Généralités

Ayant ainsi défini les vrais-critères du modèle U et les pseudo-critères du modèle S, il nous faut maintenant présenter la partie du modèle qui porte sur leur agrégation. Dans le présent paragraphe, nous en décrivons brièvement la teneur de façon à présenter les différents paramètres intervenant dans chaque modèle. Les deux paragraphes suivants seront consacrés à l'évaluation de ces paramètres.

Partant du principe que le système de préférences du WPPSS pré-existe, qu'il est conforme aux axiomes de la théorie de l'utilité, que les hypothèses d'indépendance mentionnées au B.1 sont acceptables et qu'enfin les réponses aux questions posées pour construire les fonctions d'utilité partielles ont été dictées par ce système de préférences, on peut affirmer (cf. chapitre II, théorème 2.10) que ce système de préférences est représentable par un vrai-critère $g(s)$ relié aux critères $g_i(s)$ par l'une des deux expressions suivantes :

$$g(s) = \sum_{i=1}^{i=6} k_i . g_i(s) \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^{i=6} k_i = 1 \tag{4.1}$$

$$g(s) = \frac{1}{k}[\prod_{i=1}^{i=6} (1 + k.k_i.g_i(s)) - 1] \quad \text{avec} \tag{4.2}$$

$$k \neq 0, \; k \geq - 1, \; k = \prod_{i=1}^{i=6} (1 + k.k_i) - 1. \tag{4.3}$$

C'est cette dernière expression de $g(s)$ qui a été retenue par Keeney et Nair (on en verra les raisons au C.2). Pour achever de caractériser le modèle U, il suffit par conséquent d'estimer les coefficients k_i (dont la valeur est d'autant plus grande que l'importance relative attachée au critère est plus forte une fois les fonctions d'utilités définies) et d'en déduire la valeur de k en résolvant l'équation (4.3) de degré 6 qui admet normalement une seule racine réelle différente de 0 et supérieure à - 1 (cf. Keeney et Raiffa (1976)).

Dans le modèle S, il n'est plus question d'expliciter, à partir des pseudo-critères $g_i(s)$, ni un vrai-critère, ni même un pseudo-critère. Il s'agit, plus modestement, de confronter chaque site s à chaque site s' sur la base des valeurs qu'ils confèrent aux 6 fonctions g_i et ce en tenant compte des seuils q_i et p_i afin de prendre position sur l'acceptation, le rejet et, plus généralement, la position sur une échelle de crédibilité de la proposition :

"le site s est au moins aussi bon que le site s'".

La construction de ce degré de crédibilité repose, comme on l'a indiqué au III.B, sur des règles pragmatiques de pur bon sens qui prennent essentiellement appui sur deux notions dites de concordance et de discordance. Celles-ci permettent :

- de caractériser un groupe de critères jugés en concordance avec la proposition étudiée et d'apprécier l'importance relative de ce groupe de critères au sein de l'ensemble des 6 critères ;
- de caractériser, parmi les critères non en concordance avec la proposition étudiée, ceux dont l'opposition est suffisamment forte pour réduire la crédibilité qui résulterait de la prise en considération de la seule concordance et de calculer l'éventuelle réduction qui en découle.

Pour pouvoir effectuer de tels calculs, il faut parvenir à expliciter numériquement :

- l'importance relative k_i que le décideur souhaite conférer au critère i dans le cadre des calculs de concordance ; bornons-nous ici à indiquer que ces nombres n'interviennent presque exclusivement que par l'ordre qu'ils induisent (du fait de leur addition) sur les groupes de critères intervenant dans ces calculs de concordance) ;
- l'ampleur minimum de la discordance qui confère au critère i, lorsqu'il est seul face aux 5 autres critères supposés en concordance avec la proposition étudiée, le pouvoir de retirer toute crédibilité à cette proposition : cette ampleur minimum est appelée seuil de veto du critère i ; elle n'est pas nécessairement constante ; c'est pourquoi nous la noterons $v_i[g_i(s)]$.

Insistons sur le fait que, contrairement à ce qui se passe dans le modèle U, les indices d'importance du modèle S (et il en va de même des seuils de veto) ne sont pas des valeurs susceptibles de découler de l'observation d'une grandeur pré-existante mais des valeurs destinées à traduire des positions volontaristes du décideur, lesquelles sont essentiellement d'ordre qualitatif. Il s'ensuit que les techniques à mettre en oeuvre pour asseoir les valeurs des paramètres dont il vient d'être question dans l'un et l'autre des deux modèles relèvent (plus encore que pour la conception des critères) de deux attitudes différentes face à la réalité. Dans chacun de ces modèles, la part d'arbitraire qui affecte les valeurs retenues est non négligeable. C'est dire que la prescription doit tenir compte de la plus ou moins grande robustesse du résultat des calculs à cette part d'arbitraire mais le rapport de cette dernière avec la réalité étant profondément différente, la conception même de la prescription peut s'en trouver affectée selon qu'on raisonne dans le modèle U ou dans le modèle S.

2. Modulation de l'importance des critères

Au sein du modèle U, l'estimation des coefficients k_i intervenant dans la décomposition de la fonction d'utilité globale s'opère au travers de comparaisons de loteries de même que pour l'encodage des fonctions d'utilité partielles $u_i(x_i)$. Cette technique a été étudiée au chapitre II.B.1.

A la différence des comparaisons de loteries nécessaires pour estimer les fonctions d'utilité partielles, celles devant être effectuées à ce niveau sont multidimensionnelles. Même si l'on a recours, pour l'estimation de la probabilité p_i, à des techniques d'interview sophistiquées, on ne peut que constater la grande complexité inhérente à cette comparaison de sites imaginaires et même mettre en doute la capacité du décideur à répondre, de façon fiable, à de telles questions. Pour tenter de contourner cet obstacle, les auteurs du modèle U ont eu recours à une technique d'estimation plus indirecte comprenant :

- un classement des coefficients k_i ;
- une estimation de valeurs de substitution inter-critères ;
- une estimation des coefficients k_i.

Cette procédure, décrite en détail dans Roy et Bouyssou (1983), annexe 6 et Keeney et Nair (1977) reste fondée sur des comparaisons de loteries multidimensionnelles. Il est donc important de ne pas accorder une précision illusoire aux valeurs des k_i ainsi estimés.

Les auteurs du modèle U ont finalement retenu :

$k_1 = 0,358$; $k_2 = 0,218$; $k_3 = 0,013$; $k_4 = 0,104$; $k_5 = 0,059$; $k_6 = 0,400$.

On constate que $\sum_{i=1}^{6} k_i = 1,152 \neq 1$, ce qui justifie le choix de la forme multiplicative (cf. Keeney (1974)).

La résolution de l'équation (3) donne alors $k = - 0,3316$ (*).

Dans le modèle S, les indices d'importance ne jouent qu'au travers du classement qu'ils induisent sur les différents critères ou groupes de critères. Si nous avions eu à effectuer l'étude, il est probable que c'est ce classement que nous aurions tenté d'élaborer de façon interactive avec les décideurs du WPPSS. Nous aurions ensuite cherché un ensemble de jeux d'indice d'importance compatible avec ces considérations purement ordinales (cf. par exemple la technique proposée par Roy, Présent et Silhol (1983)).

N'ayant pas la possibilité d'interroger les décideurs, il nous a fallu essayer de "traduire" l'information véhiculée par la fonction d'utilité au niveau de l'importance relative des critères en termes d'indices d'importance afin de tenter de reproduire un système de valeurs comparable et ainsi garder un sens à la comparaison des résultats des deux méthodes. La technique retenue est décrite dans Roy et Bouyssou (1983), annexe 7. Indiquons seulement que les k_i n'ont pas, dans le modèle U, d'interprétation immédiate en termes d'importance relative des critères (cf. Keeney et Raiffa (1976) et Zeleny (1981)). L'étendue de l'échelle et la forme de la fonction d'utilité partielle influent sur la valeur de k_i. Cette importance nous a semblé mieux reflétée par la plage de variation des différents rapports :

(*) Les résultats que nous présentons sont ceux que nous avons obtenus à partir des données publiées dans les articles cités. Ils diffèrent quelque peu de ceux donnés par Keeney et Nair (1977).

$$R_{ij} = \frac{\frac{\partial g}{\partial g_i}}{\frac{\partial g}{\partial g_j}} \; ; \; i = 1, \ldots, 6 \qquad (4.4)$$

où g est donné par la formule (4.2) et les g_i sont définis au B.

On peut interpréter la valeur de R_{ij} en termes qualitatifs comme le gain nécessaire sur le critère j pour compenser une perte sur le critère i. L'étude simultanée des plages de variation des rapports R_{ij} nous a conduits à retenir huit jeux d'indices d'importance (cf. annexe 5) reflétant, dans leur ensemble, le même système de valeurs que celui véhiculé par le modèle U. Il nous a en effet semblé peu réaliste de vouloir garder un jeu d'indices unique tant l'imprécision affectant les k_i dans le modèle U et l'arbitraire inhérent à cette traduction sont importants.

3. Les seuils de veto

Traduisant une position qualitative et volontariste, il serait illussoire de chercher à estimer les seuils de veto $v_j(g_j(s))$ de manière sophistiquée au travers d'études ou d'interviews. Si nous avions eu à faire l'étude, nous n'aurions pas procédé de manière tellement différence de ce que nous a permis de faire ici notre méthode de travail. Une fois le décideur d'accord avec les principes qualitatifs sous-tendant le caractère partiellement compensatoire du modèle S, on affecte une valeur numérique aux différents seuils de façon empirique en tenant compte de l'importance relative des critères, de la répartition des évaluations des sites sur les critères et de l'amplitude des divers seuils de préférence. Devant l'inévitable part d'arbitraire entourant le choix de ces valeurs numériques, on procède généralement à une analyse de robustesse assez poussée sur ces coefficients.

Le modèle U étant compensatoire, il n'a pas été possible de déduire des informations disponibles des considérations qualitatives permettant de guider le choix des seuils de veto. C'est donc principalement notre propre perception du problème qui est reflétée dans ce choix, l'analyse de robustesse venant tempérer cette position. Il est apparu dans tous les cas raisonnable de prendre les seuils $v_j(g_j(s))$ comme des multiples des seuils de préférence $p_j(g_j(s))$ (sans qu'il y ait toutefois de liaison rigide entre ces deux grandeurs). La valeur du coefficient α_j telle que $v_j(g_j(s)) = \alpha_j\ p_j(g_j(s))$ nous a semblé devoir être d'autant plus grande que le critère était peu important. En particulier, pour les critères 3 (impact biologique), 5 (esthétique) et 4 (socio-économique), les seuils de veto ont été choisis de manière à ne pas jouer. En première analyse, nous avons retenu les valeurs suivantes :

$$v_1(g_1(s)) = 6\ p_1(g_1(s)) \qquad v_4(g_4(s)) = 4\ p_4(g_4(s))$$
$$v_2(g_2(s)) = 2{,}5\ p_2(g_2(s)) \qquad v_5(g_5(s)) = 20\ p_5(g_5(s))$$
$$v_3(g_3(s)) = 4\ p_3(g_3(s)) \qquad v_6(g_6(s)) = 1{,}7\ p_6(g_6(s)).$$

D. ELABORATION ET CONTENU DE LA PRESCRIPTION

1. Généralités

On a, dans le modèle U :

$$g(s) = [\prod_{i=1}^{6} (1 + k\ k_i\ g_i(s)) - 1]\ \frac{1}{k}.$$

Les valeurs de k et des k_i sont données au C.2 et la forme des $g_i(s)$ au B. On peut donc obtenir simplement le nombre $g(s)$, conformément aux principes du vrai-critère, préordonner totalement les sites sur cette base :

s' préféré à $s \iff g(s') > g(s)$
s' indifférent à $s \iff g(s') = g(s)$

et en déduire la prescription.

Dans le modèle S, il en va différemment. Comme mentionné plus haut, celui-ci vise à construire une relation de surclassement floue entre les actions, c'est-à-dire à apprécier, sur une échelle de crédibilité, la proposition "s' est au moins aussi bon que s". L'exploitation de cette relation s'opère au travers d'un procédé de "distillation" (cf. Roy (1978)). On met ainsi en évidence deux préordres totaux qui se comportent de façon opposée vis-à-vis des actions se comparant mal à un groupe d'autres actions : l'un a tendance à les classer avant ce groupe et l'autre après.

L'intersection de ces deux préordres donne naissance à un préordre partiel mettant en évidence les actions dont la position dans le classement est mal déterminée. Puisque dans le modèle S on reconnaît explicitement le caractère imprécis, voire arbitraire, de certaines des données utilisées, on se doit d'accepter cette incomparabilité. Ceci rend la qualité et la probance de la prescription fortement dépendantes d'une analyse de robustesse poussée.

2. Les résultats

On peut résumer les résultats du modèle U de la manière suivante (*) :

Tableau 4.1

Rang	Site	g(s)
1	s_3	0,926
2	s_2	0,920
3	s_1	0,885
4	s_4	0,883
5	s_8	0,872
6	s_9	0,871
7	s_7	0,862
8	s_5	0,813
9	s_6	0,804

(*) Cf. note de bas de page page 197.

Le classement obtenu est donc un ordre total.

Les auteurs du modèle U ont procédé à une analyse de sensibilité sur ce classement. Cependant, le fait de disposer d'une base axiomatique et d'avoir obtenu les différentes données (formes des fonctions d'utilité, valeurs des k_i) en questionnant des personnes censées représenter le décideur (*) les a conduits à n'opérer une analyse que par rapport à des modifications "à la marge" (**) des données révélant une stabilité quasi-totale du classement face à ces modifications (cf. Keeney et Nair (1977)).

Au sein du modèle S, l'analyse de robustesse est cruciale. Nous présentons dans Roy et Bouyssou (1983), annexes 9 et 10 le plan d'expérience suivi comportant plus de 100 jeux de paramètres différents et l'ensemble des résultats obtenus. Sachant l'arbitraire des données retenus, nous avons considéré que tout sous-ensemble de l'espace des paramètres était en fait plausible, sous-ensemble que nous avons balayé de façon systématique pour étayer la probance de nos conclusions.

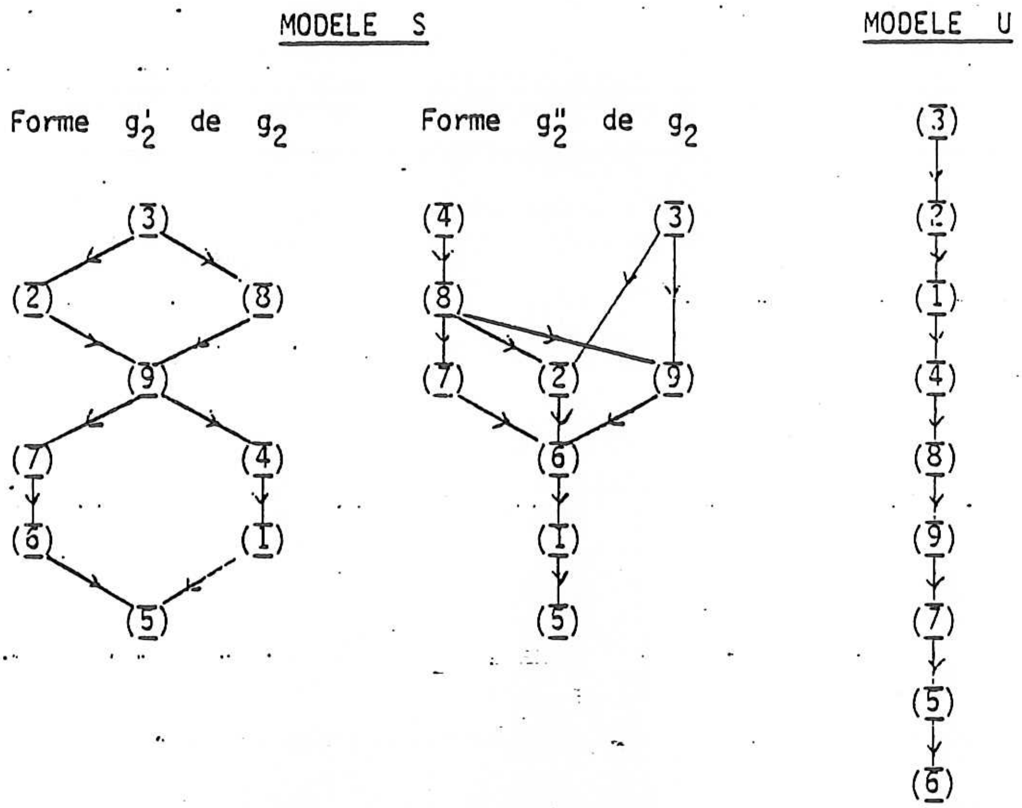
Nous nous contentons ici de mentionner que, parmi toutes les sources de variation possibles, la forme du critère 2 retenue (g_2' ou g_2'') a la plus grande influence. On montre dans Roy et Bouyssou (1983), annexe 10 que, mis à part la forme du critère 2, la stabilité des résultats est bonne, face à des variations que l'on ne peut tenir pour marginales. L'analyse de robustesse a principalement porté sur les indices d'importance (8 jeux), les seuils de discrimination (critères 2 et 6), les seuils de veto (critères 2, 3 et 6) (cf. Roy et Bouyssou (1983) annexe 9 et annexe 5)).

On peut, de façon très qualitative, résumer cet ensemble de résultats par deux graphes, l'un correspondant à la forme g_2', l'autre à g_2'' du critère 2, l'influence des autres paramètres étant plus faible. On a les "graphes-types" de surclassement indiqués à la figure 4.2.

(*) En fait, le plus souvent, l'équipe d'étude elle-même.

(**) par opposition à une variation conjointe de tous les paramètres du modèle. Ici, chaque paramètre varie séparément dans une plage de variation qui n'est pas forcément de faible ampleur. Sur ce point, on pourra se reporter à la figure 2.10.

Figure 4.2



Les arcs de transitivité sont omis et l'absence d'arcs (autres que ceux de transitivité) traduit l'incomparabilité. Le graphe donné pour le modèle U est une présentation graphique des données du tableau 4.1.

3. Contenu de la prescription

Rappelons que l'objectif du WPPSS, en demandant cette étude, était de retenir, parmi les 9 sites, ceux qui auraient la plus grande chance d'être acceptés par l'autorité administrative pour la construction d'une centrale. Le WPPSS était intéressé par deux types d'informations :

- les sites que l'on pouvait, à l'issue de cette phase d'étude, éliminer de toute considération ultérieure, faisant apparaître de bonnes raisons pour être rejetés ;
- parmi les sites restants qui feront tous l'objet d'études plus approfondies, ceux dont on pense qu'ils sont nettement supérieurs aux autres.

L'étude du classement fourni par le modèle U montre que S_5 et S_6 peuvent, sans grands risques, être éliminés de la suite du processus d'étude. Celui-ci place en tête les sites S_3 et S_2, S_1 et S_4 se situant juste derrière (cf. tableau 4.1 et figure 4.2).

L'analyse des résultats du modèle S (cf. figure 4.2) et Roy et Bouyssou (1983), annexe 10) révèle une remarqueble stabilité de la queue de classement, les sites S_5, S_6 et S_1 apparaissant toujours moins bons que les autres. Le site S_3 se situe en tête dans le modèle S quelle que soit la forme du critère 2 retenue. S_2, S_8 et S_4 viennent juste derrière tandis que S_7 et S_9 se situent en milieu de classement dans une zone d'instabilité.

Nous aurions, comme les auteurs du modèle U, recommandé le site S_3 si le WPPSS n'avait voulu retenir qu'un seul site. On constate cependant une divergence importante sur la position du site S_1 et, dans une moindre mesure, du site S_8 entre les deux modèles (nous reviendrons sur ce point en conclusion).

Le cas n'étant pas ici étudié pour lui-même, c'est aux trois interrogations mentionnées au A.2 que nous tenterons, en conclusion, d'apporter des éléments de réponse à la lumière de la confrontation de deux méthodes appliquées à un même problème.

E. CONCLUSIONS

1. L'élaboration et le traitement des données

Dans le modèle U, les procédures utilisées pour estimer les différents paramètres entrant dans la définition de la fonction d'utilité globale (fonctions d'utilité partielles $u_i(s)$, coefficients k_i) découlent logiquement du système d'axiomes sous-tendant l'analyse. Cette base axiomatique implique que, par le biais de comparaisons de loteries, cette estimation est toujours possible.

Inattaquable sur le plan formel, cette position implique, dans la pratique, une collaboration astreignante du décideur (ou de son représentant, cf. D.2) tant le nombre de questions que leur complexité étant importants. La légitimité de ces techniques est, bien sûr, inséparable de l'hypothèse selon laquelle un ensemble d'attitudes de base cohérent, stable et conforme aux axiomes pré-existe dans l'esprit du décideur. Il faut en outre admettre que les réponses fournies par ce décideur ou par ceux qui le représentent sont effectivement dictées par un tel système d'attitude et que celui-ci ne risque pas d'être profondément altéré dans ce dialogue avec l'homme d'étude. L'urgence du problème de décision à résoudre et l'expérience de l'homme d'étude créent alors les conditions propices à la "mise à jour" de ces attitudes que l'on représente par une fonction d'utilité. Lorsque certains jugements exhumés entrent en contradiction avec les axiomes fondant la cohérence, on estime que le caractère normatif de ceux-ci (complétude, transitivité, indépendance) est suffisamment évident pour que le décideur s'y conforme en modifiant ses croyances antérieures (cf. Morgenstern (1979) et chapitre II). Dans une telle optique, contrairement à la plupart des sciences sociales, les axiomes du modèle formel deviennent également des axiomes et, au besoin, des normes de comportement. Cette attitude est sous-jacente dans la plupart des études fondées sur le modèle U. Elle permet d'expliquer pourquoi les hommes d'étude ont alors une grande confiance dans les données qu'ils recueillent et ne les remettent pratiquement pas en cause lors de l'analyse de sensibilité (cf. II.B).

Il en va de même pour ce qui concerne l'évaluation des conséquences des actions. Les distributions de probabilités fournies par des experts sont ainsi rarement remises en question, même lorsqu'elles paraissent entachées d'un arbitraire important (cf. critères 2 et 6 du cas). Ici aussi, on procède à des analyses de sensibilité "à la marge" révélant généralement une bonne stabilité du classement obtenu.

En l'absence de base axiomatique, certains paramètres utilisés par le modèle S ont une interprétation souvent délicate (seuils de veto, indices d'importance). Seules des considérations de bon sens permettent au décideur et à l'homme d'étude de leur donner une valeur numérique. Ceci explique que les résultats du modèle S n'acquièrent de sens que relativement à une analyse de robustesse importante, balayant l'ensemble des valeurs numériques des paramètres compatibles avec les repères qualitatifs de départ. Ce procédé n'est pas un palliatif à l'absence de base axiomatique et de techniques sophistiquées d'encodage des paramètres mais constitue au contraire une des originalités profondes de l'approche, visant à construire une relation de préférence et non à représenter une relation existante de la manière la plus exacte possible.

Les différences constatées entre les deux approches au niveau de l'obtention des données ne sont donc, en fait, que la conséquence de la césure beaucoup plus profonde entre un modèle fondant sa légitimité sur une attitude "descriptive" visant à représenter une relation préexistante et un modèle trouvant sa légitimité dans une attitude "constructive" cherchant, en collaboration avec le décideur, à bâtir une relation de préférence acceptable. Des procédures sophistiquées d'encodage n'ont de sens que par rapport à une réalité qu'il convient de cerner le plus finement possible.

Pour pouvoir appliquer la théorie de l'utilité, il faut admettre, en outre, qu'il est possible de rendre compte de tous les éléments imprécis, incertains ou arbitraires entourant l'évaluation des actions sur les diverses conséquences retenues par une distribution de probabilité. Une telle hypothèse est nécessaire pour que l'espérance mathématique de cette distribution sur une échelle d'utilité puisse être regardée comme un vrai-critère.

Dans les cas où il s'agit avant tout d'aider à décider face à un risque, une distribution de probabilité permet de modéliser, de façon satisfaisante, l'évaluation d'une action. Lorsqu'on s'intéresse aux pertes de saumons dans une rivière (critère 2), on peut vouloir avant tout cerner le risque de disparition totale de cette espère dans le cours d'eau. Si l'on dispose d'une distribution de probabilité suffisamment bien établie pour décrire le phénomène, une espérance mathématique d'utilité peut constituer un critère adéquat.

Au contraire, même s'il est a priori possible de rendre compte de façon probabiliste du coût d'une centrale nucléaire (dont la définition n'est pas exempte d'ambiguïté, cf. B.5) en procédant à une modélisation très fine de chacun des éléments (taux d'inflation, coût des matériaux de construction et de la matière fissile, etc.) pouvant influer sur le coût du projet, il est raisonnable de penser que cette information est de peu d'intérêt pour aider le décideur. Ce qui importe, ce n'est pas de connaître avec une précision, souvent illusoire, une distribution de probabilité sur la conséquence coût mais de pouvoir dire si on peut estimer raisonnablement qu'une action est significativement plus ou moins chère qu'une autre. Dans cette situation, un raisonnement en termes de seuils de dispersion semble s'imposer, comme dans tous les cas où il s'agit plus d'une imprécision et d'un flou conceptuel que d'un véritable phénomène aléatoire. Le modèle S ne fait pas, a priori, d'hypothèses restrictives sur la nature de l'imprécision et de l'incertitude affectant l'évaluation des actions et cherche à traduire ces phénomènes au travers d'un pseudo-critère. Ces seuils de discrimination doivent cependant refléter également l'arbitraire et le caractère souvent grossier des techniques d'agrégation retenues (cf. III.E).

2. Robustesse et fragilité des approches

La distinction entre une attitude constructive et une attitude descriptive permet de mieux cerner les différences et les avantages respectifs des modèles U et S. De façon certaine, si le décideur est clairement identifié et possède une structure de préférence suffisamment précise et stable, on peut adopter une attitude purement descriptive. Nous pensons néanmoins que, dans la plupart des problèmes réels d'aide à la décision, une attitude de type constructif s'impose.

Toute décision s'insère dans un tissu organisationnel souvent complexe et conflictuel, empêchant de parler d'un décideur unique, sinon de façon mythique (cf. Walliser (1979), Roy (1979-83), chapitre 2). Il est alors difficile de supposer une préférence collective cohérente préexistante pour un groupe décisionnel.

De fait, les auteurs du modèle U n'ont pas, pour évaluer les divers paramètres entrant dans la fonction d'utilité globale, interrogé le (ou les) décideur(s) du WPPSS (cf. D.2) mais ont travaillé à partir des jugements fournis par l'équipe d'étude elle-même. Cette pratique, qui semble courante dans les études menées à l'aide du modèle U, peut légitimement faire douter de la probance des procédures d'estimation de la fonction d'utilité utilisées et implique de procéder à des analyses de sensibilité de même importance que dans le modèle S.

Une fois admis l'intérêt, voire la nécessité, d'une approche constructive, on mesure mieux le rôle et la portée d'une base axiomatique pour des modèles d'aide à la décision. Ce qui fait aux yeux de beaucoup l'attrait d'une base axiomatique, c'est la légitimité qu'ils croient en retirer pour leur travail. Or, cette légitimité ne vaut que pour la "théorie" et non pour le "modèle" qui est la "théorie interprêtée" et rendue opératoire. Le modèle U se fonde sur une théorie formelle de la représentation d'un système de préférence existant. On voit mal ce que pourrait être une théorie de la construction d'un système de préférences, théorie sur laquelle prendrait appui le modèle S. Si la base axiomatique légitime la théorie, elle ne légitime pas pour autant le modèle. La légitimité de celui-ci doit être recherchée dans l'aide effective qu'il apporte pour parvenir à des convictions (remettant éventuellement en cause des idées préconçues), pour intervenir auprès d'autrui dans le cours des choses. Un modèle d'aide à la décision ne peut pas seulement être une théorie formelle mais doit constituer une base de dialogue avec le réel et d'intervention sur ce réel (cf. chapitre I).

Précisons à nouveau qu'il n'est pas inconcevable de vouloir utiliser le modèle U dans une optique constructive. C'est bien sûr, implicitement, ce qui est fait dans la plupart des études. Cependant, il convient, dans ce cas, de juger du modèle U indépendamment de sa base axiomatique en s'intéressant à la probance des procédures de construction des fonctions d'utilité partielles et d'estimation des coefficients k_i en tant qu'outils destinés à construire ou à enrichir, chez le décideur, une relation de préférence entre les actions (cf. chapitre II.B).

De nombreux malentendus à propos de la comparaison des modèles S et U semblent provenir du fait que c'est une attitude constructive qui guide l'élaboration de ce dernier alors que sa base axiomatique ne lui confère de légitimité particulière que s'il procède d'une attitude descriptive.

Nous ne croyons pas possible de tirer de ce travail des conclusions normatives à propos des modèles S et U en tant qu'outils potentiels d'aide à la décision. Chacun d'eux présente des champs d'actions privilégiés et le caractère opératoire de l'un et de l'autre a déjà été reconnu dans le cadre de nombreuses études.

On doit, de plus, reconnaître que le choix du type de modèle dépend bien souvent de facteurs "culturels" échappant à l'analyse formelle, de "moeurs décisionnelles".

3. Convergence des prescriptions

Nous avons constaté, au D.3, que, malgré une convergence certaine des prescriptions sur le site S_3, celles-ci n'étaient cependant pas semblables et qu'en particulier la position du site S_1 était très controversée. Le modèle U considère que S_1 est parmi les meilleurs sites étudiés tandis que le modèle S recommande son abandon dans la suite du processus d'étude. De même, le site S_8, qui apparaît dans le modèle S comme un "bon" site, figure en milieu de classement dans le modèle U.

Ces divergences reflètent la différence des principes qualitatifs sous-tendant les deux modèles, en particulier pour ce qui concerne la probance des écarts entre les évaluations sur les différents critères et le caractère plus ou moins compensatoire de leur agrégation. Ainsi, le site S_1 (cf. annexe 5) est très bien évalué sur la plupart des critères (g_3, g_4, g_5, g_6) mais possède la pire des évaluations possibles en ce qui concerne la santé-sécurité (g_1) et les pertes de saumons (g_2). Le caractère partiellement compensatoire du modèle S tend à rejeter un tel profil vers le bas du classement alors que le modèle U, parfaitement compensatoire, place ce site en tête en raison de ses très bonnes évaluations sur de nombreux critères (cf. III.C.1).

A l'inverse, le site S_8, que l'on peut interpréter comme un site "compromis", ce compromis étant situé à un niveau moyen (cf. annexe 5), bien classé dans le modèle S, n'apparaît pas en bonne place dans le modèle U qui classe avant lui des sites dont les bonnes performances sur certains critères viennent compenser de très mauvaises évaluations sur d'autres.

Il ne convient pas, de plus, de tirer des conclusions trop générales de la bonne convergence des prescriptions sur le site S_3. Un examen intuitif des évaluations du site S_3 montre que celui-ci apparaît comme un bon site compte-tenu de l'information disponible. Il est naturel, dans ces conditions, de voir S_3 apparaître en tête dans les deux méthodes. La convergence obtenue est donc, pour une bonne part, contingente à la nature du problème étudié (sur un autre problème, un site du type S_1 aurait pu apparaître en tête dans le modèle U).

Devant une opposition aussi profonde des principes qualitatifs à la base des deux modèles, il n'est pas choquant de les voir aboutir à des prescriptions non semblables.

Ces inévitables divergences ne traduisent pas, à notre sens, l'inutilité et la vanité du travail d'aide à la décision mais peut-être, plus simplement, le fait qu'il peut être apporté plusieurs éléments de réponse à un même problème. Devant l'impossibilité de pratiquer, au sein d'un même processus de décision, deux types d'étude différents, le décideur doit être conscient des options qualitatives véhiculées par les différents modèles, traduisant souvent des prises de position éthiques de l'homme d'étude, avant de se forger une conviction personnelle sur le choix à effectuer. Dans ce domaine, la multiplicité des approches nous semble refléter bien plus une reconnaissance de la complexité de la tâche de l'homme d'étude qu'une faiblesse scientifique.

CONCLUSION GENERALE

A l'issue de ce travail, il nous semble intéressant de mentionner quelques points qui mériteraient d'être approfondis ou développés dans le cadre de recherches futures et que nous n'avons pas eu le temps d'aborder ici.

En premier lieu, on a vu que la question de l'existence et de la stabilité d'un ensemble d'attitudes de base cohérentes était cruciale pour ce qui concerne la théorie de l'utilité. Malheureusement, la plupart des études empiriques réalisées en ce domaine l'ont été par des psychologues dans une optique fort différente de celle de l'aide à la décision. La conception et la réalisation d'expériences faisant entrer en jeu la nécessaire interaction entre l'homme d'étude et le décideur pour la révélation de ces attitudes semblent nécessaires.

En second lieu, nous avons mentionné, à diverses reprises, que seule une théorie de l'apprentissage et de la structuration des préférences permettrait de "fonder", autrement que sur un plan pratique, des méthodes relevant d'une "attitude constructive". La difficulté que suppose un tel travail tient au fait que l'on doit tenir compte à la fois des différents niveaux possibles d'acuité perceptive des évaluations distributionnelles sur une échelle et des différentes opérations perceptives sur celles-ci que le décideur est en mesure de réaliser (cf. Bisdorff (1981)). Un tel travail permettrait cependant de mieux apprécier les difficultés que peut soulever la mise en oeuvre d'une méthode d'aide à la décision au sein d'un processus de décision et de, peut-être, fournir les bases nécessaires à la conception de nouvelles méthodes. Ce courant de recherche devrait, en tout état de cause, se situer à la confluence de nombreuses disciplines et particulièrement de la théorie de la décision et de la psychologie cognitive.

Les considérations du chapitre III sur la théorie des systèmes de préférences non compensatoires appellent, à notre sens, d'autres développements. Il serait en particulier intéressant de chercher à relacher certaines hypothèses structurelles que nous avons introduites (ainsi, par exemple, le choix d'un ensemble X comprenant la totalité du produit cartésien $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ et le type de condition de concordance retenu) et d'envisager l'introduction de seuils dans cette approche (au travers de relations de préférence partielles ayant les propriétés de quasi ou de pseudo-ordre par exemple).

Mentionnons, de plus, que si la comparaison de deux modèles d'aide à la décision au sein d'un même processus réel de décision nous a paru se heurter à de grandes difficultés, il serait particulièrement fécond de s'interroger sur les moyens qui permettraient de comparer diverses approches quant à leur insertion et leur acceptation dans la pratique. Ce point nous amène enfin à revenir à nouveau sur le problème de la validation et du test des modèles d'aide à la décision. On a vu, tout au long de ce travail, combien les conceptions classiques de "test" étaient inadaptées dans ce domaine et les difficultés qui en résultaient. A notre sens, une réflexion approfondie sur ce point permettrait de donner un nouvel élan à la recherche, ainsi qu'à la pratique,dans le domaine de l'aide à la décision.

ANNEXES

ANNEXE 1

INDEPENDANCE AU SENS DES PREFERENCES ET AU SENS DE L'UTILITE

Soit $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ un ensemble d'actions évaluées sur n attributs et P une relation binaire de préférence sur cet ensemble. Soit $I \subset \{1, 2, \dots, n\}$.

$\{X_i, i \in I\}$ est indépendant, au sens des préférences, de son complément dans X ssi $\exists\, (y^0)_{j \notin I} \underset{j \notin I}{\times} X_j$ tel que :

$$((x_i)_{i \in I}, (y^0)_{j \notin I}) \; P \; ((x_i')_{i \in I}, (y^0)_{j \notin I}) \Rightarrow$$
$$((x_i)_{i \in I}, (y^1)_{j \notin I}) \; P \; ((x_i')_{i \in I}, (y^1)_{j \notin I})$$
$$\forall\, ((x_i)_{i \in I}, (x_i')_{i \in I}) \in [\underset{i \in I}{\times} X_i]^2 \text{ et } \forall\, (y^1)_{j \notin I} \in \underset{j \notin I}{\times} X_j.$$

L'indépendance, au sens des utilités, se définit formellement en considérant non plus des évaluations précises mais des distributions de probabilités sur X (cf. Keeney et Raiffa (1976)). $\{X_i, i \in I\}$ est indépendant, au sens des utilités, de son complément dans X si les préférences, pour des distributions de probabilité sur $\underset{i \in I}{\times} X_i$, ne dépendent pas des valeurs certaines sur $\underset{j \notin I}{\times} X_j$.

ANNEXE 1

INDEPENDANCE AU SENS DES PREFERENCES ET AU SENS DE L'UTILITE

Soit $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ un ensemble d'actions évaluées sur n attributs et P une relation binaire de préférence sur cet ensemble. Soit $I \subset \{1, 2, \ldots, n\}$.

$\{X_i, i \in I\}$ est indépendant, au sens des préférences, de son complément dans X ssi $\exists\, (y^o)_{j \notin I} \; \underset{j \notin I}{X} X_j$ tel que :

$$((x_i)_{i \in I}, (y^o)_{j \notin I}) \; P \; ((x_i')_{i \in I}, (y^o)_{j \notin I}) \Rightarrow$$
$$((x_i)_{i \in I}, (y^1)_{j \notin I}) \; P \; ((x_i')_{i \in I}, (y^1)_{j \notin I})$$
$$\forall \; ((x_i)_{i \in I}, (x_i')_{i \in I}) \in [\underset{i \in I}{X} X_i]^2 \text{ et } \forall \; (y^1)_{j \notin I} \in \underset{j \notin I}{X} X_j.$$

L'indépendance, au sens des utilités, se définit formellement en considérant non plus des évaluations précises mais des distributions de probabilités sur X (cf. Keeney et Raiffa (1976)). $\{X_i, i \in I\}$ est indépendant, au sens des utilités, de son complément dans X si les préférences, pour des distributions de probabilité sur $\underset{i \in I}{X} X_i$, ne dépendent pas des valeurs certaines sur $\underset{j \notin I}{X} X_j$.

ANNEXE 2

DEMONSTRATION DU THEOREME 2.6

Théorème 2.6 : Soit (I, Q, P) un triplet de relations binaires sur un ensemble de mélange $\mathcal{M}$. Il existe trois fonctions u, λ, σ sur $\mathcal{M}$ à valeurs réelles telles que, $\forall (a, b) \in \mathcal{M}^2$, $\forall \alpha \in [0, 1]$:

1) $a \, P \, b \iff u(b) + \sigma(b) < u(a)$ (2.13)

2) $a \, Q \, b \iff \begin{cases} u(b) + \lambda(b) < u(a) \\ u(b) + \sigma(b) \geq u(a) \end{cases}$ (2.14)

3) $a \, I \, b \iff \begin{cases} u(a) + \lambda(a) \geq u(b) \\ u(b) + \lambda(b) \geq u(a) \end{cases}$ (2.15)

4) $a \, \mathring{S} \, b \iff u(a) = u(b)$ (2.16)

5) $0 \leq \lambda(a) \leq \sigma(a)$ (2.17)

6) $u(a) > u(b) \Rightarrow \begin{cases} u(a) + \sigma(a) \geq u(b) + \sigma(b) \text{ et} & (2.18\ a) \\ u(a) + \lambda(a) \geq u(b) + \lambda(b) & (2.18\ b) \end{cases}$

7) $u(a) = u(b) \Rightarrow \begin{cases} u(a) + \sigma(a) = u(b) + \sigma(b) & (2.19\ a) \\ u(a) + \lambda(a) = u(b) + \lambda(b) & (2.19\ b) \end{cases}$

8) $u(\alpha a + (1 - \alpha) b) = \alpha u(a) + (1 - \alpha) u(b)$ si et seulement si, $\forall (a, b, c, d) \in \mathcal{M}^4$: (2.20)

P_1 (I, Q, P) est un pseudo-ordre sur $\mathcal{M}$.

P_2 $a \, \mathring{S} \, b \iff \frac{1}{2} a + \frac{1}{2} c \, \mathring{S} \, \frac{1}{2} b + \frac{1}{2} c$

P_3 $b \, P \, a \Rightarrow \exists \, a'$ tel que $\begin{cases} a' \, Q \, a \text{ ou } a' \, I \, a \\ \text{non } a' \, S \, d \Rightarrow d \, P \, a \quad \forall d \in \mathcal{M} \end{cases}$

P_4 $b \, Q \, a \Rightarrow \exists \, a''$ tel que $\begin{cases} a'' \, I \, a \\ \left.\begin{array}{l} \text{non } a'' \, S \, d \text{ et} \\ \text{non } d \, P \, a \end{array}\right\} \Rightarrow d \, Q \, a \quad \forall d \in \mathcal{M} \end{cases}$

P_5 $\{\alpha \,/\, c \, S \, \alpha a + (1 - \alpha) b\}$ et $\{\alpha \,/\, \alpha a + (1 - \alpha) b \, S \, c\}$

sont des ensembles fermés.

Avant de prouver ce théorème, énonçons un lemme qui est la reformulation du théorème 2.2.

Lemme 2.7 (Herstein et Milnor (1953)) : Soit P une relation sur un ensemble de mélange $\mathcal{M}$. Il existe une fonction u sur $\mathcal{M}$ à valeurs réelles telle que :

$$a \; P \; b \iff u(a) > u(b) \quad \forall \, (a, b) \in \mathcal{M}^2 \qquad (2.21)$$

$$u(\alpha\, a + (1 - \alpha)\, b) = \alpha\, u(a) + (1 - \alpha)\, u(b) \quad \forall \, (a, b) \in \mathcal{M}^2, \; \forall \, \alpha \in [0, 1] \qquad (2.22)$$

si et seulement si, $\forall (a, b, c) \in \mathcal{M}^3$:

H1 : P est un ordre faible.

H2 : $\{\alpha \,/\, \alpha\, a + (1 - \alpha)\, b \; PI \; c\}$ et $\{\alpha \,/\, c \; PI \; \alpha\, a + (1 - \alpha)\, b\}$ sont des ensembles fermés.

H3 : $a \; I \; b \iff \frac{1}{2} a + \frac{1}{2} c \; I \; \frac{1}{2} b + \frac{1}{2} c$ avec

$a \; I \; b \iff$ non $a \; P \; b$ et non $b \; P \; a$

$a \, PI \, b \iff a \; P \; b$ ou $a \; I \; b$.

Démonstration du théorème 2.6

1) Nécessité (2.13)-(2.20) $\Rightarrow P_1 - P_5$. On a :

Lemme 2.8 : (2.13)-(2.20) $\Rightarrow \begin{cases} a \; S \; b \iff u(a) \geq u(b) \\ a \; \bar{S} \; b \iff u(a) > u(b) \end{cases}$

Démonstration

$$u(a) \geq u(b) \Rightarrow \begin{cases} u(a) + \sigma(a) \geq u(b) + \sigma(b) \\ u(a) + \lambda(a) \geq u(b) + \lambda(b) \end{cases}$$

$$c \; P \; a \iff u(a) + \sigma(a) < u(c) \Rightarrow u(b) + \sigma(b) < u(c) \Rightarrow c \; P \; b$$

$$b \; P \; c \iff u(c) + \sigma(c) < u(b) \Rightarrow u(c) + \sigma(c) < u(a) \Rightarrow a \; P \; c$$

$$c \; Q \; a \iff \begin{cases} u(a) + \lambda(a) < u(c) \Rightarrow u(b) + \lambda(b) < u(c) \Rightarrow c \succ b \\ u(a) + \sigma(a) \geq u(c) \end{cases}$$

$$b\ Q\ c \iff \begin{cases} u(c) + \lambda(c) < u(b) \Rightarrow u(c) + \lambda(c) < u(a) \Rightarrow a \succ c \\ u(c) + \sigma(c) \geq u(b), \end{cases}$$

d'où $u(a) \geq u(b) \Rightarrow a\ S\ b$.

L'implication inverse se démontre aisément.

C.Q.F.D.

a) (2.13)-(2.19) $\Rightarrow P_1$ (cf. Vincke (1980b)).

b) $a\ \overset{\circ}{S}\ b \iff u(a) = u(b) \iff \frac{1}{2}\, u(a) + \frac{1}{2}\, u(c) = \frac{1}{2}\, u(b) + \frac{1}{2}\, u(c) \quad \forall\, c \in \mathcal{A}$

$\iff u(\frac{1}{2}\, a + \frac{1}{2}\, c) = u(\frac{1}{2}\, b + \frac{1}{2}\, c) \iff \frac{1}{2}\, a + \frac{1}{2}\, c\ \overset{\circ}{S}\ \frac{1}{2}\, b + \frac{1}{2}\, c \Rightarrow P_2$.

c) $b\ P\ a \iff u(a) + \sigma(a) < u(b)$.

Soit $a' = \alpha\, a + (1 - \alpha)\, b$ avec $\alpha = \dfrac{(u(a) + \sigma(a)) - u(b)}{u(a) - u(b)} \in [0, 1]$.

(2.20) $\Rightarrow u(a') = \alpha\, u(a) + (1 - \alpha)\, u(b) \iff u(a') = u(a) + \sigma(a)$.

Si $\lambda(a) < \sigma(a)$, alors $\left.\begin{cases} u(a) + \lambda(a) < u(a') = u(a) + \sigma(a) \text{ et} \\ u(a) + \sigma(a) \geq u(a') = u(a) + \sigma(a) \end{cases}\right\} \iff a'\ Q\ a$

Si $\lambda(a) = \sigma(a)$, alors $\left.\begin{cases} u(a) + \lambda(a) \geq u(a') = u(a) + \sigma(a) \text{ et} \\ u(a') + \lambda(a') \geq u(a) \iff \sigma(a) + \lambda(a') \geq 0 \end{cases}\right\} \iff a'\ I\ a$

Non $a'\ S\ d \Rightarrow u(d) > u(a) + \sigma(a) \Rightarrow d\ P\ a$, d'où P_3.

d) $b\ Q\ a \Rightarrow \begin{cases} u(a) + \lambda(a) < u(b) \\ u(a) + \sigma(a) \geq u(b) \end{cases}$

Soit $a'' = \alpha\, a + (1 - \alpha)\, b$ avec $\alpha = \dfrac{u(a) + \lambda(a) - u(b)}{u(a) - u(b)} \in [0, 1]$

$u(a'') = u(a) + \lambda(a) \Rightarrow a''\ I\ a$

$\left.\begin{array}{l} \text{non } a''\ S\ d \Rightarrow u(d) > u(a) + \lambda(a) \\ \text{non } d\ P\ a \Rightarrow u(a) + \sigma(a) \geq u(d) \end{array}\right\} \Rightarrow d\ Q\ a$, d'où P4.

e) L'existence de u, σ, λ impliquent que $\{\alpha \;/\; c\ S\, \alpha\, a + (1 - \alpha)\, b\}$ et $\{\alpha \;/\; \alpha\, a + (1 - \alpha)\, b\ S\ c\}$ sont des ensembles fermés, d'où P5.

2) <u>Suffisance</u> : P_1-P_5 $\Longrightarrow$ (2.13)-(2.20).

a) P_1, P_2, P_5 impliquent (Lemme (2.7)) l'existence d'une fonction u telle que :

$$a \bar{S} b \iff u(a) > u(b)$$
$$a \overset{\circ}{S} b \iff u(a) = u(b) \qquad (2.16)$$
$$u(\alpha . a + (1 - \alpha) b) = \alpha\, u(a) + (1 - \alpha)\, u(b) \qquad (2.20)$$

b) Soit $\sigma(a) \begin{cases} = u(a') - u(a) & \text{si } a' \text{ existe} \\ = \sup\limits_{c \in \mathcal{M}} u(c) - u(a) & \text{sinon} \end{cases}$

$\lambda(a) \begin{cases} = u(a'') - u(a) & \text{si } a'' \text{ existe} \\ = \sup\limits_{c I a} u(c) - u(a) & \text{sinon} \end{cases}$

On montre que u, σ et λ vérifient (2.13)-(2.19).

Supposons qu'il existe un $b \in \mathcal{M}$ tel que $b\ P\ a$; alors a' existe. Supposons $a'\ S\ b$. On a $a'\ S\ b$ et $b\ P\ a \Longrightarrow a'\ P\ a$ impossible, d'où $b\ \bar{S}\ a'$ $\iff u(b) > u(a') \iff u(b) > u(a) + \sigma(a)$.

S'il existe un $b \in \mathcal{M}$ tel que $b\ Q\ a$, alors a'' existe. Supposons $a''\ S\ b$. On a $a''\ S\ b$ et $b\ Q\ a \Longrightarrow a'' \succ a$ impossible, d'où $b\ \bar{S}\ a'' \iff u(b) > u(a'')$ $\iff u(b) > u(a) + \lambda(a)$. Supposons que a' existe ; alors $b\ \bar{S}\ a' \Longrightarrow b\ P\ a$ impossible, d'où $a'\ S\ b \Longrightarrow u(a) + \sigma(a) \geq u(b)$. Si a' n'existe pas, $u(a) + \sigma(a) = \sup\limits_{c \in \mathcal{M}} u(c) \geq u(b)$.

Si $b\ I\ a$ et a'' existe, on a $a''\ S\ b$ (sinon $b\ Q\ a$), d'où $u(a) + \lambda(a) \geq u(b)$. Si $b\ I\ a$ et a'' n'existe pas, alors $u(a) + \lambda(a) = \sup\limits_{c I a} u(c) \geq u(b)$. I étant une relation symétrique, on a aussi $u(b) + \lambda(b) \geq u(a)$.

Montrons $0 \leq \sigma(a)$. Si a' existe, on a $a'\ S\ a$ (sinon $a\ P\ a) \Longrightarrow \sigma(a) \geq 0$. Sinon $\sigma(a) = \sup\limits_{c \in \mathcal{M}} u(c) - u(a) \geq 0$.

Montrons $0 \leq \lambda(a)$. Si a" existe, on a a" S a (sinon a Q a) $\Rightarrow \lambda(a) \geq 0$. Si a" n'existe pas, $\lambda(a) = \sup_{cIa} u(c) - u(a) \geq 0$ car I réflexive.

Prouvons $\lambda(a) \leq \sigma(a)$.

- Si a' et a" n'existent pas, on a $\sup_{c \in \mathcal{U}} u(c) \geq \sup_{cIa} u(c) \Rightarrow \sigma(a) \geq \lambda(a)$.
- Si a' et a" existent, alors a' S a" (sinon a" P a) $\Rightarrow \sigma(a) \geq \lambda(a)$.
- Si a' n'existe pas et a" existe, $\sup_{c \in \mathcal{U}} u(c) \geq u(a") \Rightarrow \sigma(a) \geq \lambda(a)$.
- Si a' existe et a" n'existe pas, $\forall$ c $\in \mathcal{U}$ tel que c I a, on a a' S c (sinon c P a), d'où $u(a) + \sigma(a) \geq \sup_{cIa} u(c) \Rightarrow \sigma(a) \geq \lambda(a)$.

Montrons (2.18 a). On a a $\bar{S}$ b $\Longleftrightarrow u(a) > u(b)$.

- Supposons a' et b' existent. Supposons b' $\bar{S}$ a' ; alors b' P a, d'où b' P b impossible. On a a' S b' $\Rightarrow u(a) + \sigma(a) \geq u(b) + \sigma(b)$.
- Supposons b' existe et a' n'existe pas. On a $\sup_{c \in \mathcal{U}} u(c) \geq u(b') \Rightarrow u(a) + \sigma(a) \geq u(b) + \sigma(b)$.
- Supposons a' existe et b' n'existe pas. Si $\exists$ d tel que d P a, alors d P b et b' existe. Si $\nexists$ d tel que d P a, alors a' S d $\forall$ d $\in \mathcal{U}$. $u(a') \geq \sup_{c \in \mathcal{U}} u(c)$.
- Supposons que a' et b' n'existent pas. On a $\sup_{c \in \mathcal{U}} u(c) \geq \sup_{c \in \mathcal{U}} u(c)$.

Montrons (2.18 b).

- Si a" et b" existent.
  Supposons b" $\bar{S}$ a" ; alors b" Q a (car non b" P a).
  b" Q a et a S b $\Rightarrow$ b" $\succ$ b impossible,
  d'où a" S b" $\Rightarrow u(a) + \lambda(a) \geq u(b) + \lambda(b)$.
- Si a" n'existe pas et b" existe.
  Supposons b" P a ; alors b" P b car a S b impossible,
  b" Q a ; alors b" $\succ$ b car a S b impossible,
  d'où $u(a) + \lambda(a) \geq u(b") = u(b) + \lambda(b)$.
- Si a" existe et b" n'existe pas.
  Soit c tel que c I b.
  Supposons c P a. Alors c P b impossible.
  Posons c $\bar{S}$ a". Alors c Q a et c $\succ$ b impossible,

d'où $a'' \; S \; c \Rightarrow u(a) + \lambda(a) \geq u(c) \quad \forall \; c$ tel que $c \; I \; b$,

d'où $u(a) + \lambda(a) \geq u(b) + \lambda(b)$.

- Si a'' et b'' n'existent pas :

soit d tel que $u(d) = \sup\limits_{xIa, x \in \mathcal{U}} u(x)$ et

c tel que $u(c) = \sup\limits_{xIb, x \in \mathcal{U}} u(x)$.

Supposons $c \; \bar{\bar{S}} \; d$. On a non $c \; I \; a$ par définition.

$c \; Q \; a \Rightarrow c \succ b$ impossible.

$c \; P \; a \Rightarrow c \; P \; b$ impossible

$a \; P \; c$ et $c \; S \; d \Rightarrow a \; P \; d$ impossible

$a \; Q \; c$ et $c \; S \; d \Rightarrow a \succ d$ impossible,

d'où $d \; S \; c \Rightarrow u(a) + \lambda(a) \geq u(b) + \lambda(b)$.

Montrons (2.19 a).

$a \; \mathring{S} \; b \Leftrightarrow u(a) = u(b)$.

- Si a' et b' existent.

Si $a' \; \mathring{S} \; b' \Rightarrow u(a) + \sigma(a) = u(b) + \sigma(b)$.

Si $a' \; \bar{\bar{S}} \; b' \Rightarrow$ non $b' \; S \; a' \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a' \; P \; b \\ \text{or } b \; S \; a \end{array}\right\} \Rightarrow a' \; P \; a$ impossible.

Si $b' \; \bar{\bar{S}} \; a' \Rightarrow$ non $a' \; S \; b' \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b' \; P \; a \\ \text{or } a \; S \; b \end{array}\right\} \Rightarrow b' \; P \; b$ impossible.

- Si a' existe et b' n'existe pas.

Si $\exists \; d$ tel que $d \; P \; a$, alors $d \; P \; b$ car $a \; S \; b$ et b' existe.

Si $\nexists \; d$ tel que $d \; P \; a$, alors $a' \; S \; d$ (sinon $d \; P \; a$) $\forall \; d \in \mathcal{U}$, d'où

$u(a') \geq \sup\limits_{c \in \mathcal{U}} u(c) \underset{a' \in \mathcal{U}}{\Rightarrow} u(a') = \sup\limits_{c \in \mathcal{U}} u(c)$.

$\mathring{S}$ étant une relation symétrique, le cas b' existe et a' n'existe pas est identique au précédent.

- Si a' et b' n'existent pas, on a :

$\sup\limits_{c \in \mathcal{U}} u(c) = u(a) + \sigma(a) = u(b) + \sigma(b)$.

Montrons (2.19 b).

- Si a'' et b'' existent.

Si $a'' \; \mathring{S} \; b'' \Rightarrow u(a) + \lambda(a) = u(b) + \lambda(b)$.

Si $a'' \; \bar{\bar{S}} \; b'' \Rightarrow$ non $b'' \; S \; a''$.

Or on a non $a'' P b$ (car sinon $a'' P a$), d'oũ $a'' Q b$. Or $b S a$, d'oũ $a'' \succ a$ impossible.

Si $b'' \bar{\bar{S}} a''$: la démonstration d'impossibilité est identique.

- Si a'' existe et b'' n'existe pas.

  Si $\exists d$ tel que $d Q a$, alors soit $d Q b$, soit $d P b$ (car $a S b$).

  Si $d Q b$, alors b'' existe.

  Si $d P b$, alors $d P a$ car $b S a$ impossible.

  Si $\nexists d$ tel que $d Q a$, alors $a'' S d$ $\forall d$ tel que non $d P a$. Or, $d P a$ et $a S b \Rightarrow d P b$, d'oũ :

  $$u(a'') = u(a) + \lambda(a) \geq \sup_{cIb} u(c) = u(b) + \lambda(b).$$

  Supposons $a'' \succ b$; alors $a'' \succ a$ impossible.

  Supposons $b \succ a''$; alors $a \succ a''$ impossible, d'oũ $a'' I b$.

  On a donc $u(a'') = u(a) + \lambda(a) = \sup_{cIb} u(c) = u(b) + \lambda(b)$.

- Si a'' et b'' n'existent pas.

  Si d est tel que $u(d) = \sup_{xIa} u(x)$.

  Si c est tel que $u(c) = \sup_{xIb} u(x)$.

  On a démontré plus haut :

  $$\left.\begin{array}{l} a S b \Rightarrow d S c \\ b S a \Rightarrow c S d \end{array}\right\} \Rightarrow d \overset{\circ}{S} c \Rightarrow u(a) + \lambda(a) = u(b) + \lambda(b).$$

C.Q.F.D.

ANNEXE 3

DEMONSTRATION DU THEOREME 2.11

Théorème 2.11 : Soit $\mathcal{U}$ un ensemble de mélanges et $\overset{*}{\succ}$ une relation binaire sur $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$. On définit, sur $\mathcal{U}$, une relation binaire $\succ$ par : $a \succ b \iff (a, b) \overset{*}{\succ} (b, b) \quad \forall (a, b) \in \mathcal{U}^2$. Si les axiomes suivants sont vérifiés :

A_1 : $\overset{*}{\succ}$ est une relation d'ordre faible sur $\mathcal{U}^2$ (asymétrique et négativement transitive),

A_2 : $(a \succ b)$ et $0 < \alpha < 1 \Rightarrow \alpha \; a + (1 - \alpha) \, c \succ \alpha \, b + (1 - \alpha) \, c$
$\forall (a, b, c) \in \mathcal{U}^3$,

A_3 : $a \succ b, \; b \succ c \Rightarrow \exists \, (\alpha, \beta) \in \,]0, 1[^2$ tel que
$\alpha \, a + (1 - \alpha) \, c \succ b$
$b \succ \beta \, a + (1 - \beta) \, c$,

A_4 : $(a, b) \overset{*}{\succsim} (c, d) \Rightarrow (d, c) \overset{*}{\succsim} (b, a) \quad \forall \, a, b, c, d \in \mathcal{U}^4$,

A_5 : $(a, b) \overset{*}{\succsim} (c, d) \Rightarrow (a, c) \overset{*}{\succsim} (b, d) \quad \forall \, a, b, c, d \in \mathcal{U}^4$,

A_6 : $\forall (a, b) \in \mathcal{U}^2, \; \exists \, c \in \mathcal{U}$ tel que $(a, c) \overset{*}{\sim} (c, b)$,

A_7 : $\forall (a, b, c, d) \in \mathcal{U}^4$, $a \succ b$ et $(a, b) \overset{*}{\succsim} (c, d) \Rightarrow \exists \, e \in \mathcal{U}$ tel que
$a \succ e \succ b$ et $(a, e) \overset{*}{\succsim} (c, d)$,

A_8 : $\forall (a, b, c, d) \in \mathcal{U}^4$, $a \succ b$ et $(a, b) \overset{*}{\succsim} (c, d) \Rightarrow \exists \, (e, f) \in \mathcal{U}^2$
tel que $(a, e) \, M^n \, (f, b)$ et $(c, d) \overset{*}{\succsim} (a, e)$ pour $n \in N$ avec M^n une relation binaire sur $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$ définie récursivement par :
$(a, b) \, M^1 \, (c, d) \iff (a, b) \overset{*}{\sim} (c, d)$ et $b \sim c$
$(a, b) \, M^{n+1} \, (c, d) \iff \exists \, (e, f)$ tel que
$(a, b) \, M^n \, (e, f)$ et $(e, f) \, M^1 \, (c, d)$,

$A_9 = R_1 \quad \forall (a, b, c) \in \mathcal{U}^3$
$a \sim \frac{1}{2} b + \frac{1}{2} c \iff (b, a) \overset{*}{\sim} (a, c)$,

A_{10} : $\exists \, (h, b) \in \mathcal{U}^2$ tel que $h \succ b$ et tel que, $\forall \, a \in \mathcal{U}$, $h \succsim a \succsim b$,

alors il existe une fonction u à valeur réelle telle que :

$(a, b) \overset{*}{\succ} (c, d) \iff u(a) - u(b) > u(c) - u(d)$ (2.24)

$u(\alpha\, a + (1 - \alpha)\, b) = \alpha\, u(a) + (1 - \alpha)\, u(b)$ (2.25)

et définie à une transformation linéaire positive près.

Démonstration

A_1-A_2-A_3 $\iff \exists$ une fonction v telle que
$a \succ b \iff v(a) > v(b)$.
$v(\alpha\, a + (1 - \alpha)\, b) = \alpha\, v(a) + (1 - \alpha)\, v(b)$
toute fonction $V = \lambda\, v + \delta$ avec $\lambda > 0$ vérifiant également ces deux conditions.

A_1-A_4-A_5-A_6-A_8 $\iff \exists$ une fonction w telle que
$(a, b) \overset{*}{\succ} (c, d) \iff w(a) - w(b) > w(c) - w(d)$
toute fonction $W = \lambda\, w + \delta$ avec $\lambda > 0$ vérifiant également cette condition.
$\forall\, (a, b) \in \mathcal{A}^2$
$A_6 \Rightarrow \exists\, c$ tel que $(a, c) \overset{*}{\sim} (c, b)$.
Donc $w(a) - w(c) = w(c) - w(b)$.
Or $A_9 \Rightarrow c \sim \frac{1}{2}\, a + \frac{1}{2}\, b$, d'où :
$\frac{1}{2}\, v(a) + \frac{1}{2}\, v(b) = v(c) \iff w(a) - w(c) = w(c) - w(b)$.
Soit $\mathcal{A}^*$ le sous-ensemble de $\mathcal{A}$ défini par :

$$x \in \mathcal{A}^* \text{ ssi } x = \frac{m}{2^n}\, h + \left(\frac{2^n - m}{2^n}\right) b,\ n \in N^*,\ 0 < m < 2^n \in N^*.$$

$\mathcal{A}^*$ est donc l'ensemble dénombrable des actions obtenues en "segmentant" l'"intervalle" h, b de façon régulière.
Si l'on pose $v(h) = w(h) = 1$ et $v(b) = w(b) = 0$, alors, $\forall\, x \in \mathcal{A}^*$, $v(x) = w(x)$. En effet :

$w(\frac{1}{2}\, h + \frac{1}{2}\, b) = \frac{1}{2}[w(h) - w(b)] = \frac{1}{2}$ et
$v(\frac{1}{2}\, h + \frac{1}{2}\, b) = \frac{1}{2}\, v(h) + \frac{1}{2}\, v(b) = \frac{1}{2}$ et ainsi de suite.

Si $x = \frac{m}{2^n} h + \frac{2^n - m}{2^n} b$, alors $v(x) = w(x) = \frac{m}{2^n}$.

Pour prouver que $w(x) = v(x) \quad \forall\, x \in \mathcal{U}/\mathcal{U}^*$, il faut démontrer le lemme suivant :

Lemme 2.12 : $\forall\, (a, b) \in \mathcal{U}$, $\forall\, (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in [0, 1]$ tel que $\alpha - \beta = \gamma - \delta$, alors $[(\alpha\, b + (1 - \alpha)\, a), (\beta\, b + (1 - \beta)\, a)] \overset{*}{\sim} [(\gamma\, b + (1 - \gamma)\, a), (\delta\, b + (1 - \delta)\, a)]$ en présence de A_1-A_{10}.

Démonstration : D'après A_9 :

$$(\beta\, b + (1 - \beta)\, a\, ;\, \tfrac{1}{2}[\beta\, b + (1 - \beta)\, a] + \tfrac{1}{2}[\gamma\, b + (1 - \gamma)\, a]) \overset{*}{\sim}$$
$$(\tfrac{1}{2}[\beta\, b + (1 - \beta)\, a] + \tfrac{1}{2}[\gamma\, b + (1 - \gamma)\, a]\, ;\, \gamma\, b + (1 - \gamma)\, a) \quad \text{et} \qquad (2.26)$$
$$(\alpha\, b + (1 - \alpha)\, a\, ;\, \tfrac{1}{2}[\alpha\, b + (1 - \alpha)\, a] + \tfrac{1}{2}[\delta\, b + (1 - \delta)\, a]) \overset{*}{\sim}$$
$$(\tfrac{1}{2}(\alpha\, b + (1 - \alpha)\, a) + \tfrac{1}{2}(\delta\, b + (1 - \delta)\, a)\, ;\, \delta\, b + (1 - \delta)\, a) \qquad (2.27)$$

Or :

$$\tfrac{1}{2}[\beta\, b + (1 - \beta)\, a] + \tfrac{1}{2}[\gamma\, b + (1 - \gamma)\, a] \sim \tfrac{1}{2}[\alpha\, b + (1 - \alpha)\, a] + \tfrac{1}{2}[\delta\, b + (1\ )\ \delta)\, a] \qquad (2.28)$$

En effet :

$$v[\tfrac{1}{2}[\beta\, b + (1 - \beta)\, a] + \tfrac{1}{2}[\gamma\, b + (1 - \gamma)\, a]] -$$
$$v[\tfrac{1}{2}[\alpha\, b + (1 - \alpha)\, a] + \tfrac{1}{2}[\delta\, b + (1 - \delta)\, a]] =$$
$$\tfrac{1}{2}\, v(b)\, [\beta + \gamma - \alpha - \delta] + \tfrac{1}{2}\, v(a)\, [\alpha + \delta - \beta - \gamma] = 0,$$

d'où (2.26) et (2.28) impliquent :

$$[\beta\, b + (1 - \beta)\, a,\, \tfrac{1}{2}[\alpha\, b + (1 - \alpha)\, a] + \tfrac{1}{2}[\delta\, b + (1 - \delta)\, a] \overset{*}{\sim}$$
$$[\tfrac{1}{2}[\alpha\, b + (1 - \alpha)\, a] + \tfrac{1}{2}[\delta\, b + (1 - \delta)\, a]\, ;\, \gamma\, b + (1 - \gamma)\, a] \qquad (2.29)$$

$$(2.27) \text{ et } (2.29) \Rightarrow [(\alpha\, b + (1 - \alpha)\, a)\, ;\, (\beta\, b + (1 - \beta)\, a] \overset{*}{\sim} [(\gamma\, b + (1 - \gamma)\, a)\, ;\, (\delta\, b + (1 - \delta)\, a].$$

C.Q.F.D.

Considérons $c \in \mathcal{U}/\mathcal{U}^*$. $A_1, A_2, A_3, A_{10} \Rightarrow$ (cf. théorème 8.3 de Fishburn (1970)) :

$\exists\, \alpha \in [0, 1]$ tel que $c \sim \alpha\, h + (1 - \alpha)\, b$, soit $(a, b) \in \mathcal{U}^{*2}$ tel que :

$\alpha - [v(a) - v(b)] \geq 0$ et $\alpha - [v(a) - v(b)] \leq 1$.

Un tel couple (a, b) existe toujours. En effet, posons :

$$v(a) = \frac{m_a}{2^{n_a}} = \mu_a \quad \text{et} \quad v(b) = \frac{m_b}{2^{n_b}} = \mu_B.$$

Il suffit alors de choisir m_a, m_b, n_a, n_b tels que :

$$\alpha - 1 \leq \frac{m_a}{2^{n_a}} - \frac{m_b}{2^{n_b}} \leq \alpha.$$

Soit $d \in \mathcal{U}$ tel que : $d = \beta \times h + (1 - \beta)\, b$ avec $\beta = \alpha - [\mu_a - \mu_B]$. Notons que a et b ont été choisis de manière à ce que β existe.

D'après le lemme 2.12 : $w(c) - w(d) = \mu_a - \mu_B$. On a $v(c) = \alpha$, $v(d) = \beta$, d'où $v(c) - v(d) = w(c) - w(d)$. Donc, $\forall\, a \in \mathcal{U}$, on pose $u(a) = v(a) = w(a)$ qui vérifie (2.24) et (2.25).

C.Q.F.D.

ANNEXE 4

DEMONSTRATION DU THEOREME 3.22

Théorème 3.22 : $(X, \succ)$ est un SPCρ ssi :

1) $(X, \succ)$ est un SPTNC.

2) $\forall\, l \in \mathbb{N} - \{0\}$ $\forall\, x^{(k)}, y^{(k)}, z^{(k)}, w^{(k)} \in X^4$ avec $x^{(k)} \succ y^{(k)}$ et $z^{(k)} \sim w^{(k)}$ et $k \in N$ et $1 \leq k \leq l$:

$$\sum_{k=1}^{l} N(x^{(k)}, y^{(k)}) + \rho \times \sum_{k=1}^{l} N(z^{(k)}, w^{(k)}) \neq$$

$$\rho \sum_{k=1}^{l} N(y^{(k)}, x^{(k)}) + \sum_{k=1}^{l} N(w^{(k)}, z^{(k)}) \qquad (3.7)$$

avec $N(x^{(k)}, y^{(k)}) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ où $\alpha_i = 1$ ssi $x_i^{(k)} \underset{i}{\succ} y_i^{(k)}$ et $\alpha_i = 0$ sinon.

Démonstration

1) Nécessité

a) On a, dans un SPCρ :

$$x \succ y \iff \sum_{i \in P(x,y)} p_i > \rho \times \sum_{i \in P(y,x)} p_i + \varepsilon \quad \text{avec } \rho \geq 1 \text{ et } \varepsilon > 0.$$

Tout SPCρ est donc un SPTNC de façon évidente.

b) D'après la définition 3.21, on a, $\forall\, k$:

$$\sum_{i \in P(x^{(k)},y^{(k)})} p_i > \rho \sum_{i \in P(y^{(k)},x^{(k)})} p_i + \varepsilon \quad \text{puisque } x^{(k)} \succ y^{(k)}.$$

Cette expression peut s'écrire :

$$N(x^{(k)}, y^{(k)}) \times P > \rho \times N(y^{(k)}, x^{(k)}) \times P + \varepsilon \qquad (3.8)$$

où P est le vecteur colonne $\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$.

De même, $z^{(k)} \sim w^{(k)}$ implique

$$N(w^{(k)}, z^{(k)}) \times P \leq \rho \times N(z^{(k)}, w^{(k)}) \times P + \varepsilon, \qquad (3.9)$$

d'où, en sommant (3.8) et (3.9) :

$$[N(x^{(k)}, y^{(k)}) + \rho\, N(z^{(k)}, w^{(k)})] \times P > [N(w^{(k)}, z^{(k)}) + \rho\, N(y^{(k)}, x^{(k)})] \times P.$$

Cette expression étant vraie par définition $\forall$ k, on peut donc sommer, pour k variant de 1 à 1, ce qui implique la condition (3.7). On a donc :

$(X, \succ)$ SPCρ $\Rightarrow$ $(X, \succ)$ SPTNC vérifiant (3.7).

2) <u>Suffisance</u>

$$(X, \succ) \text{ SPTNC} \overset{\text{Propriété (3.9)}}{\Longrightarrow} \emptyset \approx \emptyset \text{ et } \{i\} \gg \emptyset \quad \forall\, i \in \Omega.$$

Pour prouver la suffisance, il nous faut donc montrer l'existence d'un vecteur $P^* \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \\ \varepsilon \end{pmatrix}$ tel que, $\forall\, (x, y) \in X^2$:

$$x \succ y \Rightarrow [N(x, y) - \rho\, N(y, x)\ ;\ -1] \times P^* > 0 \qquad (3.10)$$

$$x \sim y \Rightarrow [\rho\, N(y, x) - N(x, y)\ ;\ +1] \times P^* \geq 0 \qquad (3.11\ a)$$

$$[\rho\, N(x, y) - N(y, x)\ ;\ +1] \times P^* \geq 0 \qquad (3.11\ b)$$

En effet, $\emptyset \approx \emptyset \Rightarrow \varepsilon \geq 0$ d'après (3.11 a). De plus, l'essentialité de chaque attribut $\Rightarrow \forall\, i \in \Omega, \exists\, (x_i, y_i) \in X_i^2$ tel que :

$$(x_i), (a_j)_{j \neq i}) \succ (y_i, (a_j)_{j \neq i}),$$

d'où, d'après (3.10), on a $p_i - \varepsilon > 0$, d'où, $\forall\, i \in \Omega$, $p_i > 0$.

$(X, \succ)$ étant un SPTNC, il suffit de plus de prouver l'existence de P^* pour l'ensemble $X^{*2} \subset X^2$ tel que :

$\forall\, [(x, y), (z, w)] \in X^{*2} \times X^{*2}$
$N(x, y) \neq N(z, w)$ ou $N(y, x) \neq N(w, z)$

puisque, sinon, $x \succ y \iff z \succ w$.

Le nombre d'attributs n étant fini, (X^{*2}) contient un nombre fini de couples d'actions, chaque couple correspondant à un élément de l'ensemble $S \subset \mathcal{P}(\Omega) \times \mathcal{P}(\Omega)$ (cf. Définition 3.7). Soit K le nombre d'éléments de X^{*2} (on a $K \leq (2^n)^{2^n}$). On peut donc réarranger les éléments de X^{*2} de façon à ce que :

$$X^{*2} = \{(u^{(1)}, v^{(1)}), (u^{(2)}, v^{(2)}), \ldots, (u^{(T-1)}, v^{(T-1)}), (u^{(T)}, v^{(T)})$$
$$(u^{(T+1)}, v^{(T+1)}), \ldots, (u^{(K)}, v^{(K)})\}$$

avec $\forall\, i \leq T : u^{(i)} \succ v^{(i)}$

et $\forall\, i > T : u^{(i)} \sim v^{(i)}$.

Chaque attribut étant essentiel, on sait que $n \leq T < K$. Nous nous sommes donc placé dans les conditions d'application du théorème de l'alternative (cf. Par exemple Mangasarian (1969), chapitre 2). Supposons en effet qu'il n'existe pas de vecteur P^* vérifiant, $\forall\, (x, y) \in X^{*2}$, (3.10), (3.11 a) et (3.11 b) ; alors, en vertu du théorème de Motzkin (cf. Vansnick (1983), p. 18 pour un énoncé de ce théorème), $\exists\, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_T, \mu_{T+1}, \mu_{T+2}, \ldots, \mu_K, \tau_{T+1}, \tau_{T+2}, \ldots, \tau_K \in R^+$ avec $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_T) \neq \underbrace{(0, 0, 0, \ldots, 0)}_{T}$ tels que :

$$\sum_{i=1}^{T} \lambda_i (N(u^{(i)}, v^{(i)}) - \rho\, N(v^{(i)}, u^{(i)}) \,;\, -1) + \sum_{i=T+1}^{K} \mu_i (\rho\, N(v^{(i)}, u^{(i)}) -$$
$$N(u^{(i)}, v^{(i)}) \,;\, 1) + \sum_{i=T+1}^{K} \tau_i \times (\rho\; N(u^{(i)}, v^{(i)}) - N(v^{(i)}, u^{(i)}) \,;\, +1)$$

$$= \underbrace{(0, 0, 0, \ldots, 0)}_{n+1} \quad \text{ou} \quad (u^{(i)}, v^{(i)}) \in X^{*2}$$ (et numéroté comme précédemment). (3.12)

Or, $N(u^{(i)}, v^{(i)})$ est un vecteur dont tous les éléments sont des entiers naturels $\forall\ (u^{(i)}, v^{(i)}) \in X^{*2}$. De plus, par définition, $\rho \in Q$. Les coefficients λ_i, μ_i et τ_i sont donc eux aussi rationnels. Il est donc possible de trouver des coefficients $\lambda_i^*, \mu_i^*, \tau_i^* \in \mathbb{N}$ avec au moins un $\lambda_i^* > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, T)$ tels que :

$$\sum_{i=1}^{T} \lambda_i^*(N(u^{(i)}, v^{(i)}) + \rho \times \sum_{i=T+1}^{K} (\mu_i^* N(v^{(i)}, u^{(i)}) + \tau_i^* N(u^{(i)}, v^{(i)}))$$

$$= \rho \sum_{i=1}^{T} \lambda_i^*(N(v^{(i)}, u^{(i)})) + \sum_{i=T+1}^{K} (\mu_i^* N(u^{(i)}, v^{(i)}) + \tau_i^* N(v^{(i)}, u^{(i)}))$$

et (3.12')

$$\sum_{i=1}^{T} \lambda_i^* = \sum_{i=T+1}^{K} (\mu_i^* + \tau_i^*) \qquad (3.12")$$

avec $(\lambda_1^*, \lambda_2^*, \ldots, \lambda_T^*) \neq \underbrace{(0, 0, \ldots, 0)}_{T \text{ fois}}$

Notons $\lambda_{i_1}^*, \lambda_{i_2}^*, \ldots, \lambda_{i_p}^*$ les λ_i^* tels que $\lambda_i^* > 0$,

$\mu_{j_1}^*, \mu_{j_2}^*, \ldots, \mu_{j_q}^*$ les μ_i^* tels que $\mu_i^* > 0$

et $\tau_{k_1}^*, \tau_{k_2}^*, \ldots, \tau_{k_r}^*$ les τ_i^* tels que $\tau_i^* > 0$.

On sait que $\lambda_{i_1}^*, \lambda_{i_2}^* + \ldots + \lambda_{i_p}^* > 0$. Rien ne s'oppose donc à ce que l'on prenne, dans (3.7) :

$$1 = \lambda_{j_1}^* + \lambda_{j_2}^* + \ldots + \lambda_{i_p}^*.$$

D'après (3.12"), on a aussi :

$$l = \mu^*_{j_1} + \mu^*_{j_2} + \ldots + \mu^*_{j_q} + \tau^*_{k_1} + \tau^*_{k_2} + \ldots + \tau^*_{k_r} .$$

Posons $\forall\, k \in \mathbb{N}$ avec $1 \le k \le l$:

$$x^{(k)} \text{ [resp. } y^{(k)}] = \begin{cases} u^{(i_1)} \text{ [resp. } v^{(i_1)}] & \text{si } 0 < k \le \lambda^*_{i_1} \\ u^{(i_2)} \text{ [resp. } v^{(i_2)}] & \text{si } \lambda^*_{i_1} < k \le \lambda^*_{i_1} + \lambda^*_{i_2} \\ u^{(i_3)} \text{ [resp. } v^{(i_3)}] & \text{si } \lambda^*_{i_1} + \lambda^*_{i_2} < k \le \lambda^*_{i_1} + \lambda^*_{i_2} + \lambda^*_{i_3} \\ \vdots & \\ u^{(i_p)} \text{ [resp. } v^{(i_p)}] & \text{si } \lambda^*_{i_1} + \ldots + \lambda^*_{i_{p-1}} < k \le \\ & \lambda^*_{i_1} + \ldots + \lambda^*_{i_{p-1}} + \lambda^*_{i_p} \end{cases}$$

et

$$z^{(k)} \text{ [resp. } w^{(k)}] = \begin{cases} v^{(j_1)} \text{ [resp. } u^{(j_1)}] & \text{si } 0 < k \le \mu^*_{j_1} \\ v^{(j_2)} \text{ [resp. } u^{(j_2)}] & \text{si } \mu^*_{j_1} < k \le \mu^*_{j_1} + \mu^*_{j_2} \\ \vdots & \\ v^{(j_q)} \text{ [resp. } u^{(j_q)}] & \text{si } \mu^*_{j_1} + \ldots + \mu^*_{j_{q-1}} < k \le \\ & \mu^*_{j_1} + \ldots + \mu^*_{j_{q-1}} + \mu^*_{j_q} \\ u^{(k_1)} \text{ [resp. } v^{(k_1)}] & \text{si } \mu^*_{j_1} + \ldots + \mu^*_{j_q} < k \le \\ & \mu^*_{j_1} + \ldots + \mu^*_{j_q} + \tau^*_{k_1} \\ u^{(k_2)} \text{ [resp. } v^{(k_2)}] & \text{si } \mu^*_{j_1} + \ldots + \mu^*_{j_q} + \tau^*_{k_1} < k \le \\ \vdots & \mu^*_{j_1} + \ldots + \mu^*_{j_q} + \tau^*_{k_1} + \tau^*_{k_2} \\ u^{(k_r)} \text{ [resp. } v^{(k_r)}] & \text{si } \mu^*_{j_1} + \ldots + \mu^*_{j_q} + \tau^*_{k_1} + \ldots + \\ & \tau^*_{k_{r-1}} < k \le \mu^*_{j_1} + \ldots + \mu^*_{j_q} + \\ & \tau^*_{k_1} + \ldots + \tau^*_{k_r} \end{cases}$$

D'après la numérotation des $(u^{(i)}, v^{(i)})$ adoptée dans X^{*2}, on peut donc écrire :

$x^{(k)} \succ y^{(k)} \quad \forall\ 1 \leq k \leq l$ et
$z^{(k)} \sim w^{(k)} \quad \forall\ 1 \leq k \leq l.$

On peut donc écrire, sachant (3.12') :

$$\sum_{k=1}^{l} N(x^{(k)}, y^{(k)}) + \rho \sum_{k=1}^{l} N(z^{(k)}, w^{(k)}) =$$

$$\rho \sum_{k=1}^{l} N(y^{(k)}, x^{(k)}) + \sum_{k=1}^{l} N(w^{(k)}, z^{(k)}).$$

On a donc prouvé que, si P^* n'existe pas, (3.7) est violée. Par contraposition, la suffisance est donc établie.

C.Q.F.D.

ANNEXE 5

DONNEES NUMERIQUES RELATIVES A L'ETUDE COMPARATIVE DU CHAPITRE IV

CARACTERISTIQUES DES CRITERES DANS LE MODELE U

TABLEAU I : Lois des variables aléatoires $X_i(S)$.

FIGURE I : Fonctions d'utilité partielles $u_i(x_i)$.

TABLEAU II : Valeurs des critères dans le modèle U
$g_i(s) = E[u_i(X_i(s))]$.

<u>TABLEAU I</u> : Lois des variables aléatoires $X_i(S)$

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9
SPF $X_1(S)$ (1)	0,057	0,04	0,025	0,048	0,044	0,023	0,052	0,011	0,018
1 000 saumons $Y(S)$ (1)	75	75	75	5,5	17	5	3	430	365
% $Z(S)$ (4)	8	8	8	15	15	15	15	1	1
$X_3(S)$ (3)	1-2 : 0,9 2-3 : 0,1	1-2 : 0,9 2-3 : 0,1	1-2 : 0,8 2-3 : 0,2	2-3 : 0,2 3-4 : 0,8	3-4 : 0,2 4-5 : 0,5 5-6 : 0,3	3-4 : 0,2 4-5 : 0,5 5-6 : 0,3	1-2 : 0,3 2-3 : 0,6 3-4 : 0,1	0-1 : 0,1 1-2 : 0,5 2-3 : 0,4	0-1 : 0,7 1-2 : 0,3
$X_4(S)$ (3)	1-2 : 0,2 2-3 : 0,65 3-4 : 0,15	1-2 : 0,25 2-3 : 0,55 3-4 : 0,1 4-5 : 0,1	1-2 : 0,3 2-3 : 0,45 3-4 : 0,15 4-5 : 0,1	2-3 : 0,2 3-4 : 0,5 4-5 : 0,3	1-2 : 0,2 2-3 : 0,45 3-4 : 0,2 4-5 : 0,15	2-3 : 0,1 3-4 : 0,55 4-5 : 0,3 5-6 : 0,05	2-3 : 0,2 3-4 : 0,5 4-5 : 0,2 5-6 : 0,1	2-3 : 0,1 3-4 : 0,4 4-5 : 0,4 5-6 : 0,1	1-2 : 0,05 2-3 : 0,6 3-4 : 0,2 4-5 : 0,15
Miles $X_5(S)$ (1)	1	1	7	6	12	1	0	0	0
10^6 \$/an $X_6(S)$ (2)	2,035	0	1,535	1,933	12,347	17,713	4,834	10,936	11,423

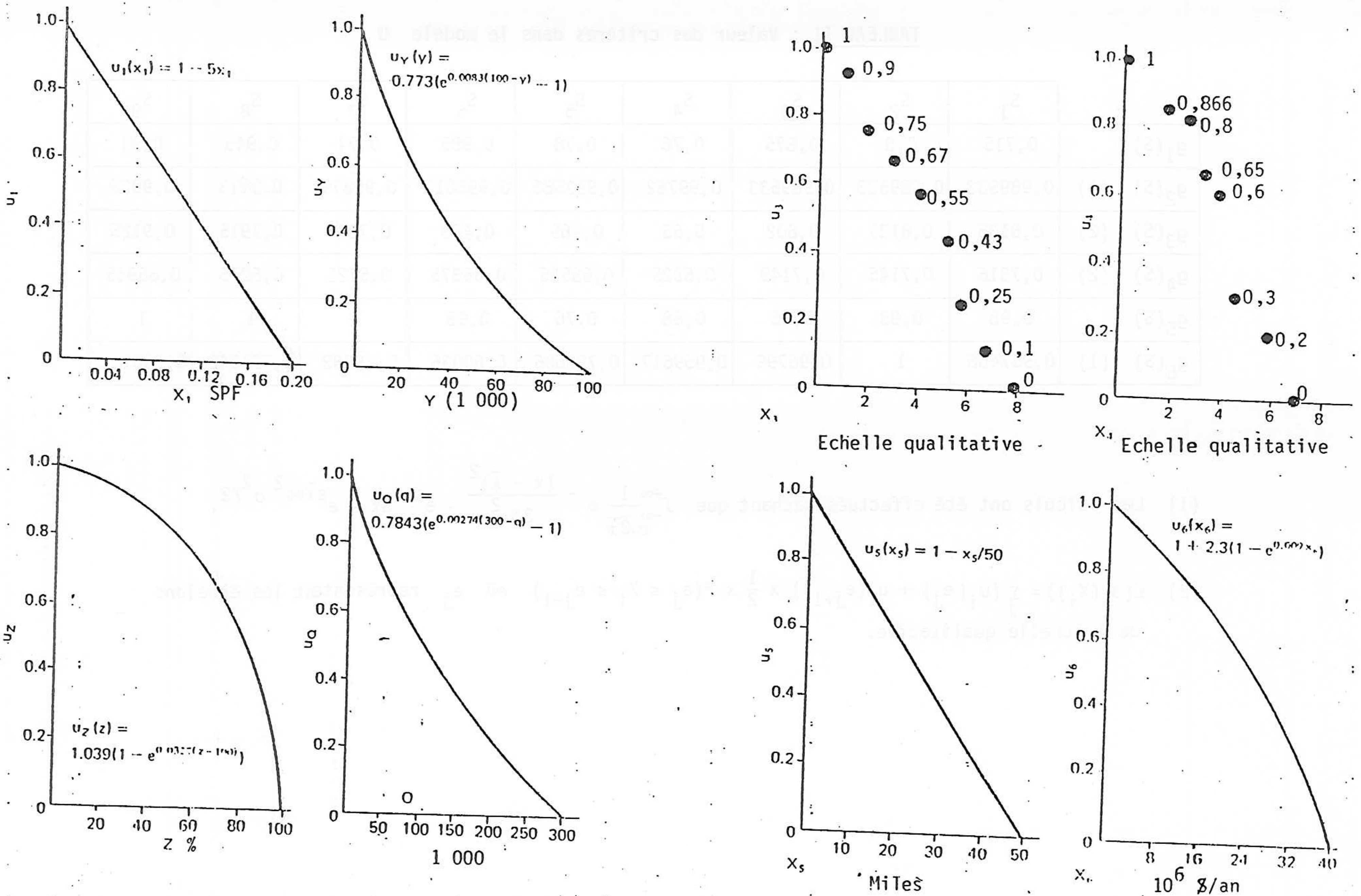
(1) Variable certaine.

(2) Loi normale $\mathcal{N}(\bar{x}_6(S), \bar{x}_6(S)/4)$. Les valeurs indiquées sont celles de $\bar{x}_6(S)$ et ne tiennent pas compte des coûts de protection antisismiques.

(3) On indique, pour ces échelles qualitatives, la probabilité p de tomber entre deux échelons consécutifs.

(4) Loi normale $\mathcal{N}(\bar{z}(S), \bar{z}(S)/2)$. Les valeurs indiquées sont celles de $\bar{z}(S)$.

FIGURE I : Fonctions d'utilités partielles $U_i(x_i)$



Remarque pour S_1 à S_7 : $U_2(X_2) = U_Z(z) + u_y(y) - u_z(z)\, u_y(y)$

S_8 à S_9 : $U_2(X_2) = 0{,}568 + 0{,}432\, u_Q(Q)$

<u>TABLEAU II</u> : Valeur des critères dans le modèle U

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9
$g_1(S)$	0,715	0,8	0,875	0,76	0,78	0,885	0,74	0,945	0,91
$g_2(S)$ (1)	0,989533	0,989533	0,989533	0,99782	0,993586	0,998013	0,99879	0,9913	0,9926
$g_3(S)$ (2)	0,8135	0,8135	0,802	0,63	0,469	0,469	0,7345	0,7915	0,9125
$g_4(S)$ (2)	0,7316	0,7145	0,7149	0,5925	0,68535	0,56375	0,5725	0,5275	0,66915
$g_5(S)$	0,98	0,98	0,86	0,88	0,76	0,98	1	1	1
$g_6(S)$ (1)	0,957466	1	0,96799	0,959617	0,728686	0,60035	0,89758	0,761342	0,750121

(1) Les calculs ont été effectués sachant que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}} \cdot e^{sx}\,dx = e^{s\bar{x}+s^2\sigma^2/2}$.

(2) $E(U_i(X_i)) = \sum_j (u_i(e_j) + u_i(e_{j+1})) \times \frac{1}{2} \times P(e_j \leq X_i \leq e_{j+1})$ où e_j représentent les échelons de l'échelle qualitative.

CARACTERISTIQUES DES CRITERES DANS LE MODELE S

TABLEAU I : Valeurs de $g_i(s)$ dans le modèle S.

TABLEAU II : Seuils de dispersion et de discrimination.

TABLEAU I : Valeurs des $g_i(s)$ dans le modèle S

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9
$g_1(s)$	0,057	0,04	0,025	0,048	0,044	0,023	0,052	0,011	0,018
$g_2''(s)$	6 000	6 000	6 000	825	2 250	750	450	4 300	3 650
$g_2'(s)$	21,91	21,91	21,91	11,12	19,56	10,61	8,21	6,55	6,04
$g_3(s)$	2	2	2	4	5	5	3	2	1
$g_4(s)$	3	3	3	4	3	4	4	4	3
$g_5(s)$	1	1	7	6	12	1	0	0	0
$g_6(s)$	2,035	0	1,535	1,933	12,347	17,713	4,834	10,936	11,423

Remarques

$g_i(s) = \bar{x}_i(s) \quad i = 1, 5$

$g_6(s) = \bar{x}_6(s)$

$g_2'(s) = \bar{z}(s)\ \sqrt{y(s)}$, $g_2''(s) = \bar{z}(s)\ .\ y(s)$

$g_3(s)$ et $g_4(s)$ correspondent à la médiane de $X_3(s)$ et $X_4(s)$. Cette médiane étant un intervalle entre deux échelons consécutifs, il a été procédé au codage suivant :

0-1	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7	7-8
1	2	3	4	5	6	7	8

La préférence décroît avec les valeurs pour tous les critères.

TABLEAU II : Seuils de dispersion et de discrimination

	Seuils de dispersion	Seuils d'indifférence (*)	Seuils de préférence (*)
g_1	$\pm \frac{10}{100} \cdot g_1(s)$	$0{,}1\ g_1(s)$	$\frac{2}{9}\ g_1(s)$
g_2 (2 formes)	$\pm \frac{50}{100} \cdot g_2(s)$	$0{,}5\ g_2(s)$	$2\ g_2(s)$
g_3	-	1	2
g_4	-	0	1
g_5	$\pm (1 + \frac{3}{100}\ g_5(s))$	$1 + 0{,}03\ g_5(s)$	$2{,}0618 + 0{,}06185\ g_5(s)$
g_6	$- 1 - \frac{10}{100}\ g_6(s)$ $+ 2 + \frac{50}{100}\ g_6(s)$	$1{,}111 + 0{,}111\ g_6(s)$	$3{,}333 + 0{,}666\ g_6(s)$

(*) Ces seuils sont des seuils inverses.

LA DETERMINATION DES INDICES D'IMPORTANCE

On a $R_{ij} = \dfrac{\partial g/\partial g_i}{\partial g/\partial g_j} = \dfrac{k_j\ (1 + k\ k_i\ u_i(x_i))}{k_i\ (1 + k\ k_j\ u_j(x_j))}$. La fonction d'utilité étant multiplicative, R_{ij} n'est pas constant. On peut toutefois trouver aisément la plage de variation possible de R_{ij} puisque $u_i(x_i)$ et $u_j(x_j)$ sont compris entre 0 et 1.

En utilisant les valeurs de k et des k_i de l'annexe 6 et sachant que $\mathrm{Max}(R_{ij}) = 1/\mathrm{Min}(R_{ji})$ et $\mathrm{Min}(R_{ij}) = 1/\mathrm{Max}(R_{ji})$, on a les plages de variations suivantes pour R_{ij} :

i \ j	1	2	3	4	5	6
1	1	1,5288 1,8584	27,4195 31,1658	3,3259 4,1294	5,95 6,8658	0,7786 1,0128
2		1	16,6971 18,0468	2,0253 2,2566	3,6232 4,0677	0,4741 0,5865
3			1	0,1207 0,1503	0,2160 0,2212	0,0282 0,0326
4				1	1,7288 1,7972	0,1290 0,2262
5					1	0,1283 0,1503
6						1

Soit k_i^s et k_j^s les indices d'importance respectifs des critères i et j. Nous avons considéré que :

$$R_{*ij} \leq \frac{k_i^s}{k_j^s} \leq R_{ij}^*$$

où R_{*ij} et R_{ij}^* sont respectivement les bornes inférieure et supérieure de R_{ij}. A chaque case au-dessus de la diagonale du tableau donnant les valeurs de R_{ij} correspond 2 contraintes sur les indices d'importance, soit au total 2 x 15 = 30 contraintes. On peut poser de façon non restrictive $p_6 = 1$ et en déduire des intervalles pour chacune des cinq autres valeurs. On a, par exemple, $R_{56}^* = 0{,}1503$ et $R_{*56} = 0{,}1283$, d'où $p_5 \in [0{,}1283 \; ; \; 0{,}1503]$.

Il est apparu empiriquement non restrictif de ne considérer que les contraintes exprimées par rapport au critère 6, soit au total 10 contraintes :

$p_5 \in [0{,}1283 \; ; \; 0{,}1503]$
$p_4 \in [0{,}1290 \; ; \; 0{,}2262]$
$p_3 \in [0{,}0282 \; ; \; 0{,}0326]$
$p_2 \in [0{,}4741 \; ; \; 0{,}5865]$
$p_1 \in [0{,}7786 \; ; \; 1{,}0128]$.

Compte-tenu de l'arbitraire de la méthode et de l'imprécision des valeurs numériques utilisées, nous avons choisi de retenir, à l'intérieur de ce domaine, 8 jeux d'indice d'importance les plus contrastés possible que l'on étudiera simultanément au cours de l'analyse de robustesse. p_6 étant fixé à 1, nous avons choisi de fixer p_3 à 0,03, ce critère étant d'importance très faible. Les 8 jeux de poids correspondent alors à toutes les combinaisons extrêmes bornes à bornes, respectant toutefois certaines considérations qualitatives présentes dans Keeney-Nair (1977) (le critère 6 est le plus important). On a donc les 8 jeux : $J_1, \ldots, J_8$:

J / Poids	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	J_6	J_7	J_8
P_1	0,8	0,8	0,9	0,9	0,8	0,8	0,9	0,9
P_2	0,45	0,6	0,45	0,6	0,45	0,6	0,45	0,6
P_3	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03
P_4	0,15	0,15	0,15	0,15	0,25	0,25	0,25	0,25
P_5	0,15	0,15	0,15	0,15	0,10	0,10	0,10	0,10
P_6	1	1	1	1	1	1	1	1

DONNEES DE L'ANALYSE DE ROBUSTESSE

Certaines des données intervenant dans le modèle S - seuils de véto, indices d'importance, seuils de discrimination - étant entachées d'une imprécision et d'un arbitraire importants dus, en partie, à notre méthode de travail mais aussi à la nature même de ces concepts, les résultats ne peuvent acquérir de probance qu'à l'issue d'une analyse de robustesse importante.

Nous détaillons dans cette annexe l'ensemble des paramètres que nous avons fait varier au cours de cette analyse (*).

1. Indices d'importance

L'annexe 7 fournit les 8 jeux retenus tout au long de l'étude.

2. Seuils de véto

Nous avons examiné :

- 2 seuils pour le critère 6 : $v_6(g_6(s)) = 1{,}7\ p_6(g_6(s))$ I
  $v_6(g_6(s)) = 2{,}5\ p_6(g_6(s))$ II

- 4 seuils pour le critère 2 : $v_2(g_2(s)) = 2{,}5 \times p_2(g_2(s))$ I
  (forme g_2'') $= 3 \times p_2(g_2(s))$ II
  $= 3{,}5 \times p_2(g_2(s))$ III
  $= 4 \times p_2(g_2(s))$ IV

(*) Nous avons de plus testé l'influence de certains paramètres (véto des critères 1 et 4) que nous avons choisi de ne pas mentionner ici, leur rôle étant quasi-nul. Le seuil $s(\lambda) = 0{,}3 - 0{,}15\ \lambda$ a été retenu pour l'algorithme de distillation tout au long de l'étude.

- 2 seuils pour le critère 3 : $v_3(g_3(s)) = 8$ (ne joue pas) I
$= 4$ II

3. Seuils de dispersion et de discrimination

Pour les deux critères (2 et 6) les plus imprécis, nous avons procédé à une analyse de sensibilité sur les seuils de dispersion (ce qui entraîne une variation corrélative des seuils de discrimination et du seuil de véto).

- Critère 2 : Trois seuils de dispersion ont été retenus :

$[g_2(s) - 0,5\ g_2(s)\ ;\ g_2(s) + 0,5\ g_2(s)]$ I
$\Rightarrow q_2(g_2(s)) = 0,5 \times g_2(s)$
$p_2(g_2(s)) = 2 \times g_2(s)$

$[g_2(s) - 0,6\ g_2(s)\ ;\ g_2(s) + 0,6\ g_2(s)]$ II
$\Rightarrow q_2(g_2(s)) = 0,6\ g_2(s)$
$p_2(g_2(s)) = 3\ g_2(s)$

$[g_2(s) - 0,4\ g_2(s)\ ;\ g_2(s) + 0,4\ g_2(s)]$ III
$\Rightarrow q_2(g_2(s)) = 0,4\ g_2(s)$
$p_2(g_2(s)) = 1,33\ g_2(s)$

- Critère 6 : Cinq seuils de dispersion ont été retenus :

$[\bar{x}_6(s) - 1 - 0,1\ \bar{x}_6(s)\ ;\ \bar{x}_6(s) + 2 + 0,5\ \bar{x}_6(s)]$ I
$[\bar{x}_6(s) - 2 - 0,1\ \bar{x}_6(s)\ ;\ \bar{x}_6(s) + 3 + 0,5\ \bar{x}_6(s)]$ II
$[\bar{x}_6(s) - 0,1\ \bar{x}_6(s)\ ;\ \bar{x}_6(s) + 1 + 0,5\ \bar{x}_6(s)]$ III
$[\bar{x}_6(s) - 1 - 0,1\ \bar{x}_6(s)\ ;\ \bar{x}_6(s) + 2 + 0,6\ \bar{x}_6(s)]$ IV
$[\bar{x}_6(s) - 1 - 0,1\ \bar{x}_6(s)\ ;\ \bar{x}_6(s) + 2 + 0,4\ \bar{x}_6(s)]$ V

d'où les seuils de discrimination :

	$q_6(g_6(s))$	$p_6(g_6(s))$
I	$1,111 + 0,111\ g_6(s)$	$3,333 + 0,666\ g_6(s)$
II	$2,22 + 0,111\ g_6(s)$	$5,555 + 0,666\ g_6(s)$
III	$0,111\ g_6(s)$	$1,111 + 0,666\ g_6(s)$
IV	$1,111 + 0,111\ g_6(s)$	$3,333 + 0,777\ g_6(s)$
V	$1,111 + 0,111\ g_6(s)$	$3,33\ + 0,555\ g_6(s)$

4. Forme du critère 2

$g''(2)$ I

$g'(2)$ II

Parmi toutes les possibilités mentionnées, nous en avons éliminé a priori certaines trop irréalistes. L'analyse de robustesse ayant été menée pas à pas, nous avons pu restreindre le nombre de combinaisons à prendre en compte, certains éléments n'ayant manifestement aucune influence (veto du critère 3). Finalement, 17 jeux de paramètres ont été retenus, soit combinés avec les 8 jeux de poids, 17 x 8 = 136 graphes. L'intégralité de ces graphes figure dans Roy et Bouyssou (1983), Annexe 10.

BIBLIOGRAPHIE

Allais M. (1953), Le comportement de l'homme rationnel devant le risque : Critique des postulats et axiomes de l'Ecole Américaine, Econometrica, Vol. 21, pp. 503-546.

Allais M. (1979), The so-called Allais paradox and rational decisions under uncertainty, in Allais M. et Hagen O. (Eds.), Expected utility hypotheses and the Allais paradox, Theory and Decision Library, D. Reidel Publishing Company.

Allais M. et Hagen O. (1979), Expected utility hypotheses and the Allais paradox, Theory and Decision Library, D. Reidel Publishing Company.

Amihud Y. (1979), Critical examination of the new foundation of utility, in Allais M. et Hagen O. (Eds.), Expected utility hypotheses and the Allais paradox, Theory and Decision Library, D. Reidel Publishing Company.

Armstrong W.E. (1948), Uncertainty and the utility functions, Economic Journal, Vol. 58, pp. 1-10.

Arrow K.J. (1951), Social choice and individual values, John Wiley and Sons, New York.

Arrow K.J. (1983), Behaviour under uncertainty and its implications for policy, in B. Stigum et F. Wenstøp (Eds.), Foundations of utility and risk theory with applications, D. Reidel Publishing Company.

Arrow K.J. et Hurwicz L. (1972), Optimality criterion for decision making under ignorance, in Carter C.F. et Ford J.L. (Eds.), Uncertainty and expectations in economics, Liverpool University Press.

Aumann R.J. (1962), Utility theory without the completeness axiom, Econometrica, Vol. 30, pp. 445-462 (a correction : Vol. 32, pp. 210-212).

Auscombe F.J. et Aumann R.J. (1963), A definition of subjective probability, Annals of Mathematical Statistics, Vol. 34, pp. 199-205.

Balch M. (1974), On recent developments in subjective expected utility, in Balch M., Mc Fadden D., Wu S. (Eds.), Essays on behaviour under uncertainty, North Holland Publishing Company, pp. 45-54.

Balch M. et Fishburn P.C. (1974), Expected utility for conditional primitives, in Balch M., Mc Fadden D., Wu S. (Eds.), Essays on behaviour under uncertainty, North Holland Publishing Company, pp. 57-69.

Bar-Hillel M. (1973), On the subjective probability of compound events, Organisational Behaviour and Human Performance, Vol. 9, pp. 396-406.

Bar-Hillel M. (1980), The base-rate fallacy in probability judgements, Acta Psychologica, Vol. 44, pp. 211-233.

Bell D.E. (1977), A decision analysis of objectives for a forest pest problem, in Bell D.E., Keeney R.L., Raiffa H. (Eds.), Conflicting objectives in decisions, IIASA, John Wiley and Sons.

Bell D.E. (1981), Components of risk aversion, in Brans J.P. (Ed.), Operational Research '81, North Holland Publishing Company.

Bell D.E. (1982), Regret in decision-making under uncertainty, Operations Research, Vol. 30, n° 5, pp. 961-981.

Berhaut H. (1981), Modélisation de préférences recueillies par paire d'attributs - Axiomatique, méthodes d'estimation, applications en marketing et en aide à la décision, Thèse de 3e cycle, Université de Paris-Dauphine.

Bertier P., de Montgolfier J. (1974), On multicriteria analysis : An application to a forest management problem, Revue METRA, Vol. XIII, n° 1.

Bisdorff R. (1981), Evaluations distributionnelles sur une échelle de préférence qualitative, Thèse de 3e cycle, Université de Paris-Dauphine.

Bouyssou D., Roy B. (1983), Descriptive and constructive decision-aid approaches, Communication présentée à EURO VI, Vienne, juillet.

Bouyssou D., Vansnick J.C. (1983), Systèmes de préférences totalement et partiellement non compensatoires, article en préparation.

Brans J.P., Vincke P. (1982), Une méthode de surclassement basée sur des intensités de préférence, Cahiers du CERO, Vol. 24, n° 2-3-4, pp. 173-184.

Buffet P., Grémy J.P., Marc M., Sussmann B. (1967), Peut-on choisir en tenant compte de critères multiples ? Une méthode (ELECTRE) et trois applications, Revue METRA, Vol. VI, n° 2, pp. 283-316.

Burros (1974), Axiomatic analysis of non transitive preference and indifference, Theory and Decision, Vol. 5, pp. 185-204.

Camacho A. (1983), Cardinal utility and decision making under uncertainty, in Stigum B. et Wenstøp F. (Eds.), Foundations of utility and risk theory with applications, D. Reidel Publishing Company.

Chen J. (1981), Rationalité et choix multicritère, Thèse d'Etat, Université de Caen.

Chew S.H. (1983), A generalization of the quasilinear mean with applications to measurement of income inequality and decision theory resolving the Allais paradox, Econometrica, Vol. 51, n° 4, pp. 1065-1092.

Churchman (1961), Decision and value theory, in Ackoff R.L. (Ed.), Progress in Operations Research, Vol. I, John Wiley and Sons, New York.

Cohen M., Jaffray J.Y. (1980), Rational decision making under complete ignorance, Econometrica, Vol. 48.

Cohen M., Jaffray J.Y., Said T. (1983), Comparaison expérimentale de comportements individuels dans le risque et dans l'incertain pour des gains et pour des pertes, Bulletin de Mathématiques Economiques, n° 18, octobre, pp. 17-77.

Conrad (1973), From statistical decision theory to practice : Some problems with the transition, Management Science, Vol. 19, n° 8, pp. 873-883.

McCord M. (1983), Empirical demonstration of utility dependence on the fundamental assessment parameters : Revised assessment methodology, Ph.D. Dissertation, M.I.T.

McCord M., de Neufville R. (1982), Fundamental deficiency of expected utility decision analysis, Working Paper, CNAM (une version révisée étant disponible dans Stigum B., Wenstøp F. (Eds.), Foundations of utility and risk theory, D. Reidel Publishing Company, sous le titre "Empirical demonstration that expected utility decision analysis is not operational").

Crama Y., Hansen P. (1983), An introduction to the ELECTRE research program, in Hansen P. (Ed.), Essays and surveys on MCDM, Springer-Verlag.

McCrimmon K. (1968), Descriptive and normative implications of the decision theory postulates, in Borch K., Mossin J. (Eds.), Risk and uncertainty, S. Martins Press.

McCrimmon K. (1973), An overview of multiple objective decision making, in Cochrane J.L., Zeleny M. (Eds.), Multiple criteria decision making, University of South-Carolina Press.

McCrimmon K., Larsson S. (1979), Utility theory : axioms versus "paradoxes", in Allais M. et Hagen O. (1979).

Davidson D., Suppes P., Siegel S. (1957), Decision making : An experimental approach, Stanford University Press.

Debreu G. (1966), Théorie de la valeur, Dunod, Paris.

Devletoglou N.C. (1971), Consumer behaviour - An experimentation in analytical economics, Harper and Row.

Domotor Z., Stelzer J. (1971), Representation of finetly additive semi-ordered qualitative probability structures, Journal of Mathematical Psychology, Vol. 8, pp. 145-168.

Dubois D., Prade H. (1979), Fuzzy sets and systems - Theory and applications, Academic Press.

Dubois D., Prade H. (1981), The use of fuzzy numbers in decision analysis, in Gupta M., Sanchez E. (Eds.), Fuzzy information and decision processes, North Holland Publishing Company.

Duckstein L., Gershon M., Mac Aniff R. (1981), Development of the Santa Cruz river basin : A comparison of multicriterion approaches, ESS Series, Report n° 51, University of Arizona (106 p.).

Ellsberg D. (1961), Risk, ambiguity and the Savage axioms, Quarterly Journal of Economics, Vol. 75, pp. 643-669.

Ellis H.M., Keeney R.L. (1972), A rational approach for government decisions concerning air pollution, in Drake A.N., Keeney R.L., Morse P.M. (Eds.), Analysis of public systems, MIT Press.

Eliashberg, Hauser (1981), Measurement errors for Von Neumann-Morgenstern utility functions, Working Paper, P. Sloan School of Management, September.

Faure R. (1979), Précis de Recherche Opérationnelle, Bordas.

Fishburn P.C. (1965), Independence in utility theory with whole product set, Operations Research, Vol. 13, pp. 28-45.

Fishburn P.C. (1968), Utility theory, Management Science, Vol. 14, pp. 335-375.

Fishburn P.C. (1968'), Semi-orders and risky choice, Journal of Mathematical Psychology, Vol. 5, pp. 358-361.

Fishburn P.C. (1969), Weak qualitative probability on finite sets, The Annals of Mathematical Statistics, Vol. 40, pp. 2118-2126.

Fishburn P.C. (1970), Utility theory for decision making, John Wiley and Sons, New York.

Fishburn P.C. (1970'), Utility theory with inexact preferences and degrees of preferences, Synthese, Vol. 21, pp. 204-222.

Fishburn P.C. (1971), A study of lexicographic expected utility, Management Science, Vol. 17, pp. 672-678.

Fishburn P.C. (1974), Lexicographic orders, utilities and decision rules : A survey, Management Science, Vol. 20, p. 1442-1471.

Fishburn P.C. (1976), Non compensatory preferences, Synthese, Vol. 33, pp. 393-403.

Fishburn P.C. (1976'), Utility independence on subsets of product sets, Operations Research, Vol. 24, pp. 245-255.

Fishburn P.C. (1977), A survey of multiattribute/multicriteria evaluation theories, in Multicriteria Problem Solving, Zionts S. (Ed.), Springer-Verlag, pp. 181-224.

Fishburn P.C. (1977'), Multiattribute utilities in expected utility theory, in Bell D.E., Keeney R.L., Raiffa H. (Eds.), Conflicting objectives in decision, John Wiley and Sons, New York.

Fishburn P.C. (1979), On the nature of expected utility, In Allais, Hagen (1979).

Fishburn P.C. (1981), Subjective expected utility : A review of normative theories, Theory and Decision, Vol. 13, pp. 139-199.

Fishburn P.C. (1982), The foundations of expected utility, D. Reidel Publishing Company.

Fishburn P.C. (1982'), Non transitive measurable utility, Journal of Mathematical Psychology, Vol. 26, pp. 31-67.

Fishburn P.C. (1983), Transitive measurable utility, Journal of Economic Theory, Vol. 31, pp. 293-317.

Fishburn P.C., Roberts F.S. (1978), Mixture axioms in linear and multilinear utility theories, Theory and Decision, Vol. 9, pp. 161-171.

Fishburn P.C., Vickson (1978), Theoretical foundations of stochastic dominance, in Whitmore G.A., Findlay M.C. (Eds.), Stochastic dominance, Lexington Books.

Fischhoff B. (1980), Clinical decision analysis, Operations Research, Vol. 28, n° 1.

Fischhoff B., Goiten B., Shapira Z. (1982), The experienced utility of expected utility approaches, in Feather N. (Ed.), Expectations and actions : Expectancy value models in psychology, L. Erlbaum.

Fisher G.M., Von Winterfeld D. (1975), Multiattribute utility theory - Models and assessment procedures, in Wendt D., Vleck C. (Eds.), Utility, probability and decision making, D. Reidel Publishing Company.

Fourgeaud C., Lenclud B., Sentis P. (1968), Critère de choix en avenir partiellement incertain, RIRO, n° 14.

Freeling A.N.S. (1980), Fuzzy sets and decision analysis, IEEE Transactions onSMC, Vol. SMC-10, pp. 341-354.

Fung C.W., Fu S. (1974), An axiomatic approach to rational decision making in a fuzzy environment, in Zadeh L.A., Fu K.S., Tanaka K., Shimura M. (Eds.), Fuzzy sets and their application to cognitive and decision processes, Academic Press.

Goumas A. (1983), Etude comparative entre deux méthodes d'aide à la décision : UTA et ELECTRE III, Mémoire de DEA 103, Université de Paris-Dauphine.

Grether D.M., Plott C.R. (1979), Economic theory of choice and the preference reversal phenomenon, American Economic Review, Vol. 69, pp. 623-638.

Grossman S., Hart O. (1980), Take-over bids, the free-rider problem and the theory of the corporation, Bell Journal of Economics, Spring, pp. 42-64.

Handa J. (1977), Risk, probability and a new theory of cardinal utility, Journal of Political Economy, Vol. 85, pp. 97-122.

Hausner M. (1954), Multidimensional utilities, in Thrall R.M., Coombs C.H., Davies R.L. (Eds.), Decisions Processes, John Wiley and Sons, New York.

Hershey J.C., Kurenther H., Schoemaker P. (1982), Sources of bias in assessment procedures for utility functions, Management Science, Vol. 28, pp. 936-954.

Hershey J.C., Schoemaker P. (1980a), Prospect theory's reflection hypothesis : A critical examination, Organisational Behaviour and Human Performance, Vol. 25, pp. 395-418.

Hershey J.C., Schoemaker P. (1980b), Risk taking and problem context in the domain of losses : An expected utility analysis, Journal of Risk and Insurance, Vol. 47, pp. 111-132.

Herstein I.N., Milnor J. (1953), An axiomatic approach to measurable utility, Econometrica, Vol. 21, pp. 291-297.

Hirsch G., Jacquet-Lagrèze E., Marchet J.C. (1978), Description d'un processus de décision - II : Illustration : Le cas de la raffinerie de Brest, Cahier du LAMSADE n° 17, Université de Paris-Dauphine.

Howard R. (1966), Decision analysis : Applied decision theory, in Proceedings of the Fourth International Conference on Operational Research, John Wiley and Sons, pp. 55-71.

Howard R. (1980), An assessment of decision analysis, Operations Research, Vol. 28, n° 1, pp. 4-27.

Huber O. (1974), An axiomatic system for multidimentional preferences, Theory and Decision, Vol. 5, pp. 161-184.

Huber O. (1979), Non transitive multidimensional preferences : Theoretical analysis of a model, Theory and Decision, Vol. 10, pp. 147-165.

Hugonnard J.C., Roy B. (1982), Ranking of suburban line extension projects for the Paris metro system by a multicriteria method, Transportation Research, Vol. 16A, pp. 301-312.

Hull J.C., Moore P.G., Thomas H. (1973), Utility and its measurement, Journal of the Royal Statistical Society, Series A, Vol. 136, Part 2, pp. 226-247.

Hwang C.L., Masud A.S. (1979), Multiobjective decision making - Methods and applications, Springer Verlag, Berlin.

Indjehagopian J.P., Thiétard R.A. (1976), Un outil pour l'action : l'Analyse de la décision, Revue Française de Gestion, janvier-février 1976, pp. 53-69.

Jacquet-Lagrèze E. (1975a), La modélisation des préférences - Préordres, quasi-ordres et relations floues, Thèse de 3e cycle, Université de Paris V.

Jacquet-Lagrèze E. (1975b), How we can use the notion of semi-orders to build outranking relations in multicriteria decision making, in Wendt D., Vled C., Utility, probability and human decision making, D. Reidel Publishing Company.

Jacquet-Lagrèze E. (1977), Modelling preferences among distributions using fuzzy relation, in Jungermann H., de Zeeuw G. (Eds.), Decision making and change in human affairs, D. Reidel Publishing Company.

Jacquet-Lagrèze E. (1981), Systèmes de décision et acteurs multiples - Contribution à une théorie de l'action pour les sciences des organisations, Thèse d'Etat, Université de Paris-Dauphine.

Jacquet-Lagrèze E., Marchet J.C. (1978), Description d'un processus de décision - Extension d'une station d'épuration des eaux usées, Cahier du LAMSADE n° 21, Université de Paris-Dauphine;

Jacquet-Lagrèze E., Roy B. (1980), Aide à la décision multicritère et systèmes relationnels de préférences, in Batteau P., Jacquet-Lagrèze E., Monjardet B. (Eds.), Analyse et agrégation des préférences, Economica, Paris.

Jacquet-Lagrèze E., Roy B., Moscarola J., Hirsch G. (1978), Description d'un processus de décision - I : Quelques concepts, Cahier du LAMSADE n° 13, Université de Paris-Dauphine.

Jacquet-Lagrèze E., Siskos J. (1982), Assessing a set of additive utility functions : The UTA method, EJOR, Vol. 10, pp. 151-164.

Jaffray J.Y., Cohen M. (1982), Experimental results on decision making under uncertainty, Methods of Operations Research, Vol. 44, pp. 275-289.

Jensen M., Meckling G. (1976), Theory of the firm - Managerial behaviour, agency costs, and ownership structure, Journal of Financial Economics, Vol. 3, pp. 305-360.

Jensen N.E. (1967), An introduction to Bernouillan utility theory, I : Utility functions, II : Interpretation and application - A critical survey, Swedish Journal of Economics, Vol. 69.

Kahneman D., Slovic P., Tversky A. (1981) (Eds.), Judgement under uncertainty - Heuristics and biases, Cambridge University Press;

Kahneman D., Tversky A. (1972), Subjective probability : A judgement of representativeness, Cognitive Psychology, Vol. 3, pp. 430-454.

Kahneman D., Tversky A. (1979), Prospect theory : An analysis of decisions under risk, Econometrica, Vol. 47, pp. 263-291.

Kamarkar V.J. (1978), Subjectively weighted utility : A descriptive extension of expected utility theory, Organisational Behaviour and Human Performance, Vol. 21, pp. 61-72.

Kaufmann A. (1977), Introduction à la théorie des sous-ensembles flous, 4 tomes, Masson, Paris.

Keeney R.L. (1974), Multiplicative utility functions, Operations Research, Vol. 22, pp. 22-34.

Keeney R.L. (1975), Examining corporate policy using multiattribute utility analysis, Sloan Management Review, Vol. 17, pp. 63-76.

Keeney R.L. (1976), A utility function for examining policy affecting salmon in the Skeena river, IIASA, RM n° 76-5.

Keeney R.L. (1977), The art of assessing multiattribute utility functions, Organisational Behaviour and Human Performance, Vol. 19, pp. 267-310.

Keeney R.L. (1979), The evaluation of proposed storage sites, Operations Research, Vol. 27, pp. 48-64.

Keeney R.L. (1980), Siting energy facilities, Academic Press.

Keeney R.L. (1982), Decision analysis : An overview, Operations Research, Vol. 30, pp. 803-838.

Keeney R.L., Nair K. (1977), Selecting nuclear power plant sites on the Pacific Northwest using decision analysis, in Bell D.E., Keeney R.L., Raiffa H. (Eds.), Conflicting Objectives in Decisions, John Wiley and Sons.

Keeney R.L., Raiffa H. (1976), Decisions with multiple objectives - Preferences and value trade-offs, John Wiley and Sons.

Keeney R.L., Robillard G. (1977), Assessing and evaluating environmental impacts at proposed nuclear power plant sites, Journal of Environmental Economics and Management, Vol. 14, pp. 153-166.

Keeney R.L., Wood E.F., David L., Csontos K. (1976), Evaluating Tisza river basin development plans using multiattribute utility theory, IIASA, CP n° 76-3, March (24 p.).

Kikert W. (1978), Fuzzy theories on decision making, M. Nijoff.

Kmietowicz, Pearman (1981), Decision theory and incomplete knowledge, Gower.

Kmietowicz, Pearman (1982), Decision theory and strict ranking of probabilities, EJOR, Vol. 9, n° 4.

Krantz D.H., Luce R.D., Suppes P., Tversky A. (1971), Foundations of measurement, Vol. I, Academic Press.

Krzysztofowicz R. (1983a), Strength of preference and risk attitude in utility measurement, Organizational Behaviour and Human Performance, Vol. 31, pp. 88-113.

Krzysztofowicz R. (1983 b), Risk attitude hypotheses of utility theory, in B. Stigum et F. Wenstøp (Eds.), Foundations of utility and risk theory with applications, D. Reidel Publishing Company.

Kyburg H.E., Smokler H.E. (1964) (Eds.), Studies in subjective probabilities, John Wiley and Sons.

Lakatos I. (1974), Proofs and refutations, Cambridge University Press.

Lebrun E. (1981), Construction d'un pseudo-critère, Mémoire de DEA 103, Université de Paris-Dauphine.

Le François A. (1959), Approximations expérimentales et numériques, Editions de la Revue d'Optique, Paris.

Lichtenstein S., Slovic P. (1971), Reversals of preferences between bids and choices in gambling decisions, Journal of Experimental Psychology, Vol. 88, pp. 46-55.

Lichteinstein S., Slovic P. (1973), Responde-induced reversals of preferences in gambling : An extended replication in Las Vegas, Journal of Experimental Psychology, Vol. 101, pp. 16-20.

Lichtenstein S., Slovic P. (1983), Preference reversals : A broader perspective, American Economic Review, Vol. 73, n° 4, pp. 596-605.

Lichtenstein S., Fischhoff B., Philips L.D. (1981), Calibration of probabilities - The state-of-the-art to 1980, in Kahneman D., Slovic P., Tversky A. (Eds.), Judgement under uncertainty : Heuristics and biases, Cambridge University Press.

Lindmann H.R. (1971), Inconsistent preferences among gambles, Journal of Experimental Psychology, Vol. 89, pp. 390-397.

Loomes G., Sugden R. (1982), Regret theory : An alternative theory of rational choice under uncertainty, The Economic Journal, Vol. 92, pp. 805-824.

Loomes G., Sugden R. (1983), A rationale for preference reversal, American Economic Review, Vol. 73, n° 3, pp. 428-432.

Luce R.D. (1956), Semiorders and a theory of utility discrimination, Econometrica, Vol. 24, pp. 178-191.

Luce R.D., Krantz D.H. (1971), Conditional expected utility, Econometrica, Vol. 39, pp. 253-271.

Luce R.D., Suppes P. (1965), Preference, utility and subjective probability, in Luce R.D., Bush R.R., Galanter E. (Eds.), Handbook of Mathematical Psychology, Vol. III, John Wiley and Sons.

Machina M. (1982), "Expected utility" without the independence axiom, Econometrica, Vol. 50, n° 2.

Mangasarian O. (1969), Non linear programming, McGraw Hill.

Marchet J.C. (1980), Décisions en matière d'environnement - Etudes et critères d'évaluation, Thèse de 3e cycle, Université de Paris-Dauphine.

Marschak J. (1950), Rational behaviour, uncertain prospects and measurable utility, Econometrica, Vol. 18, pp. 111-141.

Miller G.A. (1956), The magical number Seven plus or minus Two - Some limits on our capacity for processing information, The Psychological Review, Vol. 63, pp. 81-97.

Le Moigne J.L. (1982), Les sciences de la décision : Sciences d'analyse ou sciences du génie ?, Working Paper, GRASCE.

Monjardet B. (1978), Axiomatiques et propriétés des quasi-ordres, Mathématiques et Sciences Humaines, n° 63, pp. 51-83.

Morgenstern O. (1970), On the accuracy of economic observations ; traduction française : Précision et incertitude des données économiques, Collection Cournot, Dunod, 1972.

Morgenstern O. (1979), Some reflections on utility, In Allais et Hagen (1979).

Morrison D.G. (1967), On the consistency of preference in the Allais paradox, Behavioural Science, Vol. 12, pp. 373-383.

Moscarola J. (1977), Aide à la décision en présence de critères multiples fondée sur une procédure trichotomique - Méthodologie et application, Thèse de 3e cycle, Université de Paris-Dauphine.

Mosteller F., Nogee N. (1951), An experimental measurement of utility, Journal of Political Economy, Vol. 59, pp. 371-404.

Munera H.A., de Neufville R. (1983), A decision analysis model when the substitution principle is not acceptable, in B. Stigum et F. Wenstøp (Eds.), Foundations of utility and risk theory, D. Reidel Publishing Company.

de Neufville R., Keeney R.L. (1972), The use of decision analysis in airport development for Mexico City, in Drake A.W., Keeney R.L., Morse P.M. (Eds.), Analysis of public systems, MIT Press.

von Neumann J., Morgenstern O. (1947), Theory of games and economic behaviour, 2nd ed., Princeton University Press, New Jersey.

Ney G. (1963), Travaux de laboratoire de mesures électriques - Théorie et pratique des erreurs expérimentales, Polycopié, Ecole Supérieure d'Electricité.

Norese M.F., Ostanello-Borreani A. (1979), Una specimentazione del metodo ELECTRE III, Libreria Editria Universitaria Levrotto et Bella.

Payne J.W., Langhhum D.J., Crum R. (1980), Translation of gambles and aspiration level effects in risky choice behaviour, Management Science, Vol. 26, pp. 1039-1060.

Payne J.W., Laughhumm D.J., Crum R. (1981), Further tests of aspiration level effects in risky choice behaviour, Management Science, Vol. 27, pp. 953-958.

Perreault Y.G. (1973), La recherche opérationnelle : Technique décisionnelle, Gaëtan Morin et Associés, Québec.

Phillips L.D.,Wright G.N. (1977), Cultural differences in viewing uncertainty and assessing probabilities, in Jungermann, de Zeeuw (Eds.), Decision making and change in human affairs, D. Reidel Publishing Company.

Plott C.R., Little J.T., Parks R.P. (1975), Individual choice when objects have "ordinal" properties, Review of Economic Studies, Vol. 42, pp. 403-413.

Pommerhne W., Schneider F., Zweifel P. (1982), Economic theory of choice and the preference reversal phenomenon : A reexamination, American Economic Review, Vol. 72, pp. 569-574.

Ponsard C. (1974), L'imprécision et son traitement en analyse économique, Document IME n° 4, Université de Dijon.

Popper K. (1973) (traduction française), La logique de la découverte scientifique, Petite Bibliothèque Scientifique, Payot.

Pratt J.W. (1964), Risk aversion in the small and in the large, Econometrica, Vol. 32, pp. 122-136.

Pratt J.W., Raiffa H., Schlaifer R. (1964), The foundations of decision under uncertainty : An elementary exposition, Journal of the Americal Statistical Association, Vol. 59, pp. 353-375.

Pratt J.W., Raiffa H., Schlaifer R. (1965), Introduction to statistical decision theory, McGraw Hill.

Raiffa H. (1968), Decision analysis, Addison Wesley.

Raiffa H. (1969), Preference for multiattributed alternatives, Rand RM 5868, DOT/RC.

Raiffa H., Schlaifer R. (1961), Applied statistical decision theory, Harvard Business School, Boston.

Rameau C. (1977), La prise de décision : Acte de management, Editions d'Organisation.

Ramsey F.P. (1931), Truth and probability, in The foundations of mathematics and other logical essays, Harcourt Brace, également dans Kyburg and Smokler (1964).

Rapoport A. (1956), Strategy and conscience, Harper and Row.

Reilly R. (1982), Preference reversal : Further evidence and some suggested modifications in experimental design, American Economic Review, Vol. 72, pp. 576-584.

Rizzi M. (1982), Une nouvelle méthode d'aide à la décision en avenir incertain, RAIRO Recherche Opérationnelle, Vol. 16, pp. 391-405.

Rizzi M. (1983), Plausibility relations and multiple expected utilities, à paraître dans EJOR.

Roberts F.S. (1979), Measurement theory with applications to decision making, utility, and the social science, Addison Wesley.

Rochat J.C. (1980), Mathématiques pour la gestion de l'environnement, Birkhaüser, Bâle.

Roubens M., Vincke P. (1983), Linear fuzzy graphs, Fuzzy Sets and Systems, Vol. 10, n° 1.

Roy B. (1968), Classement et choix en présence de points de vue multiples (La méthode ELECTRE), RIRO, n° 8.

Roy B. (1969-1970), Algèbre moderne et théorie des graphes orientées vers les sciences économiques et sociales, 2 tomes, Dunod.

Roy B. (1972), Décisions avec critères multiples - Problèmes et méthodes, Revue METRA, Vol. XI, n° 1.

Roy B. (1974), Critères multiples et modélisation des préférences : L'apport des relations de surclassement, Revue d'Economie Politique, Vol. 84, n° 1.

Roy B. (1975), Vers une méthodologie générale d'aide à la décision, Revue METRA, Vol. XIV, n° 3.

Roy B. (1977a) : Critique et dépassement de la problématique de l'optimisation, Cahiers SEMA, n° 1.

Roy B. (1977b), Partial preference analysis and decision-aid : The fuzzy outranking relation concept, in Bell D.E., Keeney R.L., Raiffa H. (Eds.), Conflicting objectives in decisions, John Wiley and Sons, New York.

Roy B. (1978), ELECTRE III : Un algorithme de classement fondé sur une représentation floue des préférences en présence de critères multiples, Cahiers du CERO, Vol. 20, n° 1, pp. 3-24.

Roy B. (1981), The optimisation problem formulation : Criticism and overstepping, Journal of the Operational Research Society, Vol. 32, pp. 427-326.

Roy B. (1979-1983), L'aide à la décision : Critères multiples et optimisation pour choisir, trier, ranger, livre en préparation.

Roy B. (1983), Quelques remarques à propos du concept d'indépendance en aide à la décision multicritère, Cahier du LAMSADE n° 51, Université de Paris-Dauphine.

Roy B., Bertier P. (1971), La méthode ELECTRE II (Une méthode de classement en présence de critères multiples), Note de travail n° 142, Direction Scientifique, SEMA.

Roy B., Bouyssou D. (1983), Comparaison, sur un cas précis, de deux modèles concurrents d'aide à la décision, Document du LAMSADE n° 22, Université de Paris-Dauphine.

Roy B., Hugonnard J.C. (1982), Classement des prolongements de lignes de métro en banlieue parisienne (Présentation d'une méthode multicritère originale), Cahiers du CERO, Vol. 24, p. 153-171.

Roy B., Présent M., Silhol D. (1983), Programmation de la rénovation des stations du métro parisien : Un cas d'application de la méthode ELECTRE III Document du LAMSADE n° 24, Université de Paris-Dauphine.

Roy B., Vincke P. (1980), Pseudo-critères et systèmes relationnels de préférence : Nouveaux concepts et nouveaux résultats en vue de l'aide à la décision, Cahier du LAMSADE n° 28, Université de Paris-Dauphine.

Roy B., Vincke P. (1982), Multicriteria analysis : Survey and new directions, EJOR, Vol. 8, pp. 207-218.

Roy B., Vincke P., Brans J.P. (1975), Aide à la décision multicritère, Revue Belge de Statistique, d'Informatique et de Recherche Opérationnelle, Vol. 15, n° 4.

Saaty T.L. (1980), The analytical hierarchy process, McGraw Hill.

Sakarovitch M. (1978), La recherche opérationnelle malgré tout, AFCE, Introduction au débat du 13 décembre 1977, Note interne.

Salomon R. (1983), Evaluation technico-économique d'options destinées à lutter contre un certain type de pollution, Mémoire de DEA 103, Université de Paris-Dauphine.

Siskos J. (1980), Comment modéliser les préférences au moyen de fonctions d'utilité additives, RAIRO Recherche Opérationnelle, Vol. 14, pp. 53-82.

Siskos J. (1983), Le traitement des dégénérescences en programmation linéaire continue, Cahier du LAMSADE n° 43, Université de Paris-Dauphine.

Siskos J., Hubert Ph. (1983), Multicriteria analysis of the impacts of energy alternatives : A survey and a new comparative approach, EJOR, Vol. 13, n° 3, pp. 278-299.

Siskos J., Lochard J., Lombard J. (1983), A multicriteria decision making methodology under fuzziness, à paraître dans Zimmermann H.J., Zadeh L.A., Gaines B.R. (Eds.), Decision analysis and fuzzy sets, TIMS Studies in Management Science, North-Holland Publishing Company.

Siskos J., Winkels H.M., Wäscher G. (1983), A bibliography on outranking approaches, Cahier du LAMSADE n° 45, Université de Paris-Dauphine.

Skala H.J. (1975), Non archimedian utility theory, D. Reidel Publishing Company.

Skalka J.M. (1983), Manuel d'utilisation du programme ELECTRE I, Document de Travail, LAMSADE, Université de Paris-Dauphine.

Skakla J.M., Bouyssou D., Bernabeu Y.A. (1983), ELECTRE III et IV - Aspects méthodologiques et guide d'utilisation, Document du LAMSADE n° 25, Université de Paris-Dauphine.

Slovic P., Fischhoff B., Lichtenstein S. (1982), Response mode and information processing effects in risk assessment, in Hogarth R. (Ed.), New directions for methodology of social and behavioural sciences - Question framing and response consistency, Jossey-Bass.

Slovic P., Tversky A. (1974), Who accepts Savage's axioms ?, Behavioural Sciences, Vol. 19, pp. 368-373.

Tversky A., Kahneman D. (1980), Causal schemes in judgements under uncertainty, in Fishbein M. (Ed.), Progress in social psychology, Hillsdale, L. Erlbaum, pp. 49-72.

Tversky A., Kahneman D. (1981), The framing of decisions and the psychology of choice, Science, Vol. 211, pp. 542-573 ; en français dans Innovation, n° 154, pp. 16-20 (version abrégée).

Vansnick J.C. (1979), Une nouvelle approche des problèmes de décision - L'aide à la décision, Document de Travail, Université de l'Etat à Mons.

Vansnick J.C. (1982), TACTIC : Une méthode de surclassement permettant de traiter des données incertaines, Communication au EURO Working Group on Multiple Criteria Decision Aid, Bâle.

Vansnick J.C. (1983), Intercriteria information in multiple criteria decision making, à paraître dans EJOR.

Vansnick J.C. (1984), Communication personnelle à propos d'un article en préparation sur les différences de préférences sur un ensemble de mélanges.

Vedder J.N. (1973), Multiattribute decision making under uncertainty using bounded intervals, in Cochrane J.L., Zeleny M. (Eds.), Multiple criteria decision making, University of South-Carolina Press.

Vincke P. (1976), Concept de quasi-ordre généralisé et théorèmes de représentation, Thèse présentée en vue de l'obtention du grade de Docteur ès-Sciences, Université Libre de Bruxelles.

Vincke P. (1977a), Quasi-ordres généralisés et modélisation des préférences, Cahier du LAMSADE n° 9, Université de Paris-Dauphine.

Vincke P. (1977b), Vers une généralisation des modèles de références utilisés en actuariat, Mémoire présenté en vue de l'obtention du grade de Licencié en Sciences Actuariales, Université Libre de Bruxelles.

Wright G.W., Phillips L.D. (1983), Individual differences in probabilistic thinking, in Sjöberg L., Tyszka T., Wise J.A. (Eds.), Human Decision Making, Doxa.

Yager R.R. (1977), Multiobjective decision making using fuzzy sets, International Journal of Man Machine Studies, Vol. 9, pp. 375-382.

Zagorski M.A. (1975), Risky decision : Attention effects or masking effects ?, Acta Psychologica, Vol. 39, pp. 487-494.

Zagorski M.A. (1981), Risky decision - Attention mode and path dependency as a function of response mode, Acta Psychologica, Vol. 49, pp. 171-183.

Zeleny M. (1982), Multiple criteria decision making, Mc-Graw Hill.

Zimmermann H.J. (1980), Testability and the meaning of mathematical models in social sciences, Mathematical Modelling, Vol. 1, pp. 123-139.

Vu, le Président

M...............

Vu, les Suffragants

MM.................

Vu et permis d'imprimer,

Le Président de l'Université Paris-Dauphine