$\forall$ a, b $\in$ A, $[q_g(g(a)) - q_g(g(b))]/[g(a) - g(b)] \geq -1$ et $[p_g(g(a)) - p_g(g(b))]/[g(a)-g(b)] \geq -1$ et telles que, $\forall$ a, a' $\in$ A :

$$g(a') \geq g(a) \Rightarrow \begin{cases} a' \, I_g \, a \text{ si } g(a') - g(a) \leq q_g(g(a)) \\ a' \, Q_g \, a \text{ si } q_g(g(a)) < g(a') - g(a) \leq p_g(g(a)) \\ a' \, P_g \, a \text{ si } p_g(g(a)) < g(a') - g(a). \end{cases}$$

SPECTRE DES CONSÉQUENCES : L'ensemble υ des n dimensions sur lesquelles la totalité des conséquences constituant $\upsilon(A)$ est supposée pouvoir être décrite de façon exhaustive et opérationnelle est appelé le **spectre des conséquences**. Il est évidemment relatif à la phase d'étude considérée.

TABLEAU DES PERFORMANCES : Soit un ensemble B d'actions potentielles (B pouvant être égal à A) et $g_1, ..., g_n$, n critères formant une famille F. On appelle **tableau des performances de B sur F** le tableau contenant les valeurs de $g_j(a)$ pour tout j appartenant à F et pour tout a appartenant à B ainsi que les caractéristiques des éventuelles fonctions-seuils $q_j(g_j(a))$ et $p_j(g_j(a))$.

Chapitre 2

FAMILLE DE CRITÈRES : PROBLÈME DE COHÉRENCE ET DE DÉPENDANCE

RÉSUMÉ

Pour débuter ce chapitre, on passe en revue les principaux points de vue à partir desquels on peut chercher à juger si une famille F de critères répond à ce que l'on en attend dans une perspective d'aide à la décision. Chacun des critères de F renvoie à un modèle de préférences restreint. Leur ensemble doit permettre de modéliser les préférences à un niveau global. La famille F doit être apte à assurer une cohérence entre ces deux niveaux.

En section 2, on explicite les axiomes minimaux de cohérence (exhaustivité, cohésion, non redondance) que l'on peut raisonnablement imposer à F. Pour chacun d'eux, on présente successivement sa raison d'être, son énoncé formel, le (ou les) test(s) opérationnel(s) susceptible(s) de guider l'analyse critique, voire le remaniement, de F. Ces axiomes sont illustrés dans le cadre de plusieurs exemples : choix d'un premier emploi, entretien d'un parc de matériel, tracé d'une liaison à grande vitesse. Enfin, la définition 2.2.1 précise ce que l'on appellera dans ce livre famille cohérente de critères (f.c.c.).

Une f.c.c. peut posséder certaines propriétés remarquables : être inductive, faiblement séparable, séparable, fondamentale. Celles-ci sont définies et illustrées en section 3. Ces propriétés, lesquelles sont vérifiées par une f.c.c. F, renforcent la cohérence. Il serait cependant trop restrictif de vouloir les opposer à F pour que cette famille puisse être qualifiée de cohérente.

Dans la dernière section, on tente de répondre à la question : quelles formes d'indépendance entre les critères convient-il de rechercher lorsqu'on bâtit F ? Cela nous amène à approfondir trois formes de dépendances faisant intervenir successivement :

- le caractère plus ou moins isolable de chacun des axes de signification ;
- le caractère plus ou moins séparable de chacune des sous-familles de critères ;

– l'absence ou la présence de facteurs influençant conjointement plusieurs critères.

Afin d'illustrer ces formes de dépendance et/ou d'indépendance, de nouveaux exemples seront introduits : tracé de lignes à haute tension, choix d'un nouvel emploi.

Dans ce chapitre, nous nous situons à un stade donné d'avancement d'un processus de décision mettant en jeu un ensemble A d'actions potentielles. Soit $F = \{g_1, ..., g_n\}$ une famille de n critères ($n \geq 1$) définis sur A. Celui qui propose ou à qui l'on propose de prendre appui sur une telle famille en vue d'une aide à la décision doit tout naturellement s'interroger sur l'adéquation de F à la situation. Une telle interrogation porte sur deux niveaux :

- les aspects des conséquences qui ont trait à l'axe de signification j sont-ils convenablement modélisés par le critère g_j compte tenu de la présence des autres critères de la famille ? ;
- les n axes [1] de signification auxquels renvoient les critères de F sont-ils séparément pertinents et globalement nécessaires et suffisants pour atteindre le but recherché ?

Le rappel fait au 1.6.2 des techniques de construction de critères a fait ressortir le foisonnement des options que l'homme d'étude a dû prendre pour fixer le "calcul" de la performance $g_j(a)$ (et des éventuels seuils $p_j[g_j(a)]$ et $q_j[g_j(a)]$). Il est de ce fait vraisemblable qu'un autre homme d'étude, même en conservant des axes de signification identiques, aboutisse à une famille de critères différente. Il importe donc de savoir sur quel genre de considérations prendre appui pour juger si F peut ou non jouer le rôle qu'on veut lui faire jouer. Ce sujet est brièvement discuté en section 1 où plusieurs points de vue sont évoqués. L'un d'eux (ayant trait à une certaine forme de cohérence) est approfondi au 2.2.

[1] Le fait d'employer la forme pluriel n'est pas, dans notre esprit, exclusif du cas n = 1.

Dans ce genre de considérations, quelle place convient-il d'accorder aux dépendances possibles entre critères de F ? La réponse à cette question est renvoyée au 2.4 où nous analysons et illustrons les diverses formes de dépendances qui méritent d'être prises en considération. Divers concepts et propriétés de nature plus conceptuelle, que l'on peut situer en marge des notions de cohérence et de dépendance, sont présentés au 2.3.

2.1 COMMENT JUGER UNE FAMILLE DE CRITÈRES EN FONCTION DE CE QUE L'ON EN ATTEND ?

La famille de critères F associe, à chaque action potentielle a, les n performances [1] que sont les nombres $g_j(a)$. Elle fait en outre correspondre, à chacune de ces performances, deux valeurs $q_j(g_j(a))$ et $p_j(g_j(a))$ (éventuellement nulles) destinées à apprécier le caractère plus ou moins significatif de l'écart qui peut exister entre $g_j(a)$ et la performance $g_j(b)$ d'une autre action b. Sauf cas exceptionnels, le modèle de préférences global sur lequel prend appui l'aide à la décision ne fait intervenir deux actions quelconques qu'au travers de leurs seules performances et seuils correspondants. C'est dire que les critères constituent les pièces maîtresses à partir desquelles il s'agit soit de pouvoir décrire ou construire cet édifice des préférences globales, soit de pouvoir communiquer à son sujet, soit de pouvoir le faire évoluer (cf. 1.6).

En matière d'aide à la décision, ces diverses facettes du rôle dévolu à F, à savoir décrire, construire, communiquer, faire évoluer, sont si étroitement mêlées que F joue toujours, peu ou prou, chacun de ces rôles. Il serait donc de peu d'intérêt de répondre à la question posée séparément en fonction de chacun. Pour juger, dans une situation donnée, de la capacité de F à jouer cet ensemble de rôles, il faut adopter au moins quatre points de vue complémentaires. Les trois premiers ont déjà été évoqués au chapitre 1. Le dernier sera développé au 2.2.

[1] Rappelons que l'on note $g(a) = (g_1(a), g_2(a), ..., g_n(a))$ le vecteur de performances de a.

a) Les informations nécessaires au calcul des performances et seuils d'une action a reflètent-elles bien les éléments primaires à partir desquels les acteurs élaborent, justifient, transforment leurs préférences ?

Ces éléments primaires concernent tous les attributs de a, tous les effets de sa mise à exécution qu'un acteur peut juger pertinents compte tenu de ses objectifs et de son système de valeurs. Ce sont ce que nous avons appelé, au 1.5, les conséquences de l'action a. La question a) porte d'une part sur la pertinence des conséquences que les informations nécessaires au calcul des performances et seuils permettent d'appréhender et, d'autre part, sur le fait qu'en fondant F sur ces seules informations, on ne laisse pas échapper d'autres conséquences tout aussi pertinentes.

Dès l'instant où les conséquences des actions sont un tant soit peu complexes, il est commode, pour répondre à cette question, de disposer d'un modèle des conséquences des actions de A. Nous avons rappelé, au 1.5, selon quel schéma un tel modèle Γ pouvait être élaboré et, au 1.6, quel parti on pouvait en tirer pour la conception des divers critères constituant F. Le fait que F soit obtenu de cette manière ne dispense pas de s'interroger a posteriori sur les rapports de F avec Γ d'une part, de Γ avec la réalité des éléments primaires en question d'autre part.

b) L'axe de signification auquel renvoie chaque critère est-il aisément intelligible et acceptable par ceux des intervenants [1] à qui s'adresse l'aide à la décision ?

La manière dont les préférences d'un tel intervenant se forment, se raisonnent, se transforment s'analyse tout naturellement [2] à partir d'un petit nombre d'axes de signification. Ces axes de signification sont bien évidemment propres à chaque situation. A propos de l'acquisition d'un bien d'équipement, ils se rapporteront par exemple au prix d'achat, au coût de fonctionnement, à la sécurité de fonctionnement, à la vitesse de fonctionnement, à la commodité d'emploi pour l'utilisateur, ... Dans

[1] Cf. 1.1.

[2] C'est du moins une hypothèse que notre expérience ne nous a pas permis de falsifier.

certains cas, un intervenant donné sera en mesure de clairement les expliciter. Dans d'autres, ils seront seulement présents de façon latente.

Lorsque l'aide à la décision s'adresse à un unique intervenant, F ne pourra jouer les divers rôles qui lui sont dévolus que si les n axes de signification qu'elle comporte sont suffisamment en congruence avec sa culture pour qu'il en ait une compréhension suffisamment spontanée et qu'il les accepte comme référence fondamentale. On peut être un peu moins exigeant lorsque l'aide à la décision s'adresse à plus d'un intervenant. Si un minimum de compréhension de chacun des n axes de signification demeure nécessaire de la part de chaque intervenant concerné, on peut admettre qu'aux yeux de tel ou tel d'entre eux quelques-uns de ces axes apparaissent comme dépourvus d'intérêt.

Si l'on se réfère à un nouveau modèle Γ, c'est la manière dont ses différentes composantes (indicateurs d'état et indicateurs de dispersion) se distribuent pour former le support [1] de chacun de ces critères qui est ici en question. Ni l'intelligibilité, ni l'acceptation d'un axe de signification par un acteur n'impliquent une compréhension fine du mode de calcul de la performance $g_j(a)$ et encore moins de celle des seuils. Il faut toutefois veiller à ce qu'il n'y ait pas de distorsion entre ce à quoi conduit effectivement le mode opératoire et ce que les intervenants concernés imaginent à son sujet. Il suffit en général de préciser la nature de l'échelle E_j associée au critère g_j pour dissiper tout risque de malentendu. Discuter de cette échelle avec les acteurs offre en outre un moyen commode de vérifier qu'il y a bien consensus sur le fait que la préférence ne peut décroître (ou croître) lorsque la performance décrit l'échelle d'une extrémité à l'autre.

c) La définition de certains critères ne fait-elle pas appel à des hypothèses (ayant trait à leurs structures ou à la valeur numérique de certains paramètres) qui figent prématurément les préférences là où elles apparaissent obscures ou contradictoires ?

Dans la plupart des méthodes multicritères, de même que dans la méthodologie que nous proposons, la famille F est censée appréhender ce qui, dans les préférences des intervenants concernés, apparaît comme particulièrement "solide" et non contingent

[1] Cf. glossaire du chapitre 1 : Critère.

à un système de valeurs particulier. Pour que l'ensemble des n critères de F constitue ce "jeu de pièces maîtresses", ce "système de référence fondamental" à partir duquel on souhaite pouvoir représenter, bâtir, discuter, modifier des préférences globales, il importe qu'un assez large consensus puisse avoir lieu autour de cette part des préférences qui est prise en compte par chaque critère lorsque l'on se restreint à son axe de signification et que l'on raisonne toutes choses égales par ailleurs.

Il faut de ce fait éviter de faire intervenir, dans la définition des critères, des valeurs numériques de paramètres destinées par exemple à rendre commensurables des catégories de conséquences fort hétérogènes dont l'estimation ou l'interprétation donne lieu à des divergences si fortes qu'elle affecte significativement cette part des préférences restreintes à l'axe de signification concerné. Certaines hypothèses structurelles peuvent avoir le même effet néfaste et doivent également être évitées. Il peut par exemple en être ainsi lorsque le calcul de $g_j(a)$ fait intervenir des additions, soustractions ou multiplications portant sur des nombres dont seule la signification en tant que repère ordinal est bien définie et acceptée.

d) Y a-t-il cohérence entre ce que l'on sait ou ce que l'on veut au niveau des préférences globales et ce que la famille F amène logiquement à inférer à ce niveau?

Le fait que F contienne les n critères considérés et pas d'autres, que chacun de ces critères confère un sens à la comparaison de deux actions quelconques selon son axe de signification n'est pas sans conséquences au niveau des préférences globales lorsque celles-ci sont fondées sur F. Les conséquences qu'il est naturel d'inférer au niveau des préférences globales sur la base des préférences restreintes appréhendées par F sont-elles en accord avec ce que l'on peut savoir ou vouloir par ailleurs relativement à ces préférences globales ? On ne peut juger de cette cohérence que dans un contexte précis d'aide à la décision (actions envisagées, acteurs concernés, etc.).

Les deux sections qui suivent traitent de ce sujet [1]. Compte-tenu de ce qui a été dit plus haut quant à la signification de F, à celle des concepts de critères et des seuils qui leur sont associés, il nous paraît raisonnable d'imposer certaines conditions à F pour que la cohérence dont il vient d'être question soit garantie. Elles sont exposées au 2.2. Au 2.3, on discute d'autres conditions qui, bien que remplies par de nombreux modèles, paraissent néanmoins trop fortes pour être systématiquement imposées pour qualifier la famille F de cohérente.

2.2 AXIOMES FONDAMENTAUX DE COHÉRENCE ET TESTS OPÉRATIONNELS

Les trois axiomes qui suivent, de même que les tests opérationnels qui leur sont associés, sont destinés à mettre en relation ce que la réalité nous invite à postuler, au niveau des préférences globales, avec ce qu'il est logique d'inférer relativement à ces dernières à partir des critères retenus pour modéliser les préférences à un niveau plus restreint. Ces axiomes assurent une cohérence "minimale" entre les deux niveaux considérés sans laquelle il nous semble difficile de concevoir un formalisme avec lequel travailler en pratique. Une famille F de n critères ayant été construite, il est toujours prudent de se demander, à la lumière des tests opérationnels, si aucun de ces axiomes de cohérence ne peut être contredit par le système de préférences globales que F a précisément pour objet d'aider à concevoir, à argumenter ou à transformer. Aucun de ces axiomes n'est une simple conséquence logique des notions, principes et techniques rappelés au 1.6 pour bâtir, dans un contexte donné, les différents critères de F. Pourtant, lorsqu'en pratique un test opérationnel révèle une incohérence, celle-ci permet fréquemment de découvrir une inadéquation entre le critère retenu et les préférences, à un niveau restreint, qu'il était censé refléter. Les tests proposés ci-après permettent donc aussi des vérifications de cohérence sur d'autres plans que celui ayant trait à une bonne articulation entre chaque critère considéré isolément et la famille F considérée dans son ensemble.

[1] à peine effleuré dans MMCAD, 10.1.

2.2.1 Axiome d'exhaustivité

a) Principe

Dans une situation d'aide à la décision donnée, il existe bien des manières de regrouper et de combiner entre eux les éléments primaires (effets, attributs) qui caractérisent les conséquences des actions pour aboutir, en fin de compte, à la famille F de critères g_j qui sera retenue. Quelles que soient les options prises, si deux actions a et b sont telles que $g_j(a) = g_j(b)$, $\forall\ j \in F$, alors il est impossible de différencier a et b dans un modèle de préférences globales fondées sur F. C'est dire non seulement que entre a et b ne peut exister que l'indifférence mais encore que, comparer b avec une tierce action c, équivaut à comparer a avec c. Ainsi, pour que F puisse jouer le rôle qui lui est dévolu, il faut en particulier s'assurer qu'il est insensé de concevoir deux actions réalistes a et b qui auraient des vecteurs-performances $\underline{g}(a)$ et $\underline{g}(b)$ identiques à propos desquels on voudrait pourtant faire intervenir une autre relation que l'indifférence dans le modèle des préférences globales. Pour une telle paire d'actions, le refus de l'indifférence doit nécessairement être fondé sur le fait que les éléments primaires à partir desquels se conçoivent, se justifient, se transforment les préférences ne sont pas identiques. S'il y a néanmoins égalité des performances sur tous les critères de F, c'est la preuve que, dans la manière d'agencer les informations de base pour calculer ces performances, il s'opère une perte de signification.

Avant d'énoncer formellement cette première exigence de cohérence, nous allons introduire un exemple simple dit "du choix d'un premier emploi". Il nous permettra en particulier de montrer que l'axiome d'exhaustivité et le test opérationnel qui lui est associé ne font pas que prendre en compte (bien qu'ils le fassent également) l'exigence triviale suivante : "chacune des conséquences servant à fonder les jugements de comparaison entre actions doit être prise en charge par l'un au moins des critères de F". Il vise plus largement à justifier la possibilité, au vu de certains raisonnements, de substituer à l'action a la représentation abstraite qu'en donnent ses performances et seuils, substitution qui rend

indiscernables deux actions ayant même représentation [1].

Exemple du "choix d'un premier emploi"

Après avoir prospecté en vue d'un premier emploi, un individu Z est amené à comparer quatre postes a_1, a_2, a_3, a_4. Pour les comparer, il estime pertinent de ne faire intervenir que les trois conséquences élémentaires suivantes et elles seules :

– dimension [2] n° 1 : salaire mensuel escompté au bout d'un an de travail [3] ; les postes proposés se classent, relativement à cette dimension, en deux catégories :

. ceux (a_2 et a_4) qui offrent une totale sécurité de l'emploi accompagnée d'une progression de salaire parfaitement prévisible,
. ceux (a_1, a_3) qui présentent un risque réel en ce sens que la non réussite entraîne le licenciement au bout de la première année alors que la réussite conduit automatiquement, à cette échéance, à des responsabilités accompagnées d'une bonne rémunération ;

– dimension n° 2 : valorisation sur le marché du travail découlant de cette première année de vie professionnelle ; les quatre postes peuvent aisément être situés sur une échelle qualitative à partir d'éléments de jugement faisant intervenir le gain de qualification, les références, les contacts, etc. ;

– dimension n° 3 : attrait du poste proposé apprécié d'après la nature du travail, le lieu de travail, ... ; ici encore, les quatre postes peuvent être aisément évalués sur une échelle qualitative.

---

[1] En renvoyant explicitement, dans chaque représentation, à l'action a concernée, la notation retenue devrait avoir le mérite d'éviter les erreurs graves qui ne manquent pas de se produire (cf. Bateson (1977)) lorsqu'on confond systématiquement "cartes" (ici performances et seuils) et "territoire" (ici action concrète a).

[2] Sur cette notion, nous renvoyons au 1.5.

[3] Z considère qu'il ne doit pas se laisser influencer par le salaire de début qui, du reste, varie peu d'un poste à l'autre.

Le tableau 2.2.1 résume les évaluations faites par Z des quatre postes proposés selon ces trois dimensions. Imaginons que, pour raisonner ses préférences, Z fasse intervenir une famille F constitués de trois critères suivants :

– critère g_1 : salaire espéré au bout d'un an ; la performance $g_1(a)$ est définie comme l'espérance mathématique du salaire brut ou (si Z a connaissance de cette notion) d'une utilité [1] attachée à ce salaire ;

– critère g_2 : valorisation sur le marché ; la performance $g_2(a)$ est ici tout simplement définie en codant, sur une échelle numérique allant de 0 à 10, l'évaluation faite du poste a sur l'échelle qualitative associée à la dimension n° 2 ;

– critère g_3 : attrait du poste ; la performance $g_3(a)$ est ici encore une note de l'échelle 0 à 10 reflétant l'évaluation de a sur l'échelle qualitative de la dimension n° 3.

Quelle que soit la fonction d'utilité introduite pour définir le critère g_1 et quels que soient les codages [2] pris en compte pour définir les critères g_2 et g_3, il est clair que l'on aboutit à des performances qui, comme dans le tableau 2.2.2, vérifient :

$$g_1(a_1) = g_1(a_3),\ g_1(a_2) = g_1(a_4),$$
$$g_2(a_1) = g_2(a_2),\ g_2(a_3) = g_2(a_4),$$
$$g_3(a_1) = g_3(a_2),\ g_3(a_3) = g_3(a_4).$$

La famille des trois critères ainsi définie satisfait-elle à l'exigence d'exhaustivité dont le principe a été présenté en début de paragraphe ? Nous répondrons à cette question après avoir donné un nouvel énoncé plus formel de cette exigence d'exhaustivité.

[1] Il s'agit notamment de prendre en compte le fait qu'un salaire mensuel qui peut valoir 16 000F ou 0 F avec des probabilités égales ne conduit pas nécessairement (toutes choses égales par ailleurs) à une situation d'indifférence avec un salaire certain de 8 000 F, cf. 1.6.2 et 4.5.

[2] Cf. glossaire du chapitre 1 : Codage d'une échelle.

Tableau 2.2.1 : Evaluation des quatre postes offerts pour un premier emploi

A \ Dimensions	Salaire au bout d'un an	Valorisation sur le marché	Attrait du poste
a_1	16 000 F : une chance sur deux 0 F : une chance sur deux	forte	moyen
a_2	9 500 F avec certitude	forte	moyen
a_3	16 000 F : une chance sur deux 0 F : une chance sur deux	négligeable	fort
a_4	9 500 F avec certitude	négligeable	fort

Tableau 2.2.2 : Performances des quatre postes offerts selon la famille F des trois critères retenus

A \ Critères	g_1	g_2	g_3
a_1	x	8	5
a_2	y	8	5
a_3	x	1	8
a_4	y	1	8

b) Enoncé formel

AXIOME 2.2.1 (d'exhaustivité) : Si, $\forall j \in F$, $g_j(b) = g_j(a)$, alors, quelle que soit l'action c :

$$c\ H\ b \Rightarrow c\ H\ a,\ \forall H \in \{I, P, Q, R, \sim, \succ, S\},$$
$$b\ H'\ c \Rightarrow a\ H'\ c,\ \forall H' \in \{I, P, Q, R, \sim, \succ, S\}.$$

Cet axiome, tout en étant fort peu restrictif, traduit bien l'exigence d'exhaustivité présentée ci-dessus. Il appelle trois remarques :

1°) Soit parce que l'ensemble A des actions potentielles peut évoluer, soit parce que les actions fictives n'appartenant pas à A peuvent intervenir dans certains raisonnements, il serait trop restrictif de limiter l'énoncé de l'axiome aux seules actions $c \in A$.

2°) Il ne serait pas restrictif de limiter le champ d'application de l'axiome aux seules relations fondamentales I, P, Q, R : la validité des implications aux trois relations regroupées $\sim$, $\succ$, S s'en déduirait aisément. On peut de même établir que l'axiome vaut pour les relations J et K définies au tableau 1.4.2 mais nous n'aurons pas à faire intervenir ces relations par la suite.

3°) Appliquons l'axiome à une action c identique à b. La relation I étant réflexive par définition (cf. 1.4), on a b I b. L'axiome impose alors b I a, ce qui démontre le résultat suivant :

RÉSULTAT 2.2.1 (sur l'égalité des performances) : Dans F vérifiant l'axiome 2.2.1, si, $\forall j \in F$, $g_j(b) = g_j(a)$, alors b I a.

Bien que ce résultat ne soit qu'un cas particulier de l'axiome précédent, tout porte à croire qu'en pratique, vis-à-vis d'une famille donnée F, s'il est possible de mettre en évidence un triplet a, b, c tel que c ne se compare pas de la même façon avec a et avec b en dépit de l'identité des performances de a et de b, alors il doit être en général possible de mettre en évidence deux actions qui mettent le théorème en défaut. C'est pourquoi le test opérationnel préconisé ci-après ne porte que sur les cas envisagés par le théorème.

c) Test opérationnel

Avant de retenir une famille donnée F (éventuellement réduite à un seul critère) comme base d'un modèle de préférences globales, il est prudent de lui faire subir le test ci-après :

TEST 2.2.1 : Est-il possible d'imaginer deux actions a et b vérifiant, $\forall j \in F$, $g_j(b) = g_j(a)$ et vis-à-vis desquelles il soit néanmoins possible de faire valoir des arguments justifiant le refus de l'indifférence b I a ?

L'argument le plus simple est évidemment l'oubli d'un facteur, d'un attribut non fonctionnellement liés à ceux retenus, pertinents pour l'aide à la décision et, par conséquent, susceptibles de rompre la symétrie entre les performances caractérisant a et b. Le recours à ce test peut conduire à faire surgir d'autres arguments révélant une insuffisance plus ou moins cachée de F vis-à-vis de l'exigence d'exhaustivité. Il peut s'agir d'anomalies dans la définition de certains critères ou de l'oubli d'un axe de signification important qui, sans le test, pourrait pourtant passer inaperçu comme nous allons le montrer en revenant à l'exemple du "choix d'un premier emploi".

Exemple du "choix du premier emploi" - Suite

Dans cet exemple décrit au 2.2.1 a)), les critères g_1, g_2, g_3 définis par Z forment apparemment une famille F apte à satisfaire l'exigence d'exhaustivité. Pourtant, l'application du test peut conduire à l'argumentation suivante.

Imaginons que, dans le tableau 2.2.2, x = y (peu importe si tel n'est pas rigoureusement le cas des postes qui s'offrent dans l'instant à Z). Si l'on s'en tient à la famille F, on a alors nécessairement :

a_1 I a_2 et a_3 I a_4.

L'égalité x = y dépend évidemment de la fonction d'utilité choisie par Z pour définir le critère g_1. Ce choix peut précisément rendre compte du fait que Z est effectivement indifférent entre a_3 et a_4. Ces postes ayant mêmes performances sur les autres critères, cela signifie que Z est indifférent entre la garantie d'un revenu de 9 500 F par mois et l'espoir de réussir à obtenir 16 000 F par mois contrebalancé, avec la même possibilité, par le risque d'échouer et de se retrouver avec un revenu nul. Cette indifférence est évidemment influencée par le fait que Z sait qu'en cas d'échec il se retrouvera sur le marché du travail dans une situation semblable à celle d'aujourd'hui puisque ses qualifications professionnelles, ses relations avec le monde du travail, ... n'auront pas été significativement modifiées par cette première année d'activité dans le cadre de a_3. Cette façon qu'a Z de comparer a_3 à a_4 ne lui interdit donc nullement de préférer a_1 à a_2. En effet, s'il échoue dans le poste a_1, il est licencié mais sa situation sur le marché du travail, après cette première année de vie professionnelle, sera bien différente de ce qu'elle est aujourd'hui. L'éventualité d'un licenciement l'inquiète donc beaucoup moins dans le cas du poste a_1 que dans le cas du poste a_3. C'est pourquoi :

a_1 P a_2 et a_3 I a_4

lui paraît être le bon système de préférences.

Cette réponse positive au test 2.2.1 met non seulement en lumière ce qui est à l'origine du fait que F ne satisfait pas l'exigence d'exhaustivité mais oriente également Z vers une nouvelle famille F′ n'ayant plus le même défaut. Faisons tout d'abord observer que le défaut d'exhaustivité de F ne doit rien au choix de la fonction d'utilité. Avec une fonction différente, quelle qu'elle soit, on pourra toujours retrouver la contradiction ci-dessus en modifiant les salaires figurant dans la première colonne du tableau 2.2.1. Le défaut d'exhaustivité découvert provient en fait de ce que la famille F ne prend en compte qu'imparfaitement (par le biais d'un salaire nul) l'éventualité d'un licenciement au bout d'un an. Il s'ensuit que des actions telles que a_1 et a_2, susceptibles de donner une même valeur au critère g_1, peuvent être fort différentes eu égard à cet aspect précis de la conséquence n° 1 sans que cela apparaisse dans l'un quelconque des autres critères. Il est possible de réparer cet oubli, par exemple en éclatant [1] cette dimension n° 1. Z peut lui associer :

– un premier critère g_1' ayant un axe de signification purement financier, c'est-à-dire n'incorporant rien d'autre que la nullité du salaire dans le cas d'un éventuel licenciement ;

– un critère additionnel g_4 dont l'axe de signification est lié à cet aspect licenciement de la conséquence n° 1 : il peut par exemple poser $g_4(a)$ = probabilité de conserver le poste a au bout d'un an, ce qui traduit la pérennité du poste.

[1] Cf. 1.6.2.

Il suffit au lecteur de se reporter au tableau 2.2.3 pour vérifier que la famille F′ formée des critères g_1', g_2, g_3, g_4 ne permet plus, en posant $x' = y'$, d'imaginer, sur les bases précédentes, une réponse positive au test 2.2.1. Faisons en effet observer que (par référence à l'argumentation ci-dessus) l'indifférence a_3 I a_4 implique $x' > y'$, ce qui n'entraîne pas obligatoirement a_1 I a_2.

Tableau 2.2.3 : Performances des quatre postes offerts selon la nouvelle famille F′ de quasi-critères

Critères / A	g_1'	g_2	g_3	g_4
a_1	x′	8	5	1/2
a_2	y′	8	5	1
a_3	x′	1	8	1/2
a_4	y′	1	8	1

d) Remarques

L'analyse qui vient d'être présentée de l'exemple du choix d'un premier emploi relève de ce que nous avons appelé, au 1.7, une démarche constructive. Dans ce type de démarche, les critères forment le matériau de départ devant permettre de construire un modèle de préférences globales. Chaque critère doit donc être conçu de telle sorte que son axe de signification renvoie à un aspect des préférences qui soit clairement et durablement établi. Cela signifie en particulier qu'il permette de raisonner simplement les comparaisons d'actions en faisant abstraction de tous les facteurs ou attributs n'entrant pas dans ce que nous avons défini comme étant le support du critère (validité d'un certain type de raisonnement "toutes choses égales par ailleurs" effectué fréquemment de façon inconsciente). Le test a précisément révélé que le critère g_1, tel qu'il était primitivement conçu, ne permettait pas ce mode de raisonnement. En effet, deux postes (tels a_1 et a_2 ou a_3 et a_4), dont on peut supposer qu'ils ne diffèrent que par des aspects des conséquences pris en compte par le seul critère g_1 (dans la famille F), doivent pouvoir être comparés en ne considérant que les deux seules performances correspondant à ce critère. On a vu qu'il n'en était rien : selon que la valeur commune aux deux postes pour le critère g_2 vaut 8 ou 1, les conclusions changent. L'éclatement proposé substitue, à l'axe de signification initial, deux axes de signification très concrets et aisément intelligibles.

Reconsidérons maintenant cette analyse en nous plaçant dans le cadre d'une démarche descriptive. Celle-ci vise à proposer un modèle qui soit une description des préférences globales de l'acteur Z prenant directement appui sur les attributs liés aux dimensions retenues. Les critères n'ont plus nécessairement cette vocation de matériau de base. Ce sont des intermédiaires plus ou moins bien adaptés à la description recherchée. Dans ces conditions, le test 2.2.1 révèle moins un manque d'exhaustivité qu'une impossibilité de comparer deux distributions de probabilités sur la dimension n° 1 en faisant abstraction des valeurs communes des attributs liés aux autres dimensions (n° 2 principalement). La description des préférences implique alors d'indexer, par la valeur de l'attribut correspondant à la dimension n° 2, la fonction d'utilité introduite sur la dimension n° 1 pour ponctualiser sur cette dimension. Pour cette raison, on parle dans ce cas de dépendance au sens des utilités (plus généralement au sens des dispersions) de la dimension n° 1 vis-à-vis des autres dimensions et notamment de la dimension n° 2 (cf. 2.4.1).

Signalons qu'une réponse positive au test 2.2.1 peut être trouvée dans des conditions sensiblement différentes de celles qui viennent d'être discutées. Bornons-nous à évoquer le cas où un critère g_k fait intervenir un sous-ensemble I de dimensions et opère une sous-agrégation selon des modalités qui respectent insuffisamment bien les conditions requises [1] pour bâtir un tel critère. Pour un tel critère g_k, le raisonnement toutes choses égales par ailleurs peut s'avérer inacceptable, du moins en l'absence de critères supplémentaires ne figurant pas dans la famille considérée. Ici encore, l'analyse des arguments mis en jeu par le test est de nature à clarifier le (ou les) axe(s) de signification qu'il convient d'ajouter.

Ce qui précède nous invite à attirer l'attention du lecteur sur le fait que le raisonnement "toutes conséquences égales par ailleurs" est plus restrictif que le raisonnement "toutes performances égales par ailleurs". Ainsi, dans l'exemple du choix d'un premier emploi, la comparaison de a_1 et a_2 relativement à ce que l'on a appelé leur attrait respectif (cf. 2.2.1 a), dimension n° 3) a bien lieu, toutes performances égales par ailleurs (dans le cadre de F), dès lors que $x = y$. Pourtant, a_1 et a_2 ont des conséquences différentes selon la dimension n° 1 (cf. tableau 2.2.1). Qui plus est, la comparaison de deux actions selon un critère g_j, toutes les autres performances étant égales par ailleurs, fait explicitement intervenir les autres critères introduits au côté de g_j pour constituer la famille F. Ce phénomène n'intervient pas lorsqu'on raisonne toutes autres conséquences égales par ailleurs. En conclusion, il importe de ne pas perdre de vue que, pour comparer deux actions selon l'axe de signification d'un critère, il convient de raisonner [2], abstraction faite des aspects des conséquences non modélisées dans le support du critère g_j. Ceci explique que le critère g_1' (contrairement au critère g_1) peut être défini sans ambiguïté sur la base d'une fonction d'utilité du salaire

[1] Cf. 1.6.2 et MMCAD, 9.2.3 : conditions I et II.

[2] Cf. MMCAD, définition 9.1.1.

qui fait abstraction du fait qu'un salaire nul s'accompagne d'un licenciement (aspect de la conséquence non modélisé dans le support de g_1').

2.2.2 Axiome de cohésion

a) Principe

La formulation que nous donnons ci-après de cet axiome fait intervenir la convention selon laquelle une action quelconque a est d'autant meilleure selon un quelconque critère g_k que le nombre $g_k(a)$ (performance selon g_k) est plus grand. Nous attirons à nouveau l'attention sur le fait que cette convention est non restrictive.

Cet axiome vise à cerner le minimum de cohésion qui doit exister entre le rôle dévolu localement à n'importe quel critère g_k au niveau des préférences restreintes à son axe de signification et le rôle dévolu au même critère g_k une fois immergé dans F au niveau des préférences globales. Ce minimum de cohésion trouve tout d'abord sa source dans les considérations suivantes :

– Partant d'une quelconque action b, si, par un procédé quelconque, on accroît la performance d'une action b sur un critère k tout en maintenant inchangées les autres performance de b, alors l'action b^k ainsi obtenue est au moins aussi bonne que l'action initiale b.

– Si b est comparable à une autre action a selon une relation qui fait apparaître b comme au moins aussi bonne que a (préférence stricte, préférence faible ou indifférence), alors l'action b^k (obtenue selon le procédé ci-dessus) demeure comparable à a selon une relation qui traduit une préférence de b^k sur a au moins aussi solidement affirmée que celle existant primitivement entre b et a.

– Si, par un procédé quelconque, on réduit la performance $g_k(a)$ tout en maintenant les autres performances de a inchangées, alors l'action a_k ainsi obtenue demeure comparable à b^k, la préférence étant en faveur de b^k et devant être au moins aussi clairement affirmée que celle existant primitivement entre b et a.

Ce minimum de cohésion doit en outre prendre en considération le caractère non significatif d'un écart de performance inférieur au seuil d'indifférence. Soit a et b deux actions (comparables ou non au niveau des préférences globales) vérifiant $g_k(b) = g_k(a)$. Imaginons que, pour des raisons quelconques, on soit amené à réviser légèrement en hausse la performance $g_k(b)$ et légèrement en baisse la performance $g_k(a)$, l'écart entre les nouvelles valeurs $g_k(b) - g_k(a)$ restant inférieur à la valeur du seuil d'indifférence. Une différenciation de si faible ampleur, à partir d'une performance initialement commune aux actions a et b, n'est pas de nature (compte-tenu de la définition du seuil d'indifférence [1]) à pouvoir altérer la manière dont se comparent les actions a et b.

Afin d'illustrer de quelle façon un tel principe, qui peut paraître évident, est susceptible d'être mis en défaut, nous introduisons ci-après un second exemple dit "de l'entretien d'un parc immobilier".

Exemple de l'"entretien d'un parc immobilier"

Z est ici le responsable de l'entretien d'un important parc immobilier. A ce titre, il lui incombe de procéder aux réparations de toutes sortes qui s'imposent pour maintenir en l'état un très grand nombre de logements, de garages ainsi que divers espaces verts, zones d'accès, etc. Pour l'essentiel, les demandes de travaux (qui constituent les actions potentielles) proviennent des occupants des locaux ainsi que d'agents chargés de l'entretien. Pour des raisons de sécurité ou de menace de détérioration rapide d'une situation, certaines de ces demandes peuvent présenter un haut degré d'urgence. D'autres peuvent au contraire attendre au prix de préjudices relativement mineurs infligés aux usagers des lieux.

Z tient à jour la liste A_t des actions potentielles correspondant aux travaux non encore engagés à l'époque t. Il souhaite que A_t soit ordonnée conformément à un principe de priorités décroissantes. Une analyse statistique a permis d'élaborer un indice

[1] Cf. 1.6.3.

appelé score d'urgence permettant d'associer à l'instant t, à chaque élément de la liste A_t, un nombre $g_1(a)$ compris entre 0 (peut être différé sans aucun dommage) et 100 (doit être mis à exécution immédiatement). Le score $g_1(a)$ prend notamment en considération la nature et l'âge des lieux, leur usage, certaines caractéristiques propres aux usagers, la nature des travaux demandés, etc.

Après avoir raisonné durant quelque temps sur la base de l'ordre des priorités décroissantes définies sur le seul critère g_1, Z a éprouvé le besoin de faire intervenir d'autres critères en complément du score d'urgence et cela pour des raisons de deux ordres :

– d'une part le calcul de $g_1(a)$ est plus ou moins approximatif selon l'action considérée : certaines des informations peuvent manquer à propos d'une action a donnée (une valeur moyenne plus ou moins pertinente est alors adoptée pour la remplacer), parfois certaines des informations fournies sortent des normes qui ont servi de base à la mise au point de l'indice sur des bases statistiques, dans d'autres cas il sait que la source d'informations est très largement sujette à caution ;

– d'autre part il veut faire intervenir de nouveaux attributs non pris en compte dans le calcul de $g_1(a)$ comme, par exemple, la confiance qu'il est prêt à accorder au demandeur de travaux compte-tenu de ses antécédents connus ou bien encore l'intérêt qu'il peut y avoir à engager immédiatement ou, au contraire, à différer les travaux compte-tenu de travaux de même nature actuellement engagés ou planifiés pour un avenir proche.

Z est ainsi conduit à compléter l'unique critère primitif g_1 par :

– un critère $g_2(a)$ traduisant la fiabilité de la performance $g_1(a)$: plus $g_2(a)$ est élevé (proche de 1) et plus la performance $g_1(a)$ découle de données complètes et crédibles ;

– d'autres critères $g_3, ..., g_n$ ayant trait aux autres aspects des conséquences pertinentes pour juger de la priorité d'une action mais non correctement pris en compte dans les supports de g_1 ou de g_2.

La famille de critères F ainsi définie satisfait-elle obligatoirement à l'exigence de cohésion ? Nous répondrons à cette question après avoir donné un énoncé plus formel de cette exigence.

b) Enoncé formel

AXIOME 2.2.2 (de cohésion) :
Si, $\forall j \in F \backslash \{k\}$, $g_j(b^k) = g_j(b)$, $g_k(b^k) \geq g_k(b)$ et
si, $\forall j \in F \backslash \{k\}$, $g_j(a) = g_j(a_k)$, $g_k(a) \geq g_k(a_k)$,
l'une au moins des deux inégalités ci-dessus étant stricte,
alors :

$b \; P \; a \Rightarrow b^k \; P \; a_k$,
$b \; Q \; a \Rightarrow b^k \succ a_k$,
$b \; I \; a \Rightarrow b^k \; S \; a_k$.

Si, en outre, $g_k(b) = g_k(a)$ et $b^k \; I_k \; a_k$, alors, $\forall H \in \{I, P, Q, R, \sim, \succ, S\}$:

$b \; H \; a \Rightarrow b^k \; H \; a_k$,
$a \; H \; b \Rightarrow a_k \; H \; b^k$.

Cet axiome appelle les remarques suivantes :

1°) Dans la formulation de la première partie de l'axiome, les relations regroupées (S et $\succ$) peuvent laisser la place à l'une des relations fondamentales qu'elles peuvent impliquer.

2°) Lorsqu'on admet l'axiome d'exhaustivité, la première partie de l'axiome de cohésion vaut également dans le cas $g_k(a) = g_k(a_k)$ et $g_k(b^k) = g_k(b)$ comme on le montrera au d) ci-après.

3°) Si le seuil d'indifférence du critère g_k est nul, faisons observer que la deuxième partie de l'axiome devient une conséquence de l'axiome d'exhaustivité. Lorsque les seuils d'indifférence de tous les critères sont nuls, il résulte de l'axiome d'exhaustivité que deux actions indifférentes sur tous les critères doivent se comparer de manière identique à toutes les autres actions. Notons qu'il n'en va pas ainsi dans les autres cas. Modifier les axiomes de cohésion et d'exhaustivité de manière à l'imposer reviendrait, sur un ensemble d'actions suffisamment

riche, à rendre de proche en proche toutes les actions indifférentes.

De cet axiome joint au précédent découlent deux résultats importants. Le premier apparaît comme une généralisation de la première partie de l'axiome 2.2.2. Rappelons que la relation Δ_F désigne la relation de dominance associée à F, cf. (r.1.7.1).

RÉSULTAT 2.2.2 (de monotonicité) : Dans F vérifiant les axiomes 2.2.1 et 2.2.2 :
si $b^* \; \Delta_F \; b$ et $a \; \Delta_F \; a_*$,
alors

$b \; H \; a \Rightarrow b^* \; H \; a_*$, $\forall H \in \{P, \succ, S\}$ [1] et
$b \; \Delta_F \; a \Rightarrow b \; S \; a$ [1].

Démonstration : Lorsque, $\forall j \in F$, $g_j(b^*) = g_j(b)$, on a, d'après l'axiome 2.2.1, $b \; H \; a \Rightarrow b^* \; H \; a$.

Lorsque, $\forall j \neq k$, $g_j(b^*) = g_j(b)$, l'axiome 2.2.2 implique :

$b \; P \; a \Rightarrow b^* \; P \; a$,
$b \succ a \Rightarrow [b \; P \; a \text{ ou } b \; Q \; a] \Rightarrow [b^* \; P \; a \text{ ou } b^* \succ a] \Rightarrow^2 b^* \succ a$,
$b \; S \; a \Rightarrow [b \succ a \text{ ou } b \; I \; a] \Rightarrow [b^* \succ a \text{ ou } b^* \; S \; a] \Rightarrow^1 b^* \; S \; a$.

Ceci peut être formulé :

$\Delta_1 \cdot H \subset H$

avec $b \; \Delta_1 \; a$ si et seulement si les performances de a et de b ne diffèrent que sur un critère au plus pour lequel la performance de b est au moins égale à celle de a.

---

[1] Dans le membre de droite de l'implication, la relation regroupée peut laisser la place à l'une des relations fondamentales qu'elle peut impliquer, cf. remarque 1°) ci-dessus.

[2] Conformément à la remarque 1°) suivant l'axiome 2.2.2, nous raisonnons en admettant que $d \succ c$ est regardée comme vraie dès lors que d P c ou d Q c et que d S c est regardée comme vraie dès lors que $d \succ c$ et cela même si, dans l'écriture du s.r.p., la relation regroupe cède la place à une relation fondamentale plus précise, l'une et l'autre ne pouvant co-exister dans cette écriture afin de satisfaire à la troisième condition de la définition 1.4.1.

Dans ces conditions :

$$(\Delta_1)^n \cdot H \subset (\Delta_1)^{n-1} \cdot H \subset \ldots \subset H.$$

Or, $(\Delta_1)^n = \Delta_F$. Donc $\Delta_F \cdot H \subset H$. On démontre symétriquement $H \cdot \Delta_F \subset H$, d'où : $\Delta_F \cdot (H \cdot \Delta_F) \subset H$ (ce qui démontre la première partie du résultat). D'autre part, S étant réflexive, on a : $\Delta_F \subset \Delta_F \cdot S \subset S$ (ce qui achève la démonstration).

RÉSULTAT 2.2.3 (sur la contagion de surclassement) : Dans F vérifiant les axiomes 2.2.1 et 2.2.2 :

$[a' \ S_j \ a, \forall j \in F] \Rightarrow a' \ S \ a$ [1],
$[a' \ I_j \ a, \forall j \in F] \Rightarrow a' \ I \ a$.

Démonstration : Soit $J = \{j \in F : g_j(a) > g_j(a')\}$. Lorsque $J = \varnothing$, alors $a' \ S_j \ a$, $\forall j \in F$ implique $a' \ \Delta_F \ a$, d'où $a' \ S \ a$ d'après le résultat 2.2.2.

Lorsque $J \neq \varnothing$, soit c une action caractérisée par :

$$g_j(c) = \mathrm{Min}(g_j(a'), g_j(a)), \ \forall j \in F.$$

Montrons que c S a.

Si $J = \{k\}$, on est dans les conditions de la seconde partie de l'axiome 2.1.2 avec $b^k = a$, $a_k = c$, $a = b$, donc $a \ S \ a \Rightarrow a_k \ S \ b^k$, soit c S a.

Si $j = \{h, k\}$, soit c_h l'action caractérisée par :

$$g_h(c_h) = g_h(a),$$
$$g_j(c_h) = \mathrm{Min}(g_j(a), g_j(a')), \ \forall j \in F \backslash \{h\}.$$

Il découle de ce qui précède que $c_h \ S \ a$. On est alors à nouveau dans les conditions de la seconde partie de l'axiome 2.1.2 (avec $b^k = a$, $a_k = c$, $b = a$ et $a = c_h$) et on a donc c S a. Il est facile d'itérer ce raisonnement pour achever la démonstration de la première partie du résultat.

Suivant les conventions adoptées, $a' \ I_j \ a$ peut être remplacé par $a' \ S_j \ a$ et $a \ S_j \ a'$. Ceci étant vrai pour tout j, on en déduit (d'après la première partie du résultat) $a' \ S \ a$ et $a \ S \ a'$, ce qui implique $a' \ I \ a$ et achève la démonstration.

[1] Au second membre S, on peut laisser la place à l'une des relations fondamentales qu'elle peut impliquer.

c) Test opérationnel

L'exigence de cohésion, telle qu'elle vient d'être formulée, demande-t-elle a être testée en pratique ? Dès l'instant où chacune des fonctions g_j constituant F a été conçue de façon à être un critère au sens donné à ce terme dans le présent ouvrage, ne peut-on pas admettre que F satisfait naturellement à l'axiome 2.2.2 ? Bien qu'il en soit généralement ainsi, des précautions s'imposent néanmoins. Les considérations et exemples qui suivent le prouvent. Il est donc opportun de s'assurer de l'acceptabilité de cet axiome comme base de raisonnement et fondement des rapports entre préférences globales réelles ou postulées et modèles de ces préférences bâties sur F. Pour cela, on peut avoir recours aux tests suivants :

TEST 2.2.2 : Est-il possible d'imaginer deux actions a et b devant vérifier b I a vis-à-vis desquelles on puisse faire valoir des arguments justifiant le fait qu'en améliorant certaines des performances de b (les autres restant inchangées) et/ou en dégradant certaines des performances de a (les autres restant également inchangées) on parvienne à caractériser deux actions b^* et a_* telles que b^* n'apparaisse pas comme devant être au moins aussi bonne que a_* ?

Avant de commenter ce test, mentionnons une variante proposée et expérimentée par Vanderpooten (1990) et prenant appui sur le résultat 2.2.2 :

TEST 2.2.2 bis : Est-il possible de mettre en évidence deux actions a et b dont les performances vérifient, $\forall j \in F$, $g_j(b) \geq g_j(a)$ et qui soient néanmoins telles que l'on puisse faire valoir des arguments justifiant le fait que b n'apparaisse pas comme devant être aussi bonne que a ?

Il est clair que si ce test 2.2.2 est positif en ce sens que l'on arrive à argumenter en faveur de b I a et Non(b^* S a_*), alors la famille F considérée contrevient à la première partie de l'axiome 2.2.2. Il est dans ce cas indispensable :

– soit de modifier F afin que le test ne paraisse plus pouvoir être positif ;

– soit si, pour des raisons exceptionnelles, il faut conserver F en l'état, de veiller à ce que, dans le modèle de préférences globales bâti sur F, on n'ait pas b I a et b^* S a_* comme c'est automatiquement le cas avec les modèles usuels.

Avant de montrer sur un exemple que ce test peut effectivement être positif, énonçons un autre test relatif cette fois à la seconde partie de l'axiome 2.2.2.

TEST 2.2.3 : Est-il possible d'imaginer deux actions a et b vérifiant, pour un critère donné k : $g_k(b) = g_k(a)$ vis-à-vis desquelles on puisse faire valoir des arguments justifiant le fait qu'en améliorant légèrement $g_k(b)$ et/ou en dégradant légèrement $g_k(a)$ tout en maintenant la différence $g_k(b) - g_k(a)$ inférieure au seuil d'indifférence on parvienne à justifier une modification dans la manière dont doivent être comparées les actions b et a ?

Une réponse positive à ce test montre que F contrevient à la seconde partie de l'axiome 2.2.2. Ceci peut se produire lorsque l'écart $g_k(b) - g_k(a)$, non significatif au niveau du critère k, vient s'ajouter à des écarts analogues, eux-mêmes non significatifs relativement aux critères qui les font apparaître. Un cumul de tels écarts, lorsqu'ils vont tous dans le même sens (tous favorables à b par exemple) peut, dans certaines conditions, être jugé significatif au niveau des préférences globales qu'il s'agit de décrire ou de construire (cf. d) ci-après). Il faut dans ce cas :

– soit réduire certains des seuils d'indifférence de telle sorte qu'il n'en soit plus ainsi ;

– soit veiller à prendre explicitement en compte ce phénomène de cumul dans le modèle de préférences globales, ce qui peut poser de délicats problèmes.

Exemple de l'"entretien d'un parc immobilier" - Suite

Revenons à l'exemple de l'entretien d'un parc immobilier présenté au 2.2.2 a). Imaginons deux demandes de travaux a et b respectivement caractérisées par :

– un score d'urgence $g_1(a) = 50$, c'est-à-dire moyen, établi avec une fiabilité également moyenne : $g_2(a) = 0,5$; des performances $g_3(a), ..., g_n(a)$ elles aussi moyennes ;

– un score d'urgence $g_1(b) = 20$ relativement bas, établi avec une fiabilité moyenne $g_2(b) = 0,5$; des performances $g_3(b), ..., g_n(b)$ significativement au-dessus de la moyenne bien que non excellentes.

Du point de vue des priorités, Z peut se déclarer indifférent entre b et a. Considérons maintenant b^* caractérisé par :

$$g_j(b^*) = g_j(b),\ \forall j \neq 2,$$
$$g_2(b^*) = 0,9.$$

L'axiome voudrait que Z considère b^* comme au moins aussi prioritaire que a. Or, Z peut avoir une opinion différente et argumenter comme suit en faveur de $a \succ b^*$. L'indifférence entre b et a s'explique par le fait que, face à des scores d'urgence 50 et 20 moyennement fiables, les meilleures performances obtenues par b selon les critères secondaires que sont $g_3, ..., g_n$ apparaissent de nature à compenser le désavantage de b selon le critère g_1. Mais si le faible score selon g_1 est solidement établi comme c'est le cas avec b^*, alors cette compensation n'a plus lieu.

Si Z raisonne ainsi, il a trouvé une réponse positive au test 2.2.2. A l'origine de cette falsification, n'y a-t-il pas, comme dans l'exemple traité au 2.2.1 c), le fait que g_2 ne répond qu'imparfaitement à la définition d'un critère [1] ? C'est fort possible comme le montrent les explications qui suivent mais ce n'est pas obligatoirement le cas.

Imaginons que l'on puisse concevoir (ce qui n'est pas absolument certain) une action b′ qui, par tous les aspects des conséquences non pris en compte dans le support de g_2, soit identique à b mais qui conduise pourtant à $g_2(b') = 0,9$ (c'est dire que b′ a les mêmes performances que b^*). Si g_2 est un critère, alors b′ S b. Selon un argument semblable au précédent bien que ne faisant référence à aucune compensation, Z peut refuser ce jugement de préférences. Il peut au contraire argumenter en faveur de $b \succ b'$ en faisant observer que le faible score d'urgence de b′ étant solidement établi, contrairement à celui de b, il se peut que b soit en fait prioritaire et que, face à cette incertitude, s'il doit faire passer une demande avant l'autre, c'est b qui doit l'emporter.

[1] Cf. glossaire du chapitre 1 : Critère.

Les actions a et b considérées plus haut peuvent servir de point de départ à l'application du test 2.2.3 pour k = 2. Il est manifeste qu'avec des performances $g_2(a)$ et $g_2(b)$ légèrement différentes mais dont la valeur absolue de la différence reste inférieure au seuil d'indifférence, il n'est pas possible d'argumenter en faveur d'autre chose que b I a. Il en est de même avec des valeurs différentes des performances de a et de b selon les critères autres que g_2. Il ne paraît pas davantage possible de trouver une réponse positive au test pour k = 3, ..., n.

Pour k = 1, le test 2.2.3 peut conduire à remettre en question le choix initial de $q_1[g_1(a)]$. Supposons en effet que ce seuil ait été choisi en raisonnant implicitement sur une valeur de la performance moyennement fiable ($g_2(a)$ = 0,5). Supposons que l'on ait adopté une valeur constante $q_1 = 10$. On peut alors imaginer deux actions a et b ayant mêmes performances selon tous les critères autres que g_1 vérifiant en outre :

$$g_1(a) = g_1(b) = 75,\ g_2(a) = g_2(b) = 0{,}9.$$

Si le score d'urgence de b valait 0,85 au lieu de 0,75, il devrait toujours y avoir indifférence entre a et b ainsi réévaluées puisque les scores d'urgence ne diffèrent pas significativement. Or, pour une fiabilité du score aussi élevée que 0,90, l'écart de 10 peut, en fait, être jugé significatif. Etant donné que le seuil q_1 ne peut [1] pas être regardé comme variable avec $g_2(a)$, il faut en fixer la valeur en se plaçant dans des conditions qui le rendent minimum (à savoir $g_2(a)$ voisin de 1).

d) Remarques

Considérons un couple d'actions b, a tel que :

$$g_j(b) = g_j(a) + q_j[g_j(a)],\ \forall\ j \in F.$$

Le théorème 2.2.2 impose alors b I a. Dans la plupart des cas, ceci ne soulève aucune objection. Chacun des écarts positifs $g_j(b) - g_j(a)$ fait apparaître a comme non significativement différente de b selon le critère g_j. Le raisonnement analytique, critère par critère, conduit naturellement à regarder b comme indifférente à a. Dans certains cas, on peut cependant alléguer ce que nous appellerons un **effet de cumul** pour refuser b I a au profit de b Q a.

Du point de vue de la modélisation des préférences globales, la prise en compte d'effets de cumul se heurte à deux types d'obstacles :

[1] sous peine de complications qu'il est prudent de chercher à exclure (cf. MMCAD, 9.3.1 et 9.3.2).

– Sur un plan théorique, dire que le cumul d'écarts non significatifs peut devenir significatif ne peut s'expliquer que par la présence d'interdépendances entre les critères, lesquelles peuvent, seules, être à l'origine du phénomène de synergie capable de conférer un pouvoir discriminant à la réunion d'écarts qui, considérés isolément, en sont dépourvus. De quelle nature sont ces interdépendances ? Ne diminuent-elles pas l'intérêt et la portée des raisonnements "toutes choses égales par ailleurs" qui confèrent un sens aux différents critères de F ?

– Sur un plan pratique, comment délimiter le contour des configurations (non nécessairement aussi extrêmes que celles envisagées ci-dessus) relativement auxquelles cet effet de cumul opère ?

Faisons observer encore que la façon dont fonctionnent les tests ci-dessus peut fortement dépendre du type de systèmes relationnels de préférences que l'on a pour objectif de décrire ou de construire. Selon qu'on les postule comme étant ou devant être du type (I, P), (S, R), (I, P, Q, R), ..., tel argument apparaîtra adapté ou, au contraire, non adapté pour élaborer une réponse positive à l'un des tests. C'est dire qu'en toute rigueur savoir si l'axiome 2.1.2 est ou non acceptable pour raisonner à partir de F et fonder sur une famille un modèle de préférences globales satisfaisant suppose qu'on ait pris position sur le type de relations de préférences qui doivent effectivement intervenir dans le modèle.

On remarquera enfin que le principe qui est à l'origine de l'axiome de cohésion (cf. a) ci-dessus) suppose que l'on se place dans l'hypothèse où l'une au moins des deux inégalités $g_k(b^k) \geq g_k(b)$, $g_k(a) \geq g_k(a_k)$ est stricte. Il est facile de démontrer que si F satisfait à l'axiome de cohésion tel qu'il est énoncé, alors F satisfait à ce même axiome étendu au cas $g_k(b^k) = g_k(b)$, $g_k(a) = g_k(a_k)$ si F satisfait à l'axiome d'exhaustivité [1].

2.2.3 Axiome de non redondance

a) Principe

Cette troisième et dernière exigence traduit un souci d'économie. Elle consiste à interdire, dans F, la présence de critères superflus.

Considérons un critère g_h de F et la famille F\{h} déduite de F en retirant ce critère. Admettons que les n – 1 critères de F\{h}

[1] En effet, si $g_j(b^k) = g_j(b)$ et $g_j(a) = g_j(a_k)$, $\forall\ j \in F$, l'axiome d'exhaustivité appliqué au triplet b, b^k, a (a jouant le rôle de c) puis au triplet a, a_k, b^k (b^k jouant le rôle de c) permet d'écrire : b H a $\Rightarrow$ b^k H a $\Rightarrow$ b^k H a_k.

suffisent pour faire jouer à cette nouvelle famille le rôle (cf. 2.1) initialement dévolu à F. Il est clair que g_h est alors un critère redondant ; sur quoi prendre appui pour caractériser une telle propriété (l'hypothèse utilisée pour l'introduire paraît trop complexe pour être opératoire et formalisée) ?

Dès lors que l'on considère que, à côté de l'exigence dont il est ici question, seules les deux précédentes (exhaustivité et cohésion) sont à prendre en compte pour définir la notion de cohérence d'une famille F, il apparaît qu'un **critère g_h est redondant** si et seulement si son retrait laisse une famille F\{h} satisfaisant aux deux exigences d'exhaustivité et de cohésion.

Dire que g_h est, dans F, un critère redondant (au sens précis qui vient d'être donné à ce terme), c'est dire bien évidemment que g_h est "fortement dépendant" des n – 1 critères constituant F\{h}. Il ne paraît pas pour autant possible de fonder l'exigence de non redondance sur cette notion de dépendance. Celle-ci est difficile à cerner, comme nous le verrons dans les sections suivantes, et donne lieu de ce fait à des concepts variés. Il s'ensuit qu'une famille de critères qui ne contient aucun critère redondant n'est pas pour autant exempte de dépendances entre les critères qui la constituent.

Imposer à F de ne pas contenir de critères redondants ne procède pas seulement d'un désir de simplicité. En effet, la présence de critères redondants complique singulièrement la modélisation des informations inter-critères nécessaires à une agrégation des préférences restreintes aux axes de signification des divers critères en vue d'une modélisation des préférences globales (cf. chapitres suivants).

b) Enoncé formel

AXIOME 2.2.3 (de non redondance) : F ne comporte aucun critère redondant en ce sens que le retrait de n'importe quel critère de F définit une famille qui met en défaut l'un au moins des axiomes d'exhaustivité et de cohésion.

RÉSULTAT 2.2.4 : Une famille F qui satisfait aux axiomes d'exhaustivité, de cohésion et de non redondance ne contient aucune sous-famille propre [1] qui satisfasse aux axiomes d'exhaustivité et de cohésion.

Démonstration

L'axiome d'exhaustivité assure la validité du résultat pour toute sous-famille de la forme F\{h}. Il faut encore prouver qu'il est toujours vrai lorsqu'on retire de F deux critères ou davantage. Nous établissons ci-après ce résultat pour le retrait des critères g_{n-1} et g_n. Le résultat, sous sa forme générale, découle immédiatement de cette démonstration.

Notons F′ la sous-famille obtenue en retirant de g_{n-1} de F\{n}. D'après l'axiome de non-redondance, F\{n} viole soit l'axiome d'exhaustivité, soit l'axiome de non redondance.

1°) F\{n} viole l'axiome d'exhaustivité : cela signifie qu'il existe trois actions a, b, c telles que :

$g_j(a) = g_j(b)$, $\forall\, j \in F\setminus\{n\}$,
c H a et Non(c H b) pour au moins une relation $H \in \{I, P, Q, R, \sim, \succ S\}$.

Les trois mêmes actions mettent en défaut l'axiome d'exhaustivité après retrait de la n–1^{ième} performance, ce qui prouve que F′ viole l'axiome d'exhaustivité.

2°) F\{n} viole l'axiome de cohésion : il convient de distinguer deux cas :

i) La violation concerne la première partie de l'axiome du fait, par exemple, de l'existence de deux actions a et b telles que, pour un critère k :

b P a et Non(b^k P a^k) ;

si $k \neq n - 1$, alors F′ viole encore l'axiome de cohésion (la cause de violation demeurant la même).

Si $k = n - 1$, alors F′ viole l'axiome d'exhaustivité : en effet, le triplet d'actions (b, b^k, a) vérifie :

$g_j(b) = g_j(b^k)$, $\forall\, j \in F'$, b P a et Non(b^k P a).

Le même raisonnement vaut en substituant Q ou I à P.

[1] c'est-à-dire formée de au plus n – 1 des critères de F.

ii) La violation concerne la seconde partie de l'axiome. C'est dire qu'il existe un critère k ayant un triplet d'actions (a, b, b^k) vérifiant :

$g_j(b^k) = g_j(b)$, $\forall\ j \in F\backslash\{n, k\}$, $b^k\ I_k\ b$
b H a et Non(b^k H a) pour au moins une relation H ∈ {I, P, Q, R, ~, ≻, S}.

Si k ≠ n – 1, alors F′ viole encore l'axiome de cohésion (la cause de violation demeurant la même).

Si k = n – 1, alors F′ viole l'axiome d'exhaustivité (cf. triplet (b, b^k, a)).

CQFD.

Si une famille F satisfait à l'axiome d'exhaustivité, cela ne signifie nullement que l'on ne puisse concevoir une famille ayant au plus n – 1 critères, certains d'entre eux n'appartenant pas à F, qui satisfasse aux axiomes d'exhaustivité et de cohésion.

c) Test opérationnel

TEST 2.2.4 : Existe-t-il un critère g_h dont le retrait de F définisse une famille vis-à-vis de laquelle aucun des tests 2.2.1, 2.2.2, 2.2.3 ne fournisse de réponse positive ?

Si un critère g_h répond à la question, il peut être regardé comme critère redondant et la famille F\{h} peut être avantageusement substituée à F. Pour mieux comprendre la portée de ce test, le lecteur peut chercher à l'appliquer aux deux exemples précédents : choix d'un premier emploi, entretien d'un parc immobilier ; il vérifiera aisément qu'aucune des deux familles introduites aux 2.2.1 c) et 2.2.2 c) à propos de ces deux exemples ne comporte de critères redondants. Evoquons succinctement un troisième exemple ayant trait au **tracé d'une liaison à grande vitesse** afin d'illustrer ce que peut être un critère redondant.

Exemple : Tracé d'une liaison à grande vitesse

Soit à comparer différents tracés d'une ligne de transport devant relier, à grande vitesse, deux aéroports. Imaginons que, pour ce faire, la famille F comporte :

g_1 : longueur de la ligne,
g_2 : coût de l'investissement,
g_3 : coût d'entretien annuel,
g_4 : gain de temps pour les passagers,
g_5 : impact sur le trafic des aéroports ;
g_6 : impact des nuisances sonores pour les riverains ;
g_7 : impact de l'effet de coupure provoqué par la ligne.

Admettons que cette famille satisfasse aux axiomes 2.2.1 et 2.2.2. Il est très vraisemblable qu'il en sera alors de même avec la famille F\{g_1} formée des six critères g_2 à g_7. Il paraît à peu près impossible d'imaginer une paire d'actions fournissant une réponse positive à l'un quelconque des tests 2.2.1, 2.2.2, 2.2.3. Le critère g_1 est, dans ces conditions, redondant.

2.2.4 Famille cohérente de critères

Les considérations qui précèdent justifient la définition suivante :

DÉFINITION 2.2.1 : Famille cohérente de critères (f.c.c.) : F est une famille cohérente de critères (f.c.c.) dans un contexte décisionnel si tout intervenant Z accepte ou est supposé accepter de fonder le modèle de préférences globales sur d'une part les n critères formant F en tant que modèle de préférences à un niveau restreint et, d'autre part, les axiomes 2.2.1, 2.2.2, 2.2.3 en tant qu'expression de principes de cohérence entre cette modélisation à un niveau restreint et celle qui est recherchée à un niveau global.

2.3 CONCEPTS ET PROPRIÉTÉS EN MARGE DE LA COHÉRENCE

Les axiomes d'exhaustivité, de cohésion, de non redondance formalisent des exigences en-dehors desquelles il paraît difficile de vouloir bâtir un modèle de préférences globales en limitant l'information spécifique à chaque action aux seules valeurs de n triplets de la forme ($g_j(a)$, $q_j[g_j(a)]$, $p_j[g_j(a)]$), $\forall$ j ∈ F. On peut certes imaginer d'autres exigences qui paraîtront souvent naturelles mais toutes celles auxquelles nous avons songé nous ont paru trop astreignantes pour être systématiquement imposées. Celles que nous présentons ci-après sont néanmoins satisfaites par beaucoup de modèles de préférences globales effectivement utilisés en pratique. Ceci implique l'intérêt des définitions auxquelles elles conduisent.

2.3.1 Famille inductive

Dans une famille F, chacun des critères correspond à un axe de signification pour lequel il est admis [1] que la comparaison, toutes choses égales par ailleurs, de deux actions quelconques a et b a un sens en termes de surclassement. Il est de ce fait naturel d'attendre de tout critère $g_k \in F$ que :

$$g_j(b) = g_j(a),\ \forall\ j \neq k \text{ et } b\ S_k\ a \Rightarrow b\ S\ a\ ^{2},$$
$$g_j(b) = g_j(a),\ \forall\ j \neq k \text{ et } b\ I_k\ a \Rightarrow b\ I\ a.$$

Il en est bien ainsi dans toute famille F cohérente car les implications ci-dessus sont des cas particuliers du résultat 2.2.3 sur la contagion du surclassement.

Supposons maintenant que la comparaison de b et a selon le critère g_k justifie le remplacement de S_k par P_k. Est-on de ce seul fait fondé à remplacer S par P ? Nous allons expliquer pourquoi il n'en est rien, même dans une famille cohérente. Pourtant, on peut souhaiter, au moins pour certains critères, qu'il en soit bien ainsi. Ceci explique la raison d'être des définitions qui suivront.

Nous avons déjà souligné, à la fin du 2.2.1 d), que la condition $g_j(b) = g_j(a)$, $\forall\ j \neq k$, est une condition plus faible que celle qui intervient pour asseoir les relations S_k, I_k, Q_k, P_k. Ce genre de relations, restreintes à l'axe de signification du critère g_k, n'acquiert en général une signification au niveau des préférences globales que si les actions en cause sont identiques eu égard aux aspects des conséquences non modélisées dans le support de g_k. Cela explique que les relations d'induction formulées au début de ce paragraphe 2.3.1 ne découlent pas logiquement de la seule définition des critères constituant une

[1] Cf. 1.6 et glossaire du chapitre 1 : Critère.

[2] S ne pouvant ici laisser la place à une relation fondamentale différente de I que si S_k laisse aussi la place à une autre relation fondamentale.

famille F quelconque. Si ces implications sont valables dans une f.c.c., cela est étroitement lié à la manière dont l'axiome de cohésion met en jeu les relations S_k et I_k. Toutefois, ni cet axiome ni les autres ne font intervenir P_k ni directement, ni indirectement. On ne peut donc espérer en déduire qu'une préférence stricte, établie de façon restreinte à l'axe de signification d'un critère (toutes performances égales par ailleurs), induit obligatoirement une préférence stricte au niveau global.

Il suffirait de modifier légèrement l'axiome de cohésion pour que l'induction qui en découle pour S et I en découle aussi pour P. Nous avons écarté ce parti car, à notre avis, il affaiblit trop la portée du concept de f.c.c. En effet :

– Il exclut de F tout critère g_k tel que les conditions permettant de séparer (toutes performances égales par ailleurs) b P_k a de b Q_k a dépendent de certaines des valeurs des performances communes.

– Il exclut qu'un critère g_k conduise à :

$$g_j(b) = g_j(a),\ \forall\ j \neq k,\ b\ P_k\ a \text{ et } b\ Q\ a.$$

Pourtant, le fait que, sur l'axe de signification du critère g_k, la différence $g_k(b) - g_k(a)$ soit jugée suffisamment probante pour fonder une préférence stricte sur l'axe de signification de ce critère ne constitue pas toujours un argument suffisant pour asseoir une préférence stricte au niveau global, notamment lorsque le critère g_k est peu important et que des imprécisions, incertitudes, indéterminations rendent précaires les égalités des autres performances.

DÉFINITION 2.3.1 (critère inductif dans F) : Un critère g_k est inductif dans F si :

$$g_j(b) = g_j(a),\ \forall\ j \neq k \text{ et } b\ H_k\ a \Rightarrow b\ H\ a,\ \forall\ H \in \{I, Q, P, \succ, S\}\ ^{1}.$$

DÉFINITION 2.3.2 (famille inductive) : Une famille F est inductive si elle est cohérente et si chacun de ses critères est inductif dans F.

[1] Au second membre, la relation regroupée peut laisser la place à l'une des relations fondamentales qu'elle peut impliquer (P exceptée car remplacer $\succ$ ou S par P reviendrait à supposer une préférence plus affirmée au niveau global qu'au niveau restreint).

RÉSULTAT (sur la contagion des préférences) : Dans une famille inductive F :

$[b\ S_j\ a, \forall\ j \neq k \text{ et } b\ P_k\ a] \Rightarrow b\ P\ a$,
$[b\ S_j\ a, \forall\ j \neq k \text{ et } b\ Q_k\ a] \Rightarrow b \succ a$ [1].

On établit aisément ce résultat en procédant de manière similaire à ce qui a été fait pour le résultat 2.2.3.

2.3.2 Famille séparable

Dans ce paragraphe, J désigne une sous-famille de F non identique à F. On note F\J la sous-famille des critères de F n'appartenant pas à J. Cette dernière est nécessairement non vide.

Considérons deux actions a et b ayant mêmes performances pour tout critère n'appartenant pas à une famille définie J. Intéressons-nous à la manière dont elles se comparent dans un modèle de préférences globales fondé sur F supposée cohérente. On peut se demander si, en vertu des axiomes qui définissent cette cohérence ainsi que du type de raisonnement toutes choses égales par ailleurs qui intervient dans la définition de chaque critère, il ne devrait pas être légitime de pouvoir raisonner ce genre de comparaison, abstraction faite des performances communes sur les critères de F\J. Autrement dit, lorsque le modèle conduit à accepter b H a, doit-il automatiquement conduire à b′ H a′ entre deux actions b′ et a′ caractérisées respectivement comme b et a, à ceci près que les performances communes $g_j(b') = g_j(a')$, $\forall\ j \in F\backslash J$ ne sont pas toutes les mêmes que celles communes à b et a ?

Lorsque J contient un unique critère g_k, on sait que la cohérence de F implique :

$[g_j(b) = g_j(a), \forall\ j \neq k, \text{ et } b\ S_k\ a] \Rightarrow b\ S\ a$,
$[g_j(b) = g_j(a), \forall\ j \neq k, \text{ et } b\ I_k\ a] \Rightarrow b\ I\ a$.

[1] Au second membre, la relation regroupée peut laisser la place à l'une des relations fondamentales qu'elle implique.

Dans ce cas particulier, il est, d'après la construction même du critère, légitime de raisonner avec g_k toutes performances égales par ailleurs à propos des relations I et S. On a vu au paragraphe précédent pourquoi, même lorsque J est réduite à un seul critère, il n'en va pas de même pour les relations P, Q ou $\succ$. Le raisonnement toutes performances égales par ailleurs sur le critère g_k est donc :

– toujours possible dans une famille cohérente à propos des relations I et S,
– possible à propos des relations P, Q et $\succ$ si g_k est inductif.

Examinons à présent le cas où J contient plus d'un critère. Est-il légitime de raisonner sur les critères de J toutes performances égales par ailleurs ? Comme dans le cas où J ne contient qu'un seul critère, on peut envisager des réponses qui varient avec la nature de la relation H considérée. Un exemple simple va nous permettre de montrer que, même dans le cas le plus favorable (le surclassement), la réponse à la question posée ne peut être systématiquement positive.

Soit F une famille cohérente constituée de trois vrai-critères [1] g_1, g_2, g_3 ne pouvant prendre que des valeurs entières comprises entre 0 et 10. Supposons que, sur cette base, il apparaisse légitime de modéliser les préférences globales en ayant recours au vrai-critère [2] g(a) défini par :

$$g(a) = g_1(a) \cdot g_2(a) + g_2(a) \cdot g_3(a) + g_3(a) \cdot g_1(a).$$

Examinons, sur la base des données du tableau 2.3.1, la manière dont se comparent les actions b et a d'une part, b′ et a′ d'autre part selon le modèle de préférences globales ainsi défini.

[1] De ce fait, $b\ I_j\ a \Leftrightarrow g_j(b) = g_j(a)$.

[2] dont on peut s'assurer simplement qu'il vérifie les axiomes d'exhaustivité et de cohésion.

Tableau 2.3.1 : Exemple numérique

	g_1	g_2	g_3	g
a	10	1	0	10
b	4	5	0	20
a′	10	1	10	120
b′	4	5	10	110

Les valeurs numériques choisies montrent que, dans ce modèle, deux actions qui ont mêmes performances sur le critère g_3 ne peuvent être comparées en ne prenant appui que sur les seules performances qui les différencient, à savoir celles de la sous-famille $J = \{g_1, g_2\}$. En faisant varier la performance commune g_3 de 0 à 10, on passe de b S a à a′ S b′ sans que les surclassements inverses n'aient lieu d'être acceptés. Pour qu'il en soit ainsi, il faudrait introduire un seuil d'indifférence au moins égal à 10, ce qui n'est en rien une conséquence logique des hypothèses.

Cet exemple illustre ce qui peut se passer lorsque l'on veut séparer une sous-famille J des autres critères de F afin de ne faire intervenir que les premiers pour fonder le surclassement entre actions ayant mêmes performances sur les critères de F\J. Pourtant, compte-tenu de la manière dont les critères ont été élaborés, compte-tenu de ce que l'on sait ou de ce que l'on veut relativement aux préférences globales, il peut paraître justifié de poser, a priori, que telle ou telle sous-famille J peut ainsi être séparée des autres critères pour raisonner le surclassement dans les cas dont il vient d'être question. Ceci nous conduit à la définition suivante :

DÉFINITION 2.3.3 (sous-famille faiblement séparable) : Dans une famille F, une sous-famille J ($J \neq F$) est faiblement séparable si, considérant quatre actions a, b, a′, b′ telles que :

$g_j(b) = g_j(a), \forall j \in F\backslash J,$
$g_j(b') = g_j(a'), \forall j \in F\backslash J,$

$g_j(b) = g_j(b'), \forall j \in J,$
$g_j(a) = g_j(a'), \forall j \in J,$

alors :

$b\ H\ a \Rightarrow b'\ H\ a', \forall H \in \{S, I, R\}.$

Remarquons que cette définition ne changerait pas si on en éliminait le cas H = R. Il est en effet facile de la déduire d'une définition qui serait restreinte à $H \in \{S, I\}$. Moyennant quelques précautions, on pourrait même aller jusqu'à limiter la définition au seul cas H = S. Compte-tenu de ce qui a été dit au début de ce paragraphe, une sous-famille constituée d'un unique critère est nécessairement faiblement séparable dans une famille cohérente. Pour des sous-familles contenant plus d'un critère, l'exemple qui vient d'être donné montre qu'il n'en va pas toujours ainsi, même dans une famille cohérente.

DÉFINITION 2.3.4 (sous-famille séparable) : Dans une famille F, une sous-famille J ($J \neq F$) est séparable si, considérant quatre actions a, b, a′, b′ telles que :

$g_j(b) = g_j(a), \forall j \in F\backslash J,$
$g_j(b') = g_j(a'), \forall j \in F\backslash J,$
$g_j(b) = g_j(b'), \forall j \in J,$
$g_j(a) = g_j(a'), \forall j \in J,$

alors :

$b\ H\ a \Rightarrow b'\ H\ a', \forall H \in \{I, P, Q, R, S, \succ, \sim\}.$

Remarquons que le concept de sous-famille séparable contenant un unique critère coïncide avec celui de critère inductif défini au 2.3.1. Notons également que, de même que la faible séparabilité d'une famille de plus d'un critère n'est pas impliquée par la faible séparabilité de chaque critère d'une famille cohérente, une famille ne contenant que des critères inductifs n'est pas nécessairement séparable.

DÉFINITION 2.3.5 (famille séparable, faiblement séparable) : Une famille de critères F est respectivement séparable, faiblement séparable si elle est cohérente et si chacune des sous-familles J ($J \neq F$) qu'elle comporte est respectivement séparable, faiblement séparable.

Notons qu'une famille de critères séparable est nécessairement inductive.

Dans le cas particulier où l'on s'intéresse à un s.r.p. (I, P) au niveau global et où F est une famille de vrai-critères, la séparabilité d'une sous-famille se confond avec une forme d'indépendance traditionnellement appelée "indépendance au sens des préférences". Nous examinerons plus en détail cette forme d'indépendance au chapitre 4.

Signalons enfin qu'une modification apparemment anodine de l'axiome de cohésion rend séparable toute famille F vérifiant, outre l'axiome d'exhaustivité, cette nouvelle version de l'axiome de cohésion. Cette modification consiste à remplacer, dans la seconde partie de l'axiome, l'égalité $g_k(b) = g_k(a)$ par b I_k a (il est tout d'abord facile d'établir que, dans cette nouvelle version de l'axiome, toute sous-famille de n – 1 critères est séparable dans F puis que la même propriété vaut pour des sous-familles ayant moins de n – 1 critères). Le fait qu'une si faible relaxation d'une condition locale puisse entraîner une propriété globale si forte illustre bien la puissance du raisonnement axiomatique. Il illustre aussi ce qu'il peut y avoir d'artificiel à vouloir légitimer le réalisme de telles structures, telles procédures au nom de considérations purement axiomatiques.

2.3.3 Famille fondamentale

Parmi les n critères d'une famille F, il se peut fort bien que certains ne jouent qu'un rôle accessoire au niveau des préférences globales en ce sens que leur impact sur la modélisation à ce niveau n'est pas fondamental. Il en est ainsi d'un critère g_k lorsque, quelles que soient les actions a et b que l'on puisse concevoir sous les conditions

$g_k(a) = g_k(b)$, b H a, H ∈ {P, Q, I},

améliorer la performance $g_k(a)$ et détériorer la performance $g_k(b)$ (tout en maintenant inchangés $g_j(a)$ et $g_j(b)$, $\forall j = k$) conduisent à caractériser respectivement deux actions a′ et b′ qui se comparent "à peu près" comme a et b :

si b P a, alors b′ P a′ ou b′ Q a′,
si b Q a, alors b′ Q a′ ou b′ I a′,
si b I a, alors b′ I a′ ou a′ Q b′.

Dire que g_k n'a pas un impact fondamental au niveau des préférences globales, c'est dire que ce critère n'est susceptible, à lui seul (d'après la façon dont deux actions se comparent selon son axe de signification, toute autre

performance demeurant inchangée par ailleurs), ni d'inverser le sens d'un surclassement, ni de transformer un surclassement en incomparabilité.

DÉFINITION 2.3.6 (critère fondamental) : Le critère g_k est un critère fondamental dans F s'il est possible de concevoir quatre actions a, b, a′, b′ telles que :

$g_k(a) = g_k(b)$,
$\forall j \in F \setminus \{k\}$, $g_j(a') = g_j(a)$, $g_j(b') = g_j(b)$,
b P a ou b Q a ou [b S a et Non(a S b)] et
a′ R b′ ou a′ P b′ ou a′ Q b′ ou [a′ S b′ et Non(b′ S a′)].

Aucun critère redondant (au sens du 2.2.3) dans une famille F n'est fondamental. Il en va de même dans une famille cohérente F avec un critère g_k dont le seul rôle consiste à départager des actions qui, si elles n'étaient jugées que selon les n – 1 autres critères, seraient regardées comme indifférentes. Toujours dans une famille cohérente, un critère g_k peut ne pas être fondamental parce que, une fois définies les performances $g_j(a)$, $\forall j \neq k$, la marge de liberté qui subsiste pour la performance $g_k(a)$ est si étroite que ce critère, même s'il est regardé comme très important, ne peut avoir à lui seul, au niveau des préférences globales, l'impact attendu d'un critère fondamental. Dans bien des cas, on peut vouloir construire F en évitant la présence de tels critères superflus.

DÉFINITION 2.3.7 (famille fondamentale) : Une famille de critères F est fondamentale si elle est cohérente et si chacun de ses critères est fondamental dans F.

2.4 QUELLES FORMES D'INDÉPENDANCES CONVIENT-IL DE RECHERCHER ?

Pour des raisons souvent confuses, l'idée prévaut que la famille F doit être formée de critères "indépendants". Pourtant, aucun des trois axiomes "fondateurs" d'une famille cohérente F ne fait explicitement mention d'une notion d'indépendance. La définition de chaque critère oblige cependant à postuler une première forme d'indépendance. Nous l'approfondissons au 2.4.1. Nous étudions ensuite une autre forme d'indépendance fréquemment regardée comme une hypothèse de travail confortable et acceptable. Le dernier paragraphe traite d'une troisième forme d'indépendance, toujours souhaitable mais souvent impossible à réaliser.

2.4.1 Isolabilité de chaque critère (indépendance au sens des dispersions)

Rappelons que (cf. 1.6), pour chacun des critères g_k de la famille F, il a fallu :

1°) concevoir un axe de signification sur lequel deux actions pouvaient être comparées, abstraction faite des effets ou attributs non pris en compte par le critère ;

2°) définir le mode de calcul de la performance $g_k(a)$ pour toute action a sur la base de l'évaluation de l'action a relativement aux seuls effets et attributs formant le support de g_k (c'est-à-dire jugés pertinents pour fixer la valeur de la performance selon ce critère compte-tenu de l'axe de signification retenu).

Il est rare [1] que la performance $g_k(a)$ découle de la connaissance d'une caractéristique unique. En-dehors de ce cas, la performance $g_k(a)$ fait intervenir, de par son mode de calcul (ponctualisation sur une dimension, sous-agrégation de plusieurs dimensions, ...) et/ou de par les seuils de discrimination (indifférence, préférence) qui lui sont associés, une représentation de l'action a non réduite à un chiffre unique jugé indiscutable. Cette performance $g_k(a)$ constitue alors une synthèse d'une information plus ou moins complexe. La comparaison de deux actions quelconques a et a′ selon l'axe de signification du critère g_k doit, dans tous les cas, pouvoir être faite en ne faisant intervenir les deux actions qu'au travers [2] des deux seules performances $g_k(a)$ et $g_k(a')$.

[1] Cela suppose d'une part que l'axe de signification du critère soit identifiable à l'échelle d'une unique dimension et, d'autre part, que toute action puisse être évaluée sur cette dimension au moyen d'un indicateur d'état ponctuel avec des seuils de dispersion par excès et par défaut tous deux nuls (cf. 1.6).

[2] Par définition (cf. MMCAD, 9.3), le mode de calcul des seuils d'indifférence et de préférence ne fait en effet intervenir l'action dans ce qu'elle a de spécifique qu'au travers de sa seule performance.

Ces rappels (cf.1.6) montrent que concevoir un critère, c'est avant tout isoler certains aspects des conséquences des actions en vue de pouvoir fonder sur eux seuls (c'est-à-dire abstraction faite des autres) des comparaisons reflétant des points de vue spécifiques. De façon plus précise, nous traduirons le fait que :

$$g_k(a') \geq g_k(a) \Rightarrow a' \, S \, a$$
$$\text{dès que } ^1 \; g_j(a') = g_j(a), \; \forall \, j \in F \backslash \{k\} \qquad \text{(r.2.4.1)}$$

en disant que l'axe de signification du critère g_k est **isolable dans F**. Il n'y a axe de signification (et, par conséquent, critère) que s'il y a cette propriété d'isolabilité. Comme on l'a vu, cette isolabilité de l'axe de signification de chaque critère est impliquée par les axiomes définissant une famille cohérente de critères [2]. L'exemple qui suit en illustre la signification. Nous en discutons enfin la portée, notamment en termes d'indépendance au sens des dispersions.

Exemple de la "comparaison de tracés de lignes à haute tension"

La comparaison de tracés de lignes à haute tension (reliant toutes un premier pôle P_1 à un second pôle P_2) doit prendre en compte, à côté de points de vue techniques, écologiques, agricoles, ..., les gênes de toutes sortes (atteintes à la propriété, esthétique, bruit, craintes d'accidents, ...) que peuvent éprouver les habitants du voisinage de la ligne. Des études ont montré [3] que la densité des zones traversée constituait un bon indicateur pour saisir certains aspects de cette gêne. Toutefois, étant donné un tracé a, la densité varie généralement lorsqu'on le parcourt depuis P_1 jusqu'à P_2. Bâtir un critère g_1 reflétant l'importance plus ou

[1] Soulignons une fois encore (cf. 2.2.1 d)) que l'égalité des performances n'implique pas l'identité des conséquences.

[2] En effet, il résulte du résultat 2.2.3 sur la contagion du surclassement que chaque critère est nécessairement faiblement séparable dans une famille cohérente.

[3] Voir notamment Grassin (1986).

moins grande de la gêne qu'éprouvent les habitants du voisinage du tracé a consiste donc à élaborer une synthèse des diverses densités des zones successives traversées.

Il est naturel d'introduire dans ce but l'indicateur de dispersion $\delta_1^a(d)$ indiquant, pour chaque valeur de la densité d, le pourcentage de la longueur du tracé a situé en zone de densité d. On peut en outre introduire une fonction v(d) destinée à appréhender le fait que plus la densité d'une zone est forte et plus il est difficile de passer hors de portée de vue des maisons, voire d'éviter les surplombs. Ce "niveau de gêne" v(d) est par conséquent voisin de 0 et très faiblement croissant pour des densités de l'ordre de quelques habitants au km^2 alors qu'il croît rapidement dans les zones un peu plus peuplées (quelques dizaines d'habitants au km^2) pour cesser à nouveau de croître dans les zones très peuplées (effet de saturation). On peut alors envisager de définir la synthèse recherchée par la moyenne du niveau de gêne que procure le tracé a [1] :

$$g_1(a) = \sum_d v(d) \cdot \delta_1^a(d).$$

Ce qui est appréhendé au travers de la performance $g_1(a)$ reflète en réalité non pas la gêne intégrale que ressentent les habitants situés au voisinage de la ligne a (laquelle est, toutes choses égales par ailleurs, proportionnelle à la longueur L(a) du tracé) mais une gêne unitaire, c'est-à-dire rapportée à une unité de longueur quelconque, le km par exemple. Le fait que la préférence aille systématiquement vers les tracés les plus courts (toutes choses égales par ailleurs) se retrouve dans tous les critères : économiques, techniques, écologiques, agricoles, ... Afin de ne pas surévaluer l'impact de cet "effet longueur" et de clairement cerner la manière dont il doit influencer les préférences globales, il peut paraître légitime d'en faire un critère séparé : $g_n(a) = L(a)$. Dans ces conditions, les autres critères doivent, comme g_1, être rapportés à l'unité de longueur.

[1] critère de ponctualisation classique, cf. (r.1.6.2).

Montrons que la façon de raisonner ci-dessus peut fort bien ne pas être acceptable, précisément par défaut d'isolabilité de certains axes de signification tel celui du critère g_1. Considérons pour cela deux tracés a et b de même longueur L dont les dispersions de densité soient respectivement définies par :

pour a : 95 % du tracé en zones de densité très basse (v(d) voisin de 0),
5 % du tracé en zones de densité très élevée (v(d) voisin de 1),
pour b : 100 % du tracé en zones de densité faible.

Supposons encore que a et b ne se différencient pas selon les autres critères économiques, techniques, écologiques, agricoles, ... Il s'ensuit que a et b se comparent obligatoirement de la même façon, quel que soit L. Pourtant, il est parfaitement légitime, lorsque L est petit, de préférer le tracé a et, lorsque L est grand, de préférer le tracé b. Il est clair que le critère g_1 ne peut, au côté des autres critères, rendre compte de préférences ainsi faites.

Pour en terminer avec cet exemple, soulignons que la difficulté d'isolabilité qu'il met en évidence ne peut être surmontée en cherchant à définir une gêne intégrale au lieu d'une gêne unitaire. Cela consisterait à remplacer le critère g_1 par un critère g_1' défini de la même manière à partir d'une dispersion $\delta_1^{a'}(d)$ fondée non plus comme $\delta_1^a(d)$ sur le pourcentage du tracé en densité d mais sur le nombre de km du tracé en densité d. Etant donné que :

$$g_1'(a) = L(a) \cdot g_1(a),$$

il est clair que le critère g_1' conduira toujours à comparer de la même façon les tracés a et b quelle que soit leur longueur commune L.

Considérons à nouveau le cas, relativement particulier, d'un critère tel que la performance $g_k(a)$ découle de la connaissance exacte d'une caractéristique unique (prix d'achat de l'objet a par exemple). Admettre que a′ et a se comparent comme les performances $g_k(a')$ et $g_k(a)$ dès l'instant où elles ont mêmes performances selon les n − 1 autres critères traduit l'idée simple qu'on est bien en présence de ce qu'on a appelé un critère : l'isolabilité de son axe de signification ne peut avoir ici aucune sorte d'implication sournoise. L'exemple qui précède a montré qu'il pouvait en être autrement en-dehors de ce cas. L'isolabilité veut en effet que l'information relativement complexe que synthétise g_k, lorsqu'elle est seule à l'origine de la comparaison de deux actions, conduise à des jugements de préférences qui ne soient en rien influencés par la valeur commune des performances selon les $n - 1$ autres critères. C'est dire que la manière d'opérer la synthèse en un seul chiffre $g_k(a)$ d'une information plus riche (faisant par exemple intervenir un indicateur de dispersion comme dans l'exemple précédent) doit être conçue de telle sorte que, s'il y a égalité des performances avec une quelconque action a′ sur tous les autres critères, alors la comparaison de a avec a′ puisse être entièrement justifiée (le cas échéant révisée) à partir des deux seuls nombres $g_k(a)$ et $g_k(a')$.

Dans bien des cas, la nécessité d'une synthèse n'est due qu'au caractère dispersé de l'information : l'impact de la mise à exécution d'une action sur une dimension donnée ne peut être convenablement représenté par un nombre certain regardé comme exact. C'est précisément pour faire face à ce type de difficultés qu'ont été introduits les concepts de seuils de dispersion et d'indicateurs de dispersion [1]. Vouloir prendre en compte, au travers de l'un et d'un seul des critères de F, le type de conséquences associées à une telle dimension, c'est admettre que, quelle que soit la manière de décrire cette information dispersée (distribution géographique comme dans l'exemple précédent, distribution probabiliste comme dans l'exemple du choix d'un premier emploi, seuils de dispersion par excès et par défaut [2]), celle-ci se prête à des comparaisons indépendamment des niveaux atteints par les performances selon les autres critères. C'est pourquoi on peut dire dans ce cas que l'isolabilité est une propriété qui implique (de façon quelque peu sournoise) un mode d'indépendance que l'on peut qualifier d'**indépendance au sens des dispersions**.

Lorsque l'indicateur de dispersion est de nature probabiliste, cette indépendance au sens des dispersions est connue sous le nom d'**indépendance au sens des utilités**. Une autre manifestation de l'indépendance au sens des dispersions se retrouve dans le concept de seuils de discrimination tel que nous l'avons défini [3]. Dire en effet que les seuils q_k et p_k (lesquels marquent respectivement la frontière entre les zones d'indifférence et de préférence faible, de préférence faible et de préférence stricte) peuvent recevoir une valeur indépendante du niveau des performances selon les autres critères, c'est faire une hypothèse qui est dans l'esprit de l'isolabilité. Soulignons cependant que

[1] Cf. 1.5 et 1.6.

[2] Cf. 1.6.3, (r.1.6.6).

[3] Cf. 1.6.

c'est aller plus loin que ce que requiert la définition d'un critère et l'isolabilité de son axe de signification au sein de F.

La façon de se prémunir contre les implications sournoises de cette propriété d'isolabilité [1] lorsque l'on conçoit les divers critères de F dépend du type de démarche adopté. Dans le cadre d'une démarche descriptive, il convient, en toute rigueur, de vérifier que la réalité est bien conforme aux hypothèses d'indépendance requises par les critères choisis. Dans le cadre d'une démarche constructive, il s'agit plus simplement de savoir si des hypothèses constituent ou non une base de travail acceptable pour raisonner, argumenter, transformer les préférences.

2.4.2 Séparabilité de chaque sous-famille de critères (indépendance au sens des préférences)

Dire d'une famille F qu'elle est séparable ou seulement faiblement séparable (cf. définition 2.3.5), c'est reconnaître la validité du raisonnement "toutes choses égales par ailleurs" dans des conditions très larges. Comme nous l'avons souligné à maintes reprises, le concept même de critère (propriété d'isolabilité), tout comme celui de famille cohérente F (axiome de cohésion) se fondent sur un usage restreint de ce mode de raisonnement. Ceci n'implique cependant pas que toute sous-famille J contenant au moins deux critères soit nécessairement faiblement séparable dans F. Nous allons tout d'abord illustrer ce fait (de façon moins abstraite que nous ne l'avons fait au 2.3.2) en faisant appel à un autre exemple, celui du **choix d'un nouvel emploi**. Nous donnerons ensuite un premier aperçu du rôle joué par cette forme d'indépendance (qu'est la séparabilité) ainsi que des raisons qui poussent à la rechercher.

Exemple du "choix d'un nouvel emploi"

Monsieur Z est à la recherche d'un nouvel emploi. Depuis de nombreuses années, son travail l'oblige à passer en moyenne trois

[1] Soulignons que la synthèse qu'opère un critère g_k peut avoir une autre origine que le caractère dispersé de l'information : c'est dire que l'idée d'indépendance au sens des dispersions (et, a fortiori, des utilités) est moins générale que celle d'isolabilité.

nuits par semaine hors de son domicile et il souhaiterait maintenant trouver un travail plus sédentaire. Il voudrait en profiter pour quitter la petite ville dans laquelle il réside pour habiter dans une grande agglomération et pouvoir ainsi aller plus facilement en famille au concert, au théâtre, visiter une exposition ou, tout simplement, sortir de temps en temps dans un quartier animé. Il aimerait, de surcroît, améliorer son salaire. Imaginons qu'il juge tout emploi qu'il convoite à partir des trois critères suivants :

g_1 : pourcentage de nuits qu'il passera à son domicile ;
g_2 : note (entre 0 et 10) traduisant l'attrait de l'agglomération dans laquelle il lui faudra résider ;
g_3 : variation relative du salaire annuel en %.

Supposons qu'en vue d'expliciter ses préférences il cherche à comparer les quatre emplois a, b, a′, b′ dont les performances sont données tableau 2.4.1. Il est clair qu'il préfère a′ à a et b′ à b. Intéressons-nous plus particulièrement à la manière dont il compare a et b d'une part, a′ et b′ d'autre part.

Il juge a préférable à b. Dans les deux cas, son salaire demeure égal à ce qu'il est aujourd'hui. Avec a, il accroît beaucoup moins sa sédentarité qu'avec b mais il estime que les différences d'attrait entre les deux localisations constituent un élément décisif en faveur de a. A ses yeux, il en va autrement lorsqu'il compare a′ et b′. L'importante augmentation de salaire commune à ces deux emplois peut, en partie, servir à financer des sorties lui permettant de satisfaire ses aspirations culturelles et artistiques. De ce fait, l'intérêt qu'il porte à l'agglomération de a′ perd de sa force face à l'attrait que représente une activité totalement sédentaire. Il préfère donc b′ à a′. Dans ces conditions, la sous-famille $J = \{g_1, g_2\}$ n'est même pas faiblement séparable dans F puisque l'on a :

a S b et Non(b S a),
Non(a′ S b′) et b′ S a′.

Une famille F étant donnée, supposons qu'elle ait été utilisée pour définir un système relationnel de préférences sur A. Il s'ensuit que, pour toutes paires d'actions, on est en mesure de

dire laquelle des relations de préférences H les relie et dans quel sens. Dans ces conditions, il est facile de tester si, vis-à-vis du modèle de préférences globales ainsi défini sur l'ensemble A considéré, F est ou n'est pas séparable, est ou n'est pas faiblement séparable. On constate que la plupart des modèles sur lesquels l'aide à la décision prend effectivement appui implique que F soit au moins faiblement séparable. Le modèle de préférences globales est couramment obtenu en ayant recours à ce que nous appellerons, au chapitre suivant, une procédure d'agrégation multicritère. Nous verrons que les procédures classiques qui se fondent sur l'idée de somme pondérée et, plus généralement, sur les formes additives et multiplicatives que préconise la théorie de l'utilité multiattribut requièrent la séparabilité de F. Celles (comme ELECTRE) qui se fondent sur les concepts de concordance et de discordance se satisfont de la faible séparabilité. C'est dire l'importance du rôle joué par cette forme d'indépendance.

Tableau 2.4.1 : Exemple du choix d'un nouvel emploi

Action \ Critère	g_1	g_2	g_3
a	75	10	0
b	100	2	0
a′	75	10	40
b′	100	2	40

Changeons d'optique : la famille F étant toujours traitée comme une donnée, supposons que l'on veuille maintenant l'utiliser pour définir un système relationnel de préférences sur A. On sait que la plupart des procédures auxquelles on peut songer vont impliquer que F soit exploitée comme si elle était au moins faiblement séparable, voire séparable. Il devient alors nécessaire de s'interroger sur la légitimité de cette forme d'indépendance. Pour cela, on est naturellement tenté de chercher une réponse à la question : "F est-elle faiblement séparable, séparable ?".

Telle qu'elle est formulée, la question ci-dessus n'a, le plus souvent, pas de sens. En effet, pour qu'elle en ait un, il faut tout d'abord qu'il existe quelque part un système relationnel de préférences qui soit le lieu où cette forme d'indépendance est ou n'est pas vérifiée. Il faut ensuite avoir accès à ce système sans le perturber tout en parvenant à valider ou à falsifier la propriété. Ce sont-là des conditions rarement remplies en pratique. Rappelons (cf. 1.7) que, pour des raisons sur lesquelles nous ne reviendrons pas ici, le système de préférences que l'on cherche à définir en vue de l'aide à la décision ne doit pas et ne peut pas être systématiquement pensé comme reflet ou description d'un système qui est supposé implanté dans la tête d'un individu bien identifié dont il dicte souverainement les choix.

Plaçons-nous néanmoins dans un cas où il soit possible d'identifier un individu Z dont on cherche à décrire les préférences relativement aux actions de A en prenant appui sur la famille F. Afin que la question formulée ci-dessus ait un sens, il faut encore admettre que, pour n'importe quelle paire d'actions, la relation H qui les relie s'impose à Z de façon suffisamment nette et stable pour qu'en en prenant localement et partiellement connaissance, un observateur extérieur ne risque pas, par les questions qu'il soulève, les réflexions et réactions qu'il suscite de la part de Z, de changer, voire de créer [1], ce qu'il ne devrait qu'observer. Mais, si l'on considère au contraire que le système de valeurs, les convictions, l'expérience de Z ne structurent qu'imparfaitement ces préférences par référence à un réseau de lignes de force relativement intangible qui enserre dans ses mailles des zones d'interrogation, d'opinions fragiles, voire conflictuelles et contradictoires, on est forcé d'admettre que les questions posées, les réflexions et réactions suscitées puissent contribuer, dans un sens ou dans un autre, à lever les interrogations, à trancher les conflits, à dépasser les contradictions et, pourquoi pas, à déstabiliser certaines convictions. On est alors amené à se demander si, face à la complexité et au caractère

[1] Cf. Roy (1987).

artificiel des situations sur lesquelles Z doit s'interroger [1], l'homme d'étude qui cherche à savoir si F est ou non séparable n'influence pas fortement la réponse, soit inconsciemment par la manière dont il formule les questions, soit plus consciemment par le désir qu'il a d'arriver à de telles conclusions.

Lorsque, pour les raisons qui précèdent, on ne peut dire si F est ou n'est pas séparable, est ou n'est pas faiblement séparable, on peut adopter une démarche constructive et reformuler comme suit la question posée plus haut : "l'hypothèse de séparabilité ou de faible séparabilité constitue-t-elle une base de travail acceptable pour construire, sur F, un modèle de préférences globales approprié à l'aide à la décision ?". Si la réponse est non, deux points peuvent être envisagés :

– chercher à bâtir un modèle ad hoc [2] dans lequel le type d'indépendance que l'on estime devoir être pris en compte s'avère convenablement traduit, au moins sur un plan qualitatif (il suffit de se reporter à l'exemple du choix d'un nouvel emploi pour concevoir combien cela peut être difficile à réaliser) ;
– chercher à modifier l'axe de signification d'un ou plusieurs critères de façon à faire disparaître, dans la nouvelle famille ainsi conçue, le type de liaisons qui a été jugé irréductible dans la première (nous illustrons ci-après cette seconde possibilité).

Dans l'exemple ci-dessus (du choix d'un nouvel emploi), on peut tout d'abord modifier l'axe de signification du critère g_2 pour en faire un critère g_2' qui reflète l'amélioration des conditions d'accès à la grande agglomération et à la culture qu'offre le nouvel emploi. La note (toujours comprise entre 0 et 10) par laquelle Z évalue la performance selon ses nouveaux critères doit maintenant prendre en compte la part du supplément de salaire qu'il envisage d'allouer au financement de sorties lui permettant de satisfaire ses aspirations culturelles et artistiques. La perfor-

[1] Cf. chapitre 4.

[2] On verra des exemples de ce type de modèle au 4.2.2.

mance selon le critère g_3 doit ensuite être rabaissée d'autant de façon à éviter tout double compte. Ceci change un peu l'axe de signification de ce dernier critère et en fait un critère g_3'.

Avec la famille $F' = \{g_1, g_2', g_3'\}$, les performances de a, b, a′ n'ont aucune raison d'être différentes de celles que montre (sur la base de F) le tableau 2.4.1. En revanche, les performances de b′ peuvent, par exemple, être modifiées comme suit :

$$g_1(b') = 100,\ g_2'(b') = 9,\ g_3'(b') = 30.$$

Le fait que Z préfère a à b et b′ à a′ ne contredit plus l'hypothèse de séparabilité de la sous-famille $\{g_1, g_2'\}$ dans F′. De façon plus générale, la forme de liaisons mises en avant pour falsifier la séparabilité de F est maintenant internalisée dans le critère g_2' et rien ne paraît plus devoir s'opposer à ce que F′ soit regardée comme une famille séparable.

Supposons que, dans les préférences que l'on cherche à décrire ou dans le modèle que l'on souhaite construire à partir d'une famille F, la sous-famille J soit séparable dans F. Il s'ensuit que, si l'on cherche seulement à comparer des actions qui ont mêmes performances sur les critères de F\J, cette comparaison ne fait intervenir que les performances relatives aux seuls critères de J. Supposons enfin que ce genre de comparaisons ne fasse intervenir ni incomparabilité, ni préférence faible, ni intransitivité de I ou de P. On est alors dans les conditions qui ramènent la séparabilité à l'indépendance au sens des préférences (cf. 2.3.2).

Dans le corps d'hypothèses qui vient d'être précisé, la sous-famille J définit un préordre complet sur tout sous-ensemble d'actions dont les performances ne diffèrent que sur les seuls critères de J (ce préordre n'étant en rien influencé par les valeurs particulières des performances selon les critères de F\J). **Ceci équivaut à dire que la famille J se comporte comme un vrai-critère.** C'est pourquoi, à la suite de Ting (1971), nous parlerons dans ce cas **de sous-famille contractable dans F en un vrai-critère.** Le lecteur constatera qu'il est aisé d'étendre ce concept de façon à pouvoir parler d'une sous-famille J contractable dans F en un pseudo-critère.

Soulignons que si le critère g_J obtenu par une telle contraction est formellement substituable dans F à la sous-famille J (pour décrire ou construire des préférences), son axe de signification peut paraître artificiel et, pour cette simple raison, s'avérer impropre à une démarche constructive.

Enfin, il est clair qu'il ne peut y avoir contractabilité d'une sous-famille J en un critère de nature imposée (pseudo, pré ou quasi-critère) que si les trois conditions ci-après sont remplies :

– J est séparable dans F ;
– la prise en compte des seuls critères de J, toutes choses égales par ailleurs, exclut toute incomparabilité ;
– les relations I, P, Q associées aux seuls critères de J concernent une structure ordonnée compatible avec la nature imposée du critère (cf. 1.4 et 1.6).

Lorsque la procédure d'agrégation multicritère (cf. chapitre 3) revêt une forme additive ou multiplicative, les trois conditions envisagées ci-dessus sont remplies. Il s'ensuit que toute sous-famille apparaît alors comme contractable. Le lecteur vérifiera sans peine que, dans les méthodes ELECTRE au contraire, aucune sous-famille n'est contractable.

2.4.3 Absence de facteurs influençant conjointement plusieurs critères (indépendance d'ordre structurel)

Considérons à nouveau la famille F′ (séparable) définie ci-dessus dans le cadre de l'exemple du choix d'un nouvel emploi. Les critères g_2' et g_3' ne sont pas structurellement indépendants en ce sens que si un nouvel emploi conduit à une performance excellente selon le critère g_3', alors Z ne peut lui attribuer une note nulle (ni même trop mauvaise) selon le critère g_2'.

Dans les problèmes de choix de tracés d'une liaison ferroviaire [1], routière [2] ou de lignes à haute tension [3], il n'est pas rare que la famille F de critères fasse intervenir un facteur commun à plusieurs des critères considérés, à savoir la longueur du tracé. Pour ces critères, en général, plus long est le tracé et plus mauvais il apparaît selon ces critères.

Les exemples évoqués ci-dessus montrent que l'on peut être fréquemment conduit à élaborer une famille F de critères telle que deux ou davantage, formant une sous-famille J, présentent une

[1] Ministère des Transports (1984).

[2] Cf. MMCAD, 10.3.2.

[3] Cf. ci-dessus, exemple du tracé de lignes à haute tension.

liaison d'ordre structurel (au moins relativement à l'ensemble A que l'on considère). Si F est une famille cohérente, cette liaison ne peut évidemment pas être fonctionnelle : l'un au moins des critères de J serait, dans ce cas, redondant. La liaison peut être due à la présence de facteurs (qui peuvent être externes et/ou implicites) susceptibles, dans certains cas tout au moins, d'influencer conjointement les performances des critères de J. Certaines configurations de ces performances peuvent alors s'avérer invraisemblables ou encore des corrélations nettement marquées peuvent être mises en évidence à partir de l'ensemble A. Dans de telles conditions, aucun des critères de J ne peut être éliminé puisque, relativement aux autres, ils véhiculent une part d'informations additionnelles indispensables pour raisonner les préférences. Pourtant, on est tout naturellement conduit à se demander si, en cherchant à bâtir un modèle de préférences globales sur F, on ne court pas un risque : celui de faire jouer un rôle excessif à ce qui est à l'origine de la liaison. On parle alors de "surpondération", de "double compte". Pour comprendre ce dont il s'agit, il convient, une fois de plus, de situer la question posée dans chacune des deux démarches descriptive et constructive.

Dans une démarche descriptive, le modèle de préférences globales qu'il s'agit de décrire pré-existe par définition. Si un rôle excessif est dévolu à quelque aspect que ce soit, cela signifie que la description n'est pas fidèle. La question doit donc être reformulée comme suit : "sachant que la famille F contient une sous-famille J de critères structurellement liés, cela la rend-elle inapte à la description visée ?". Il est clair que cela dépend du cas considéré [1].

Dans une démarche constructive, vis-à-vis de quelles normes pourra-t-on dire que ce qui est à l'origine de la liaison joue un rôle excessif ? Dans la mesure où les facteurs et phénomènes complexes qui sont responsables de cette liaison structurelle entre

[1] Voir notamment à ce sujet MMCAD, 10.3.1.

les critères de J sont trop abstraits [1] ou trop éloignés [2] de ce à partir de quoi s'élaborent, se justifient ou se transforment les préférences, le risque redouté perd toute signification claire. Lorsque, au contraire, ces facteurs et phénomènes sont suffisamment concrets et proches de ce à partir de quoi l'on cherche à raisonner les préférences, l'idée d'une "juste part" qu'il doivent prendre dans la formation de ces dernières peut acquérir un sens. Le risque redouté plus haut est alors lié au fait qu'à l'insu du modélisateur (à cause de la liaison structurelle) ces facteurs et phénomènes ne soient pas cantonnés dans leur juste rôle. Ce risque est toutefois totalement écarté dès lors que chacun des critères de J renvoie à des bénéficiaires distincts ou encore à des points de vue autonomes [3] pouvant par exemple être incarnés par des acteurs distincts.

En conclusion, chercher à travailler avec une famille F de critères, tous structurellement indépendants, paraît sans aucun doute être une orientation recommandable. Il convient toutefois de l'abandonner dès lors qu'elle conduirait à faire intervenir des critères artificiels dont les axes de signification, tout comme les unités dans lesquelles s'expriment les performances, risqueraient d'apparaître obscurs et éloignés de ce à partir de quoi les acteurs conçoivent, argumentent, modifient leurs préférences.

[1] Cf. exemple du choix d'un nouvel emploi en début de 2.4.2.

[2] Cf. MMCAD, 10.3.2 : exemple du tracé autoroutier.

[3] Dans l'exemple du choix d'un nouvel emploi, on peut parler de points de vue autonomes à propos de g_1 : conditions de travail, g_2' : conditions de loisirs, g_3' : gain net.