Chapitre 3

CONFLITS ENTRE CRITÈRES ET PROCÉDURES ÉLÉMENTAIRES D'AGRÉGATION MULTICRITÈRE

RÉSUMÉ

3.1 Dans cette section, on met l'accent sur les liens qui existent entre le caractère conflictuel des critères et le mode de comparaison, en termes de préférences globales, de deux actions.

Dans un premier paragraphe, on précise ce qu'il faut entendre par critères en conflit. La relation de préférences qui lie deux actions peut alors être vue comme la résultante de ces conflits. On montre que deux types de considérations peuvent intervenir pour élaborer cette résultante et, par conséquent, définir un s.r.p.

Au paragraphe suivant, on introduit le concept de **coalition concordance** C(b H a) avec l'affirmation b H a, H ∈ {S, ≻, P, Q, I} (r.3.1.4). Cela nous amène à cerner une première facette de cette notion complexe et ambiguë à laquelle on se réfère en parlant d'importance relative d'un critère vis-à-vis des autres.

A partir d'un exemple numérique, on montre que, même dans le cadre de considérations de premier type, la seule analyse des divers niveaux de concordance est tout à fait insuffisante pour asseoir une relation de préférence à un niveau global. Cela conduit (au 3.1.3) à regarder la coalition C(a P b) comme discordante avec la proposition b S a. Moyennant l'introduction d'un nouveau seuil appelé seuil de veto, chaque critère de cette coalition doit être amené à s'opposer à l'affirmation b S a (cf. (r.2.3.6)). On montre qu'on approche là une autre facette de la notion d'importance relative d'un critère.

Dans certains cas, on peut souhaiter élaborer un s.r.p. non réduit à une simple idée de dominance sans pour autant devoir faire intervenir des informations précises servant à différencier l'importance des critères. Après quelques rappels sur la relation de dominance Δ_F, on introduit dans ce but

(au 3.1.4) plusieurs relations de surclassement emboîtées : S_Δ (cf. r.3.1.11)), S_{PQ} (cf. (r.3.1.13)), $S_{\sim Q}$ (cf. (r.3.1.14)), $S_{\Delta p}$ (cf. (r.3.1.15)).

La prise en compte de considérations de type C n'intervient qu'au 3.1.5 où l'on approfondit le mode de calcul consistant à effectuer un bilan des écarts favorables à l'une et à l'autre des deux actions en prenant appui sur une idée de compensation. Le tableau 3.1.3 illustre, sur un exemple simple, ce type de calcul. Les hypothèses restrictives que suppose ce mode de raisonnement sont mises en évidence. On montre que l'on peut s'en affranchir partiellement grâce à une définition relativement générale du concept de **taux de substitution** $r_{jn}(g)$ (cf. (r.3.1.17)).

Le dernier paragraphe de cette première section traite des informations inter-critères. On définit ce que l'on entend par là dans ce livre ; on souligne le rôle essentiel qu'elles jouent dans la modélisation des préférences globales ; on montre enfin qu'elles relèvent de deux types distincts (cf. les deux types de considérations introduites au 3.1.1).

3.2 Dans cette section, on présente et on illustre le concept central de Procédure d'Agrégation MultiCritère (PAMC). Une PAMC y est définie comme une règle permettant, sur la base d'un tableau de performances et d'informations inter-critères, de bâtir un ou plusieurs s.r.p. sur un ensemble d'actions.

Ce concept est ensuite illustré au paragraphe suivant où l'on présente quelques PAMC élémentaires systématisant les raisonnements introduits au 3.1 et constituant le noyau de PAMC plus sophistiquées qui seront introduites dans la suite de cet ouvrage. En particulier, on introduit les PAMC lexicographiques, de type concordance élémentaire, de type concordance-discordance élémentaire et de type somme pondérée.

Dans le troisième paragraphe, on examine comment, selon la PAMC considérée, l'importance relative accordée à certains critères est prise en compte. On montre que cette notion d'importance n'acquiert de signification que relativement à une PAMC définie. On précise ensuite le sens donné aux termes "coefficients d'importance" et "poids".

On conclut enfin ce chapitre en faisant quelques remarques sur les liens et les différences existant entre le problème de l'agrégation des performances et celui de l'agrégation des préférences en théorie du choix social.

Le problème de l'agrégation des performances ne se pose réellement que lorsque des critères divergent dans la façon de comparer certaines actions. Ceci nous amène, au 3.1, à clarifier

l'idée de conflit entre critères puis à présenter rigoureusement les concepts classiques de concordance, discordance, dominance et taux de substitution couramment utilisés pour comparer deux actions à partir d'une famille F de critères pouvant être conflictuels.

Dans les approches opérationnelles 1 et 2, l'aide à la décision prend appui sur un modèle explicite des préférences globales. Ce modèle est obtenu en utilisant une "Procédure d'Agrégation MultiCritère". La section 3.2 vise à préciser et à illustrer ce qu'il faut entendre par là. Cela nous conduit en particulier à introduire quelques procédures élémentaires et à discuter le rôle qu'y joue la notion complexe et ambiguë d'importance relative de chaque critère. Les procédures élémentaires présentées dans cette section visent à préparer le lecteur à aborder les procédures plus complexes qui seront présentées aux chapitres 4 et 5.

3.1 AVEC QUELS CONCEPTS COMPARER DEUX ACTIONS D'APRÈS DES CRITÈRES POUVANT ETRE CONFLICTUELS

3.1.1 Critères en conflit dans la comparaison de deux actions

Soit A un ensemble d'actions potentielles et F une famille cohérente formée de n critères. Considérons deux actions potentielles a et b que l'on cherche à comparer au niveau des préférences globales sur la base des performances données par les critères de F.

Considérons tout d'abord le cas où les n critères sont unanimes pour faire apparaître a comme au moins aussi bonne que b, c'est-à-dire :

$$a \; S_j \; b, \; \forall \; j \in F. \qquad \text{(r.3.1.1)}$$

Nous dirons dans ce cas que **les critères de F ne sont pas en conflit dans la comparaison de a et de b**. Si, comme on le supposera par la suite, les critères de F sont des pseudo-critères, l'absence de conflit caractérisée par (r.3.1.1) équivaut à :

$$g_j(b) \leq g_j(a) + q_j[g_j(a)], \ \forall\ j \in F. \qquad (r.3.1.2)$$

Dans ces conditions, a ne domine pas nécessairement b. Lorsque la famille F est cohérente, le résultat 2.2.3 permet cependant d'affirmer que, au niveau global, a surclasse b indépendamment du rôle que l'on souhaite voir jouer à chaque critère.

Considérons maintenant le cas où les critères ne sont pas unanimes pour déclarer que a surclasse b ou que b surclasse a ((r.3.1.1) n'est donc vérifiée ni par le couple (a, b), ni par le couple (b, a)). Nous dirons alors que **les critères de F sont en conflit dans la comparaison de a et de b**. Cette situation de conflit entre critères de F peut être caractérisée par le fait qu'il existe au moins une paire de critères j et k tels que :

$$\text{Non}(a\ S_j\ b) \text{ et } \text{Non}(b\ S_k\ a),$$

ce qui équivaut à :

$$b \succ_j a \text{ et } a \succ_k b \qquad (r.3.1.3)$$

ou encore à :

$$g_j(b) > g_j(a) + q_j[g_j(a)] \text{ et } g_k(a) > g_k(b) + q_k[g_k(b)].$$

Nous nous référerons à la situation caractérisée par (r.3.1.3) en disant que **la paire de critères {j, k} est conflictuelle dans la comparaison de a et de b.**

Nous parlerons de :

- **conflit faible** si $\succ_j = Q_j$ et $\succ_k = Q_k$;
- **conflit fort** si $\succ_j = P_j$ et $\succ_k = P_k$;
- **conflit dissymétrique présumé favorable à a** si $\succ_j = Q_j$ et $\succ_k = P_k$;
- **conflit dissymétrique présumé favorable à b** si $\succ_j = P_j$ et $\succ_k = Q_k$.

Lorsque les critères de F sont conflictuels dans la comparaison de a et b, on peut, en général, trouver non pas une seule mais

plusieurs paires de critères conflictuels. Porter un jugement de préférence global tel que a S b, a ≻ b, a P b revient à prendre position sur ce qui apparaît comme la **résultante des conflits.** Cette résultante dépend de la logique d'agrégation et du système de valeurs qui président à la formation des préférences globales. Quels que soient sa logique d'agrégation et son système de valeurs, celui qui cherche à argumenter le jugement de préférences globales qui résulte pour lui des conflits en présence prend appui sur des considérations qui relèvent de l'un, de l'autre ou des deux types suivants :

1°) Considérations de type O. Ces considérations sont celles qui, pour différencier l'influence que peut avoir chacun des critères, font uniquement appel à :

– la nature propre de chacun des critères en conflit et à
– une catégorisation de ceux-ci fondée sur une signification qualitative attribuée aux différences $g_j(a) - g_j(b)$ en fonction de leur position par rapport à des seuils.

Elles exploitent donc avant tout la signification ordinale (O) des nombres manipulés.

Dans le cas où l'on ne considère qu'une seule paire de critères conflictuels, les considérations de ce type peuvent être illustrées par des propos tels que :

– un conflit dissymétrique présumé favorable à a légitime a S b quelle que soit la nature des deux critères en conflit ;
– un conflit dissymétrique présumé favorable à a ne légitime a S b que si la nature des critères en conflit ne fait pas apparaître le critère favorable à b comme ayant une influence (en termes d'importance) sur la formation de la résultante considérablement plus forte que celle qu'a le critère favorable à a.

2°) Considérations de type C. Ces considérations sont celles qui font en outre appel au caractère quantitatif des différences $g_j(b) - g_j(a)$ en ce sens que leur valeur, éventuellement corrigée par leur position sur l'échelle du critère j et d'autres caractéristiques liées à la nature de ce critère, permet une comparaison, voire même une mesure, d'"écart de préférence". Elles tirent parti des propriétés cardinales (C) des nombres manipulés. Dans le cas où l'on ne considère qu'une seule paire de critères conflictuels, les considérations de ce type peuvent être illustrées par des propos tels que :

– si les deux différences positives caractérisant le conflit vérifient $g_k(a) - g_k(b) \geq g_j(b) - g_j(a)$, alors, quelle que soit la nature des deux critères en cause, on est fondé à admettre que a surclasse b ;

– si le rapport $(g_k(a) - g_k(b))/(g_j(b) - g_j(a))$ des différences positives caractérisant le conflit vaut r, alors on est fondé à admettre a surclasse b seulement si r dépasse une certaine valeur, laquelle peut dépendre de facteurs complexes tels que la place sur leurs échelles respective des intervalles $[g_j(a) ; g_j(b)]$ et $[g_k(b) ; g_k(a)]$ ainsi que de considérations de type O (ayant trait notamment à l'importance relative des deux critères).

L'objet de la présente section est de présenter les principaux concepts qui ont pris forme à partir de ces deux types de considérations. Comme nous le verrons tout au long de ce livre, ils jouent un rôle capital pour concevoir et analyser les procédures d'agrégation multicritère (cf. 3.2.1) qui sont couramment utilisées pour expliciter ou construire des systèmes relationnels de préférence.

Les deux paragraphes qui suivent sont respectivement consacrés aux notions de concordance et de discordance. Comme on le verra, les définitions auxquelles elles conduisent se réfèrent, pour l'essentiel, à des considérations de type O [1]. Ces notions vont tout naturellement nous amener à parler de la plus ou moins grande importance de chaque critère et de la représentation quantifiée de cette importance. Nous verrons que chacune de ces deux notions invite à un mode de quantification qui lui est spécifique. Cette quantification vise, dans les deux cas, à caractériser la manière dont chaque critère, en fonction de sa nature propre, affecte la résultante d'un conflit. Ce premier aperçu [2] sur la complexité, voire l'ambiguïté, de ce à quoi on se réfère

[1] Il ne faut voir là aucune contradiction avec l'usage qui en est fait au chapitre 5 pour bâtir des indicateurs de concordance et de discordance : rien ne s'oppose en effet à ce que ces derniers prennent en compte, de façon accessoire ou locale, des considérations de type C.

[2] Nous reviendrons à plusieurs reprises sur ce sujet, en particulier au 3.1.6 et au 3.2.3.

lorsqu'on parle d'importance (ou encore de poids) des différents critères explique que l'on consacre le paragraphe 3.1.4 à quelques principes susceptibles de guider le traitement des conflits (en vue de l'élaboration de systèmes relationnels de préférence) en l'absence de toute donnée destinée à différencier (par quantification ou simple hiérarchisation) l'importance propre à chaque critère.

Un mode de raisonnement particulièrement important, fondé principalement sur des considérations de type C, exploite l'idée de bilan par compensation. Nous lui consacrerons l'avant-dernier paragraphe de cette section.

Précisons dès à présent que tous les exemples numériques auxquels nous aurons recours pour illustrer les développements des quatre paragraphes qui suivent concernent une famille F formée exclusivement de critères dont l'échelle a été normée de telle sorte que :

$$0 \leq g_j(a) \leq 100, \forall a \in A \text{ et } \forall j \in F$$

(le nombre n de critères pouvant varier d'un exemple à l'autre).

On montrera enfin, au 3.1.6, que les notions, concepts ou règles dont il va être question dans les quatre paragraphes qui suivent se rapportent à ce que l'on peut appeler des informations inter-critères. Celles-ci jouent, comme on le verra tout au long de ce livre, un rôle essentiel pour passer, en conformité avec les axiomes du 2.1 et compte-tenu des formes de dépendance ou d'indépendance discutées au 2.4, du modèle de préférence au niveau restreint que constituent F et le tableau de performances associé à un modèle de préférence global dépassant la simple relation de dominance.

3.1.2 Analyse de la concordance et hiérarchie de niveau

Supposons que l'on cherche à comparer les actions a et b dont les performances sont indiquées au tableau 3.1.1. Imaginons qu'un acteur Z ait le sentiment plus ou moins confus que, globalement, b n'est certainement pas pire que a. Examinons quels peuvent être les arguments simples que Z peut mettre en avant pour étayer un tel jugement.

Tableau 3.1.1 : Exemple numérique
Pour tous les critères du tableau, on a $q_j = 7$, $p_j = 15$

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g_9
a	10	20	30	40	50	60	70	80	90
b	80	75	70	65	60	55	60	50	40

Dans cette optique, Z est tout naturellement amené à inventorier les critères qui fournissent des jugements de préférence restreints en accord avec l'affirmation b S a. C'est incontestablement le cas des cinq premiers et même du sixième puisque l'infériorité apparente de b par rapport à a (55 face à 60) n'est pas significative. Nous dirons que ces critères 1 à 6 constituent la sous-famille ou encore la coalition des critères **concordant** avec la proposition b S a. On notera cette coalition C(b S a) et l'on écrira indifféremment :

$$C(b\ S\ a)=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \text{ ou } C(b\ S\ a)=\{g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6\}.$$

Les critères 7, 8 et 9 sont concordants avec la proposition a S b, de même d'ailleurs que le critère 6. Ce dernier figure donc à la fois dans C(b S a) et dans C(a S b).

Dans cet exemple, le conflit oppose les critères 1 à 5 aux critères 7 à 9. Nous dirons que les premiers constituent la sous-famille ou la coalition des critères concordant avec la proposition b ≻ a, notée C(b ≻ a), alors que les seconds constituent la sous-famille ou coalition des critères concordant avec la proposition a ≻ b, notée C(a ≻ b). Faisons observer que tous les critères de cette dernière coalition ne sont pas concordants avec la proposition a P b. En conservant le même principe de notation, on a C(a P b) = {8, 9}, sous-famille strictement incluse dans C(a ≻ b). Ceci fait ressortir le fait que le critère 7, sans être en concordance avec la proposition b S a, ne contredit pas cette proposition avec la même netteté que les critères 8 et 9. Rappelons en effet que

dire que, sur ce septième axe de signification, il y a une préférence faible en faveur de a traduit une hésitation (ambiguïté) entre les situations de préférence stricte en faveur de a et d'indifférence entre b et a. Pour ces raisons, le critère 7 ne sera pas considéré comme un critère discordant avec la proposition b S a.

A partir d'une telle analyse, Z peut faire valoir que si chaque critère était représenté par un individu et que l'on procède à un vote, 6 votants sur 9 approuveraient la proposition "b n'est pas pire que a". Un serait hésitant et 2 seraient contre sans hésitation. On peut donc faire valoir le fait que la proposition b S a recueille, sans hésitation, une majorité des deux tiers des critères.

C'est là un mode de raisonnement prenant appui sur la notion de concordance qui appelle quelques remarques importantes :

Remarque 1 : Il ne prend appui que sur des considérations de type O.

Remarque 2 : Il accorde aux critères une importance (un poids) que l'on peut juger identique puisque, dans le dénombrement des voix, chaque critère est compté pour un quelle que soit sa nature ; il est clair qu'on pourrait aisément différencier cette importance en affectant à chaque critère un nombre de voix variable en fonction du rôle qu'on estime devoir lui faire jouer.

Remarque 3 : Pour analyser la proposition b S a, il ne fait intervenir que la coalition C(b S a) et ne fait jouer aucun rôle aux critères de la coalition C(a ≻ b). Si cette dernière coalition est "minoritaire", alors, quelles que soient les performances (éventuellement désastreuses pour b) des critères de C(a P b), elle ne peut s'opposer à b S a. A l'inverse, si elle est majoritaire, elle suffit à s'opposer à b S a et cela même si C(a P b) = ∅.

Remarque 4 : Il est en harmonie avec les principes qui ont permis de fonder la cohérence de F (cf. 2.1).

Pour s'en convaincre, montrons qu'un modèle de préférence qui serait bâti en utilisant ce mode de raisonnement satisfait bien aux conclusions des résultats 2.2.1, 2.2.2 et 2.2.3.

a) Si $g_j(a) = g_j(b)$, $\forall j \in F$, on a C(a S b) = C(b S a) = F. Les propositions a S b et b S a sont donc toutes deux acceptées à l'unanimité des critères. On a donc bien a I b, conformément au résultat 2.2.1.

b) Considérons deux actions a et b telles que b H a avec H ∈ {P, ≻, S}. Si $b^* \Delta_F$ b et a Δ_F a_*, il est clair que C(b H a) ⊂ C(b^* H a_*). La proposition b^* H a_* est donc appuyée par un nombre de critères au moins aussi grand que ne l'est la proposition b H a. On a donc bien b^* H a_* conformément au résultat 2.2.2. Notons de plus que si b Δ_F a, alors C(b S a) = F, ce qui justifie b S a.

c) Considérons deux actions a et b telles que b S_j a, $\forall j \in F$. On a alors C(b S a) = F et donc b S a, conformément au résultat 2.2.3.

Nous laisserons le soin au lecteur de vérifier qu'il en va bien ainsi pour tous les modes de raisonnement introduits au 3.1.

L'exemple ci-dessus nous a amenés à introduire les concepts de **critère concordant** et de **coalition concordante** avec une proposition telle que b S a, b ≻ a ou b P a.

Précisons et complétons les notations auxquelles nous nous conformerons tout au long de cet ouvrage pour désigner ce genre de coalition.

$$C(b\ H\ a) = \{j \in F : b\ H_j\ a\} \text{ avec } H \in \{S, \succ, P, Q, I\}. \quad \text{(r.3.1.4)}$$

Attirons à nouveau l'attention sur le fait que, bien que tous les critères de C(b Q a) ne soient en concordance avec aucune des propositions suivantes b P a, a I b, a S b, ils ne sont pas pour autant en net désaccord avec elles.

Le lecteur établira aisément que :

$$\begin{aligned}
&C(b\ P\ a) \subset C(b \succ a) \subset C(b\ S\ a),\\
&C(b\ S\ a) \cap C(a\ S\ b) = C(b\ I\ a) = C(a\ I\ b), \qquad \text{(r.3.1.5)}\\
&C(b\ S\ a) \cap C(a \succ b) = \varnothing,\\
&C(b\ S\ a) \cup C(a \succ b) = F.
\end{aligned}$$

Revenons à la seconde des remarques ci-dessus. Même lorsqu'on ne fait que dénombrer les critères de C(b S a) (afin de faire jouer un rôle à la fraction [1] card(C(b S a))/card(F) pour valider ou invalider b S a), on prend parti sur une façon de quantifier cette notion complexe et ambiguë introduite au 3.1.1 sous le nom d'importance des critères. D'une façon plus générale, dès lors qu'on se situe dans le cadre d'une analyse de la concordance et de considérations ne sortant pas du type O, il est naturel en pratique de concevoir une quantification de l'importance des critères dans le schéma suivant [2].

a) A chaque critère j, on associe un nombre $k_j > 0$ qui a pour objet de caractériser la plus ou moins grande influence que l'on reconnaît au critère j (compte-tenu de sa nature propre) lorsqu'il doit contribuer à fixer la résultante d'un conflit. C'est ainsi que le simple dénombrement des critères dont il a été question ci-dessus consiste à poser, $\forall j \in F$, $k_j = 1$.

b) On définit une règle de calcul qui, à chaque sous-famille C ⊂ F, associe un nombre k[C] à partir d'un "principe logique" et des données que sont les nombres k_j. On définit de la sorte, pour n'importe quelle coalition C, son **importance absolue** k[C] et son **importance relative** k[C]/k[F]. C'est ainsi que la procédure simple suggérée plus haut consiste à poser :

$$k[C] = \sum_{j \in C} k_j$$

(nous verrons au chapitre 5 que d'autres règles, à peine moins simples, peuvent être préférées à celle-ci).

Une fois fixée la règle permettant de déduire l'importance d'une coalition C de l'importance des critères qu'elle renferme, la question se pose de savoir comment procéder pour attribuer une valeur à chacun des coefficients k_j. C'est là un problème délicat

[1] On désigne par card(A) le cardinal de l'ensemble fini A, c'est-à-dire le nombre d'éléments de A.

[2] Les progrès récents en intelligence artificielle permettent d'envisager des approches où l'on peut se passer de cette quantification, cf. Pasche (1987, 1991) et Rommel (1989).

qu'il serait prématuré de vouloir aborder maintenant. Nous le traiterons en détail au 5.4.

3.1.3 Analyse de la discordance et effet de veto

Revenons aux données du tableau 3.1.1. Imaginons qu'un autre acteur Z′ éprouve, pour sa part, le sentiment plus ou moins confus que, globalement, la proposition "b n'est pas pire que a" est davantage sujette à caution que ne le pense Z. Cela ne signifie pas pour autant que la proposition "a n'est pas pire que b" s'impose aux yeux de Z′. On considère ici qu'il n'a pas pour objectif de faire prévaloir cette dernière proposition mais qu'il cherche seulement des arguments capables de mettre en doute le bien-fondé de b S a.

Dans ce but, Z′ doit s'intéresser aux critères de C(a P b) qui sont les critères **discordants** avec la proposition [1] b S a. Rappelons que, dans cet exemple, C(b P a) = {8, 9}.

Considérons tout d'abord le critère 8 : Z′ peut estimer que si la performance (50) de b sur ce critère est bien inférieure à celle (80) de a avec un écart supérieur au seuil p_8, cet écart n'est pas pour autant "suffisamment grand" (compte-tenu notamment de la signification du critère 8) pour justifier à lui seul une mise en question de la proposition b S a. Il peut par contre juger qu'il en va autrement avec le critère 9 : il peut en effet faire valoir que l'écart qui sépare 40 de 90 dépasse ce qui est, pour lui, **le seuil de compatibilité de l'acceptation de b S a à partir d'une simple analyse de concordance**. C'est dire qu'aux yeux de Z′ l'amplitude de cet écart (accessoirement rapportée à sa position sur l'échelle) donne au critère 9 (compte-tenu de sa nature propre) le pouvoir de mettre son veto au surclassement b S a.

Z peut tenter d'objecter que ce veto serait selon lui acceptable si la coalition concordante C(b S a) ne rassemblait pas tous les

[1] On notera que ces critères sont, a fortiori, discordants avec les propositions b ≻ a et b P a ; nous nous bornerons cependant ici à analyser la discordance vis-à-vis des seuls jugements formulés en termes de surclassement.

critères qu'elle comporte, autrement dit si son importance relative k[C(b S a)]/k[F] était moindre. A cela, Z′ peut à son tour objecter qu'il serait prêt à admettre cet argument si, au côté du critère 9, il n'y avait pas de critère 8 pour venir renforcer le pouvoir de veto de la coalition discordante C(a P b).

Ce mode de raisonnement, prenant appui sur les notions de concordance et de discordance, appelle quelques remarques importantes.

Remarque 1 : Si, dans sa première partie, il ne prend appui que sur des considérations de type O, il fait appel, au moins de façon locale, dans la seconde, à des considérations de type C.

Remarque 2 : Il permet de différencier le rôle dévolu à chaque critère en fonction de sa nature propre puisque, fixer de façon précise les conditions qui donnent au critère j le pouvoir de mettre son veto à un surclassement b S a, c'est caractériser et même quantifier, en un certain sens, l'importance qui lui est reconnue. On aborde là une facette de cette notion complexe et ambiguë qui diffère de celle abordée au 3.1.2, remarque 2.

Remarque 3 : Il échappe à l'objection de la remarque 3 du 3.1.2.

Examinons comment caractériser, aussi simplement que possible, les conditions dans lesquelles un critère discordant j peut, de son seul fait (c'est-à-dire sans faire entrer en ligne de compte d'éventuels autres critères discordants), mettre son veto au surclassement b S a. Parmi ces conditions figure tout d'abord celle qui consiste à admettre que, pour légitimer b S a, seule l'analyse de la concordance entre en ligne de compte. Conformément à ce qui a été dit plus haut, il faut ensuite traduire le fait que b s'avère, selon le critère j, significativement "beaucoup" plus mauvais que a. Autrement dit que la différence $g_j(a) - g_j(b)$ est non seulement supérieure à $p_j[g_j(b)]$ (ce qui caractérise le fait que j est un critère discordant) mais encore supérieure à un autre seuil v_j que l'on appellera le **seuil de veto**. Le seuil v_j, comme tous les autres seuils, peut évidemment varier avec l'origine de l'intervalle considéré, c'est-à-dire avec $g_j(b)$. Afin de rester dans le cadre de considérations de type O, on n'envisagera pas ici d'autres facteurs [1] pouvant affecter la valeur de ce nouveau seuil.

Sur ces bases, l'effet de veto peut être caractérisé par :

$$g_j(b) + v_j[g_j(b)] < g_j(a) \Rightarrow \text{Non}(b\ S\ a) \qquad \text{(r.3.1.6)}$$

(toujours sous l'hypothèse que b S a n'est étayé que par l'importance de la coalition concordante). Par conséquent, dans ces conditions, $v_j[g_j(b)]$ se définit [2] comme **la plus petite valeur de la différence** $g_j(a) - g_j(b)$ ($g_j(b)$ étant regardé comme fixé) sur un critère j discordant avec b S a (c'est-à-dire tel que $j \in C(a\ P\ b)$) **qui, dès lors qu'elle est dépassée, interdit l'acceptabilité du surclassement b S a,** même si $C(b\ S\ a) = F \backslash \{j\}$.

Soit b′ une action caractérisée par des performances vérifiant :

$g_j(b') < g_j(b)$ et
$g_k(b') = g_k(b), \forall k \in F \backslash \{j\}$.

Supposons que l'effet de veto du critère j joue contre un surclassement b S a. Ce même effet de veto jouera aussi bien, sinon mieux, vis-à-vis de b′ S a puisque b′ est encore pire que b selon le critère discordant j (toutes les autres performances demeurant inchangées). Il s'ensuit que :

$$g_j(b') < g_j(b) \Rightarrow g_j(b') + v_j[g_j(b')] \leq g_j(b) + v_j[g_j(b)],$$

ce qui équivaut à :

[1] On pourrait songer à formaliser l'effet de veto de telle sorte que le veto soit mis pour des intervalles $[g_j(b), g_j(a)]$ d'autant plus petits que $k[C(b\ S\ a)]$ est plus faible ou encore qu'il existe d'autres critères discordants venant renforcer l'impact du critère j considéré.

[2] Faisons observer que cette définition est de même nature que celle donnée dans MMCAD, 9.3.2 pour les seuils $q_j[g_j(b)]$ et $p_j[g_j(b)]$.

$$\frac{v_j[g_j(b)] - v_j[g_j(b')]}{g_j(b) - g_j(b')} \geq -1 \qquad \text{(r.3.1.7)}$$

(cette condition est identique à celles auxquelles sont astreints les seuils p_j et q_j, cf. 1.6).

Dans les cas extrêmes, on peut évidemment poser $v_j[g_j(b)] = p_j[g_j(b)]$. Rappelons que, dans tous les cas, on doit avoir :

$$v_j[g_j(b)] \geq p_j[g_j(b)]$$

puisqu'il ne peut y avoir effet de veto que pour des critères discordants. Ceci explique que, d'un point de vue opérationnel, il est souvent commode de raisonner la valeur du seuil de veto en prenant pour unité le seuil de préférence, ce qui amène à s'interroger sur la valeur du rapport $v_j[g_j(b))]/[p_j(g_j(b)]$.

Comme nous l'avons souligné ci-dessus (remarque 2), le seuil de veto v_j traduit une facette de ce à quoi on se réfère lorsqu'on parle de l'importance du critère j. D'une façon générale, on peut penser que plus l'importance de ce critère est grande (k_j élevé) et plus v_j "se rapproche" de p_j. Cela ne signifie pas pour autant qu'il faille chercher une relation fonctionnelle rigide entre k_j et $v_j - p_j$ (ou $(v_j - p_j)/p_j$)). Ce sont en effet, comme on l'a dit, deux facettes distinctes de l'importance du critère j (vis-à-vis des autres critères de F) que les analyses de concordance et de discordance mettent en évidence. On peut par conséquent avoir de bonnes raisons de fixer les nombres k_j et v_j de telle sorte que le rangement des n critères de F résultant des valeurs croissantes de k_j ne coïncide pas avec celui fourni par les rapports v_j/p_j décroissants (ou tout autre indicateur de même nature, cf. 5.4.3).

L'effet de veto tel qu'il a été défini opère de la même façon, que j soit seul critère discordant ou non, et que la valeur du rapport $k[C(b\ S\ a)]/k[F]$ soit élevée ou non. Lorsque j n'est pas le seul critère discordant, on peut songer à faire jouer l'effet de veto avant même que la différence $g_j(a) - g_j(b)$ ne dépasse le seuil $v_j[g_j(b)]$ (prise en compte d'un effet de renforcement des critères discordants autres que j). On peut également songer à accentuer d'autant plus ce phénomène que $k[C(b\ S\ a)]/k[F]$ est plus petit. Ces suggestions devraient permettre au lecteur d'entrevoir une analyse plus fine de la discordance. Celle-ci peut être menée de façon à associer à la coalition discordance C(a P b) un indicateur w[C(a P b)] faisant intervenir la place des différences $g_j(a) - g_j(b)$ vis-à-vis des repères $p_j[g_j(b)]$ et $v_j[g_j(b)]$ introduits par chaque critère discordant, cet indicateur étant destiné à appréhender ce que l'on peut regarder comme un plus ou moins grand **pouvoir de veto de la coalition discordante.** C'est sur la base des nombres w[C(a P b)] et k[C(b S a)]/k[F] qu'il convient alors d'argumenter l'acceptation ou le rejet de la proposition b S a.

Le schéma, de portée tout à fait générale, qui vient d'être esquissé permet de formaliser la seconde partie du mode de raisonnement illustré sur l'exemple numérique du tableau 3.1.2. Nous l'approfondirons au chapitre 5.

3.1.4 Dépassement de la dominance en-dehors d'informations servant à différencier l'importance des critères

a) Compléments sur la relation de dominance (Δ_F)

Rappelons que la relation de dominance Δ_F est définie par :

$$b \ \Delta_F \ a \Leftrightarrow g_j(b) \geq g_j(a), \ \forall \ j \in F. \qquad \text{(r.3.1.8)}$$

Cette relation appelle quelques remarques importantes.

Remarque 1 : Elle est établie indépendamment de toute information relative à un quelconque mode de différenciation de l'importance des critères. La non-différenciation qui en résulte (tous les critères sont traités de la même façon) ne doit pas porter à croire que la relation de dominance prend appui sur une hypothèse (implicite) d'égale importance des n critères. La non-différenciation signifie seulement que l'affirmation b Δ_F a ne préjuge en aucune façon de l'importance que tel acteur ou tel autre peut vouloir accorder aux différents critères.

Remarque 2 : Elle ne fait intervenir aucun seuil (ni d'indifférence, ni de préférence) et ne tient donc aucun compte du pouvoir discriminant des différents critères.

Remarque 3 : Elle est réflexive et transitive et définit par conséquent, sur A, une structure de préordre partiel [1] ; nous

[1] Cf. 1.4.2 c).

noterons [1] R_{Δ_F} la relation d'incomparabilité définie par :

$$b \ R_{\Delta_F} \ a \Leftrightarrow \text{Non}(a \ \Delta_F \ b) \text{ et } \text{Non}(b \ \Delta_F \ a). \qquad \text{(r.3.1.9)}$$

Remarque 4 : Quelle que soit la façon de définir la relation de surclassement globale S à partir du tableau de performances fondé sur une famille cohérente F et d'éventuelles informations additionnelles (données et/ou règles), la relation de dominance vérifie (d'après le résultat 2.2.2) :

$$b \ \Delta_F \ a \Rightarrow b \ S \ a, \qquad \text{(r.3.1.10)}$$

ce qui équivaut à $\Delta_F \subset S$.

C'est dire que toute relation de surclassement est nécessairement compatible avec le préordre partiel de dominance. Bien que Δ_F soit ainsi au cœur de toute relation de surclassement, on ne peut avoir $S = \Delta_F$ que si $q_j = 0$, $\forall \ j \in F$. En effet, poser $S = \Delta_F$ avec des seuils d'indifférence non nuls mettrait en défaut la seconde partie de l'axiome 2.1.2.

b) La relation de Δ-surclassement (S_Δ)

Posons :

$$b \ S_\Delta \ a \Leftrightarrow C(b \ S \ a) = F. \qquad \text{(r.3.1.11)}$$

La relation S_Δ n'est par conséquent vérifiée que si les critères de F ne sont pas en conflit dans la comparaison de b et a.

Tout système de préférences globales décrit ou construit à partir de la famille cohérente F et d'éventuelles informations additionnelles est nécessairement tel que (cf. résultat 2.2.3) :

$$b \ S_\Delta \ a \Rightarrow b \ S \ a, \qquad \text{(r.3.1.12)}$$

[1] Cette notation nous paraît préférable à R_F adoptée dans MMCAD.

ce qui équivaut à $S_\Delta \subset S$.

Contrairement à Δ_F, S_Δ fait intervenir les seuils q_j. De ce fait, rien ne s'oppose à ce qu'un système de préférences globales vérifie $S = S_\Delta$. **La relation S_Δ apparaît donc comme la relation de surclassement la plus pauvre que l'on puisse concevoir.** Nous l'appellerons relation de **Δ-surclassement**.

Bien que réflexive et compatible avec le préordre partiel de dominance, elle n'est pas nécessairement transitive. C'est ainsi par exemple qu'avec les données du tableau 3.1.2 on a :

d S_Δ b et b S_Δ a

avec d et a incomparables selon S_Δ. On a par ailleurs :

c S_Δ b, b S_Δ a, a S_Δ c.

Tableau 3.1.2 : Exemple numérique
Pour tous les critères du tableau, on a $q_j = 7$, $p_j = 15$

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
a	45	45	50	50	55	55
b	55	55	45	45	50	50
c	50	50	55	55	45	45
d	60	60	60	55	45	45
e	65	65	60	55	45	45

La transitivité impliquerait que l'on ait également :

a S_Δ b, b S_Δ c, c S_Δ a.

Or, aucun de ces trois Δ-surclassements n'est vérifié.

Comme la dominance, le Δ-surclassement ne préjuge en rien de la plus ou moins grande importance de chaque critère (c'est dire qu'il ne sous-entend aucune hypothèse d'equi-importance). Il

apparaît comme une simple extension de la dominance prenant en compte les seuils d'indifférence conformément à l'axiome 2.2.2 mais au prix d'une perte de la transitivité.

C'est parce que la relation S_Δ est généralement trop pauvre pour aider à prendre des décisions que l'analyse de la concordance et de la discordance présente un réel intérêt de même que les bilans par compensation et le concept de taux de substitution dont il sera question au paragraphe suivant. Toutefois, ces modes de raisonnement ainsi que les concepts qui leur sont liés requièrent des données additionnelles servant à caractériser et, presque toujours, à quantifier l'importance relative des différents critères. Dans certaines situations concrètes, on peut avoir envie d'approfondir la comparaison de deux actions quelconques en introduisant le moins d'informations possible sur cette importance relative des différents critères. Les raisons invoquées pour cela peuvent être variées : il est impossible (faute de temps par exemple) d'obtenir de telles informations, les différents acteurs ne pondèrent pas les critères de la même façon [1], on souhaite aller aussi loin que possible dans les comparaisons sans préjuger de l'importance des critères [2], ... Nous explorons ci-après quelques voies allant dans ce sens.

c) La relation de PQ-surclassement (S_{PQ})

Revenons à l'exemple numérique du tableau 3.1.2. Considérons le couple d'actions (e, a). Il vérifie :

C(a P e) = ∅, C(a Q e) = {5, 6}.

C'est dire que seules les préférences faibles en faveur de a des critères 5, 6 sont responsables du fait que l'on n'a pas e S_Δ a. Pourtant, en faveur de cette dernière proposition, la coalition concordante comporte notamment la sous-famille :

C(e P a) = {1, 2}.

[1] Voir par exemple MMCAD, chapitre 3, exemple 4.

[2] Voir par exemple chapitre 8 et Roy et Hugonnard (1982b).

Dans ces conditions, l'ensemble des conflits des critères de F dans la comparaison de e et a peut être structuré selon une famille de paires de critères conflictuels du type suivant :

{1, 5}, {2, 6}.

Une telle famille satisfait aux trois propriétés ci-après :

PROPRIÉTÉ 1 : Chaque conflit est dissymétrique et présumé favorable à e.

PROPRIÉTÉ 2 : Aucun critère de C(e P a) n'apparaît plus d'une fois.

PROPRIÉTÉ 3 : Chaque critère de C(a ≻ e) apparaît au moins une fois.

Faisons observer qu'une telle décomposition de l'ensemble des conflits n'est généralement pas unique et qu'elle peut très bien laisser de côté des critères de C(e P a). Considérons maintenant l'hypothèse suivante :

Hypothèse 1 : Quels que soient les critères j et k pouvant donner lieu à une paire de critères conflictuels dans la comparaison de deux actions e et a, dès lors que le conflit est dissymétrique présumé favorable à e, alors sa résultante est forcément compatible avec e S a.

Si on accepte cette hypothèse, alors, dans l'exemple numérique considéré, plus rien ne s'oppose au surclassement e S a. Il en sera ainsi chaque fois que l'ensemble des critères conflictuels dans la comparaison de e et a pourra être structuré selon une famille de paires de critères conflictuels satisfaisant les propriétés 1, 2, 3 ci-dessus. Il est clair que ceci est possible si et seulement si il y a au moins autant de critères dans C(e P a) qu'il y en a dans C(a ≻ e), aucun critère ne devant en outre être discordant avec e S a. Ceci nous conduit donc à nous intéresser à la relation S_{PQ}, que nous appellerons **PQ-surclassement**, définie comme suit :

$$b\ S_{PQ}\ a \Leftrightarrow [\mathrm{card}(C(b\ P\ a)) \geq \mathrm{card}(C(a\ Q\ b)) \text{ et } C(a\ P\ b) = \varnothing]. \quad (r.3.1.13)$$

En matière d'aide à la décision, pourvu que l'hypothèse 1 paraisse raisonnable, la relation S_{PQ} peut être adoptée pour définir les préférences globales en termes de surclassement : en particulier, $S_\Delta \subset S_{PQ}$. L'information additionnelle qu'elle requiert quant à l'importance relative des critères de F est contenue dans l'hypothèse 1. Elle peut être reformulée ainsi :

Hypothèse 2 : Quelle que soit la manière dont on veuille différencier l'importance des critères de F, on admet que si deux quelconques d'entre eux, j et k, forment une paire de critères conflictuels telle que b P_j a et a Q_k b, alors le caractère ambigu (c'est-à-dire mal étayé) de la préférence faible en faveur de a selon le critère k n'est pas de nature à contre-balancer la préférence stricte

(c'est-à-dire solidement étayée) en faveur de b selon le critère j de façon à constituer un argument pouvant contribuer à invalider la proposition "b n'est pas pire que a".

On peut bien évidemment rejeter une telle hypothèse lorsque le critère k apparaît comme primordial et le critère j comme tout a fait mineur. Accepter l'hypothèse 2 (ou l'hypothèse 1), c'est admettre une certaine limitation (de nature qualitative) dans les disparités d'importance entre critères. Cette limitation ne doit cependant pas être confondue avec une equi-pondération (comme les dénombrements d'ensembles intervenant dans (r.3.1.13) pourraient le laisser croire à première vue [1]).

Le PQ-surclassement n'est pas une relation transitive puisqu'avec les données du tableau 3.1.2 on a par exemple :

d S_{PQ} b, b S_{PQ} a et Non(d S_{PQ} a).

d) Les relations de ≻Q-surclassement ($S_{\succ Q}$) et de ΔP-surclassement ($S_{\Delta P}$)

De façon plus contestable mais néanmoins parfois digne d'intérêt, on peut enrichir le surclassement défini par S_{PQ} en prenant appui sur la relation $S_{\succ Q}$ définie [2] par :

$$b\ S_{\succ Q}\ a \Leftrightarrow [\mathrm{card}(C(b \succ a)) \geq \mathrm{card}(C(a\ Q\ b)) \text{ et } C(a\ P\ b) = \varnothing]. \quad (r.3.1.14)$$

C'est ainsi qu'avec les données du tableau 3.1.1 on a :

d $S_{\succ Q}$ a et Non(d S_{PQ} a).

Le lecteur reformulera sans peine les propriétés 1, 2, 3 ci-dessus ainsi que les hypothèses 1 et 2 (qu'il suffit d'étendre au conflit faible) de façon à asseoir une relation $S_{\succ Q}$ sur des bases analogues à celles données pour S_{PQ}.

A la limite, dès lors que C(a P b) = ∅, on peut estimer qu'il n'existe aucun argument suffisamment bien étayé pour s'opposer à la proposition "b n'est certainement pas pire que a". Ceci conduit à considérer la relation $S_{\Delta P}$

[1] Cette confusion est en particulier commise par Gargaillo (1982). On consultera à ce sujet la réponse de Roy et Hugonnard (1982c).

[2] Relation dite de pseudo-dominance et notée S_p dans Roy et Hugonnard (1982 a et d).

définie [1] comme suit :

$$b \; S_{\Delta P} \; a \Leftrightarrow C(a \; P \; b) = \varnothing. \qquad \text{(r.3.1.15)}$$

Si le surclassement est défini en termes de ΔP-surclassement, alors on constate qu'avec les données du tableau 3.1.2, les actions a, b, c et d sont toutes indifférentes deux à deux. D'une façon générale, si b $S_{\Delta P}$ a est établi à partir d'une coalition concordante faible en ce sens que C(a P b) est vide, alors on a nécessairement a $S_{\Delta P}$ b (c'est-à-dire l'indifférence). Le même phénomène se produit avec $S_{\succ Q}$ mais dans des conditions un peu plus nuancées.

Précisons que, pour des raisons évidentes :

$$\Delta_F \subset S_\Delta \subset S_{PQ} \subset S_{\succ Q} \subset S_{\Delta P}. \qquad \text{(r.3.1.16)}$$

e) Autres relations

Pour des raisons tenant à la prise en compte d'éventuels "effets de cumul" (cf. 2.2.2 d)), on peut être amené à s'intéresser à des relations visant à dépasser Δ_F sans pour autant contenir S_Δ [2]. Faisons observer qu'une telle extension de la dominance, dès lors qu'elle est incluse dans S_{PQ}, n'implique pas, pour être légitimée, de restriction sur les disparités d'importance entre critères plus fortes que celles contenues dans l'hypothèse 2.

3.1.5 Analyse des compensations : Valorisation sur un axe des écarts par taux de substitution

Revenons aux données du tableau 3.1.1. Soit Z″ un nouvel acteur cherchant, lui aussi, à se faire une opinion sur la résultante du conflit entre critères de F dans la comparaison de a et b. Imaginons que Z″ propose un tout autre mode de raisonnement que celui fondé sur des analyses de concordance et de discordance envisagées par Z et Z′. Z″ estime en effet qu'il convient de faire entrer davantage en ligne de compte la plus ou moins grande amplitude des écarts de performances entre les actions à compa-

[1] Notons que cette définition est identique à celle de S_Δ en remplaçant le seuil d'indifférence q par le seuil de préférence p.

[2] Les relations de ce type, lorsqu'elles sont prises comme relations de surclassement, ne satisfont pas (dès lors qu'un q_j au moins est différent de 0) à la seconde partie de l'axiome 2.2.2 : voir au 5.3.1 b2) les relations de quasi-dominance Δ_q et de dominance canonique Δ_c.

rer. Dans ce but, il distingue :

– d'une part les critères 1 à 5 qui font tous apparaître des écarts favorables à b, lesquels valent respectivement (80 – 10), (75 – 20), (70 – 30), (65 – 40), (60 – 50) ;
– d'autre part les critères 6 à 9 qui font tous apparaître des écarts favorables à a, lesquels valent respectivement (60 – 55), (70 – 60), (80 – 50), (90 – 40).

Faire entrer en ligne de compte (pour accepter ou refuser b S a) les amplitudes de ces 9 écarts de performances oblige à regarder chacun de ces écarts à la lumière du critère concerné, autrement dit en fonction de l'importance qu'on lui accorde dans la formation de la résultante des critères en conflit. Ainsi, aux yeux de Z″, le critère 3 est "beaucoup moins important" que le critère 7. Dans ces conditions, il estime que l'écart $g_3(b) - g_3(a) = (70 - 30)$, en dépit de son amplitude assez grande, compense tout juste l'écart $g_7(a) - g_7(b) = (70 - 60)$. En rapprochant de la sorte deux à deux les écarts de performances, il lui paraît naturel d'admettre qu'il y a compensation significative [1] :

de l'écart (90 – 40) selon g_9 par l'écart (80 – 10) selon g_1,
de l'écart (80 – 50) selon g_8 par l'écart (75 – 20) selon g_2,
de l'écart (70 – 60) selon g_7 par l'écart (70 – 30) selon g_3,
de l'écart (60 – 55) selon g_6 par l'écart (60 – 50) selon g_5.

Si l'on admet ces compensations, lesquelles ne font pas intervenir le critère 4 favorable à b (par 65 contre 40), il est clair que le bilan global est favorable à b. Sur ces bases, Z″ peut regarder b P a comme bien établi.

Imaginons que Z′ souhaite reconsidérer chacune des compensations ci-dessus en les resituant dans un cadre plus rigoureux. Il propose pour cela de chercher à "mesurer" l'écart de performances propre à chaque critère sur un axe "étalon" selon une opération analogue à celle qui permet de convertir, en une monnaie unique,

[1] On remarquera que ce mode de raisonnement diffère profondément de celui qui est à l'origine des hypothèses 1 ou 2 du 3.1.4.

des gains et des pertes initialement exprimés dans des monnaies différentes. Dans cette perspective, il admet que 3 unités du critère 1 (favorable à b) sont nécessaires pour compenser exactement une unité du critère 9 (favorable à a). Autrement dit, l'unité du critère 1, valorisée sur l'axe de signification du critère 9, ne vaut que 1/3. Si l'on admet cette "pondération relative" des critères 1 et 9 ainsi qu'un raisonnement par proportionnalité, on constate que l'écart 80 – 10 = 70 ne compense que 70/3 = 23,3 unités du critère 9 (favorables à a), ce qui est très inférieur à 90 – 40 = 50. Il y a par conséquent ici désaccord entre Z″ et Z′ : pour ce dernier, la résultante du conflit entre les critères 1 et 9 est favorable à a.

Il est clair que Z′ peut appliquer aux critères 2, 3, ..., 8 le même principe de quantification en conservant le même axe étalon (critère 9). Cela le conduit à apprécier le nombre n_j (éventuellement fractionnaire) d'unités du critère j qui sont à ses yeux nécessaires pour compenser exactement un écart de **une unité de sens opposé** sur l'axe du critère 9. Ceci équivaut à dire que $1/n_j$ est la "valeur" de l'unité du critère j lorsqu'elle est évaluée en prenant pour unité de mesure celle qui est propre au critère 9 (cette dernière étant utilisée comme référence). Tous les écarts de performances selon les critères 1 à 8 peuvent ainsi (dès lors qu'on accepte un raisonnement par proportionnalité) être convertis dans la "monnaie" du critère de référence. Tous les écarts de performances étant ainsi valorisés sur un même axe de signification (cf. tableau 3.1.3), on peut admettre (raisonnement par additivité) que leur résultante s'obtient par simple somme algébrique des valeurs obtenues sur cet axe.

Z′ en déduit que ce bilan n'est pas favorable à b. Le solde en faveur de a étant malgré tout faible, il conclut à a Q b.

Supposons que, après réflexion, Z″ accepte les valeurs des coefficients $1/n_j$ (y compris pour j = 1). Il peut néanmoins contester la conclusion de Z′. L'écart de performances selon le critère 6 ne vaut que 5. Or, c'est là une valeur non significative car inférieure à q_6. Z″ peut donc faire valoir qu'elle ne doit pas être comptabilisée dans le bilan, lequel vaut, par conséquent, +15,8. Ceci exclut a Q b et valide b S a (Z″ peut toutefois hésiter

à se prononcer entre b Q a et b I a).

Tableau 3.1.3 : Valorisation, sur l'axe du critère 9, des écarts de performances des actions b et a du tableau 3.1.1

Critères g_j	$g_j(b) - g_j(a)$	Coefficients $1/n_j$	Valorisation sur l'axe 9
g_1	80 – 10	1/3	+ 23,3
g_2	75 – 20	1/2	+ 27,5
g_3	70 – 30	1/2	+ 20
g_4	65 – 40	1	+ 25
g_5	60 – 50	2	+ 20
g_6	55 – 60	4	– 20
g_7	60 – 70	2	– 20
g_8	50 – 80	1	– 30
g_9	40 – 90	1	– 50
Bilan global sur l'axe 9			– 4,2

Le mode de raisonnement ci-dessus appelle quelques remarques importantes.

Remarque 1 : Il fait directement appel à des données de type C.

Remarque 2 : Il permet de différencier le rôle dévolu à chaque critère en fonction de sa nature propre en quantifiant l'importance du critère j par un "poids" défini par le coefficient $1/n_j$; ce coefficient vaut 1 pour le critère choisi comme référence.

Remarque 3 : Les compensations qu'il opère dans le cadre du bilan final font intervenir trois hypothèses importantes :

– Une hypothèse d'invariance par translation impliquant de ne pas tenir compte de la position sur l'échelle du critère j de l'intervalle $[g_j(a) ; g_j(b)]$. La seule donnée prise en compte est l'écart $(g_j(a) - g_j(b))$.

– Une hypothèse de proportionnalité impliquant que si un écart $(g_j(a) - g_j(b))$ compense un écart en sens inverse $(g_n(b) -$

$g_n(a)$), alors un écart $\alpha\cdot(g_j(a) - g_j(b))$ compense un écart $\alpha\cdot(g_n(b) - g_n(a))$.

– Une hypothèse d'additivité impliquant que la résultante des conflits entre les critères peut être déterminée par addition, après conversion de tous les écarts sur l'échelle d'un critère de référence.

Remarque 4 : Les hypothèses de proportionnalité et d'additivité conduisent à un mode de raisonnement qui est difficilement compatible avec la prise en compte de seuils d'indifférence, de préférence ou de veto.

Nous explicitons ci-après la signification concrète des trois hypothèses ci-dessus.

Continuons à supposer (ce qui n'est pas restrictif) que le critère de référence est celui numéroté n. Le raisonnement étudié prend pour point de départ la possibilité de définir, pour chaque critère j, l'amplitude n_j de la variation de performances qui compense très exactement une variation de une unité en sens opposé sur le critère n. Si cette dernière variation est négative (perte), n_j s'interprète comme le prix à payer (dans la "monnaie" du critère j) pour racheter cette perte unitaire sur le critère n ; s'il s'agit d'une variation positive (gain), la même valeur n_j s'interprète alors comme le "prix de revente" de ce gain unitaire. Dans le raisonnement ci-dessus, on a admis (hypothèse d'invariance par translation) que la position sur l'axe de signification du critère j des n_j unités gagnées ou perdues était sans influence sur la valeur de n_j pas plus que celle-ci n'était influencée par le niveau de performances à partir duquel l'unité du critère n était perdue ou gagnée. Autrement dit, que l'unité à "racheter" (ou à "revendre") se situe dans le bas ou dans le haut de l'échelle du critère n, elle vaut le même "prix", prix qui correspond aussi bien à n_j unités du bas de l'échelle du critère j que du haut de cette même échelle.

Les "prix" n_j ayant la signification et les propriétés qui viennent d'être précisées, l'hypothèse de proportionnalité peut être regardée comme un prolongement naturel des hypothèses déjà faites. Il s'agit tout simplement d'admettre que, si deux écarts de sens opposé sur les critères j et n se compensent exactement, alors des écarts doubles (dont la position importe peu) se compensent aussi exactement. Cette nouvelle hypothèse permet de valoriser, grâce à un seul coefficient (comme on l'a fait dans le tableau 3.1.3), tous les écarts de performances sur l'axe de signification du critère de référence.

Le dernier pas à franchir consiste à admettre que ces valorisations qui proviennent d'écarts de performances situés sur des axes de signification différents peuvent être purement et simplement additionnées (hypothèse d'additivité) pour en apprécier la résultante. Ceci suppose l'absence d'effets de synergie positive ou négative. Le bilan ainsi obtenu (cf. tableau 3.1.3) doit alors permettre, selon des règles à préciser, de juger du bien-fondé d'affirmations telles que b P a, b Q a, b I a ou, plus modestement, de b S a, b ≻ a.

On peut résumer comme suit les limites auxquelles se heurte l'argumentation d'une préférence globale fondée sur un bilan par compensation établi à partir de poids du type $1/n_j$.

1°) Pour un critère donné, les gains que représente un accroissement de performances d'une amplitude fixée (10 % par exemple dans le cas d'un critère du tableau 3.1.1) peuvent être jugés différemment selon la place qu'ils occupent sur l'échelle du critère. La perte qu'ils compensent exactement, sur un autre critère (quel qu'il soit), va alors obligatoirement dépendre de cette place, ce qui conduit à remettre en cause l'hypothèse d'invariance par translation.

2°) Pour un critère donné, il n'est pas déraisonnable d'admettre que, dans certaines situations, passer de $g_j(a) = 100$ à $g_j(b) = 0$ n'entraîne pas un "écart de préférence" exactement égal à 100 fois l'écart existant entre $g_j(a') = 1$ et $g_j(b)$, par exemple parce que, au-delà d'une certaine valeur, les performances sont toutes considérées comme "très satisfaisantes". Ceci conduit à remettre en cause l'hypothèse de proportionnalité.

3°) L'hypothèse d'additivité exclut toute prise en compte de synergie positive ou négative entre critères. C'est là une restriction que l'on peut vouloir remettre en cause.

4°) Comme on l'a dit, les hypothèses de proportionnalité et d'additivité sont difficilement conciliables avec la prise en compte de seuils d'indifférence ou de préférence. Dans le raisonnement qui a été exposé, le critère de référence étant toujours numéroté n, la définition des poids $1/n_j$ suppose :

– d'une part que l'on adopte comme unité du critère n un écart de performance supérieur à q_n, sinon même à p_n ;

– d'autre part que l'on prenne position sur la manière de comptabiliser, dans le bilan global, les écarts de performances non significatifs du type $g_j(b) - g_j(a) \leq q_j$ [1].

5°) L'interprétation en termes de préférence du résultat du bilan global ne s'impose pas de façon évidente : cela a-t-il un sens de comparer ce résultat aux seuils q_n et p_n conformément au modèle du pseudo-critère ?

On verra en détail, au chapitre 4, comment on peut faire face à certaines de ces difficultés tout en restant dans un cadre similaire. On se contentera ici de montrer l'intérêt du concept de taux de substitution pour raisonner l'idée de compensation.

La définition du **taux de substitution** $r_{jn}(\underline{g}, \delta_n)$ fait en premier lieu intervenir un vecteur de performances [2] $\underline{g}$ (nous dirons aussi point dans l'espace des performances) :

$$\underline{g} = (g_1, ..., g_j, ..., g_n).$$

Elle fait intervenir en second lieu un critère de référence, qu'il n'est pas restrictif de noter n, auquel on a associé une variation élémentaire de référence

[1] Faisons observer que si l'on a $g_j(b) - g_j(a) > q_j$ et $(g_j(b) - g_j(a))/n_j \leq q_n$, il peut être raisonnable de comptabiliser la quantité $(g_j(b) - g_j(a))/n_j$ dans le bilan par compensation puisqu'elle correspond à un écart significatif sur le critère d'origine j.

[2] Ce vecteur de performances $\underline{g}$ est un élément de l'ensemble $E_1 \times E_2 \times ... \times E_n$, produit cartésien des échelles des n critères.

(ou variation unitaire [1]) que nous notons δ_n. Celle-ci doit correspondre à un écart de préférence faible mais significatif. C'est dire qu'une valeur raisonnable de δ_n est fournie par le seuil de préférence p_n lorsque celui-ci n'est pas nul. Prendre en compte une telle variation élémentaire de référence est souvent utile dans un raisonnement par compensation. Dans le cas de vrai-critères avec échelle continue, on peut faire disparaître cette variation unitaire δ_n en étudiant la limite du rapport $r_{jn}(\underline{g}, \delta_n)/\delta_n$ lorsque δ_n tend vers 0. On parle alors de **taux marginal de substitution.**

Par définition, le taux de substitution $r_{jn}(\underline{g}, \delta_n)$ entre les critères j et n au point $\underline{g}$ pour une variation élémentaire de référence δ_n a pour valeur le minimum de l'accroissement v qui s'avère compatible avec l'indifférence entre les deux actions idéales caractérisées par les vecteurs-performances $\underline{g}$ et $\underline{g}^v$:

$$\underline{g}^v = (g_1, ..., g_{j-1}, g_j + v, g_{j+1}, ..., g_n - \delta_n). \qquad \text{(r.3.1.17)}$$

Vis-à-vis d'un système relationnel de préférences existant et stable dans l'esprit d'un acteur ou bien encore défini par une procédure d'agrégation multicritère (cf. 3.2), il est clair que, pour tout point $\underline{g}$ de l'espace des performances et pour tout critère j, on peut, en faisant croître progressivement v depuis la valeur 0 (l'action caractérisée par $\underline{g}$ étant obligatoirement préférée à celle caractérisée par $\underline{g}^0$), définir, éventuellement au prix de quelques conventions additionnelles [2], la plus petite valeur de v qui permet d'atteindre l'indifférence. On remarquera que :

– compte-tenu des ambiguïtés possibles du système de préférences, rien ne s'oppose à ce que l'indifférence persiste pour un accroissement v légèrement supérieur à $r_{jn}(\underline{g}, \delta_n)$;

– $r_{jn}(\underline{g}, \delta_n) > q_j$ (les performances g_j et $g_j + r_{jn}(\underline{g}, \delta_n)$ ne pouvant être indifférentes) ; de surcroît, si δ_n a été choisi significativement supérieur à p_n, alors $r_{jn}(\underline{g}, \delta_n) > p_j$ sauf si l'importance accordée au critère j est si grande qu'un accroissement v ne correspondant qu'à une préférence faible sur l'axe du critère j peut compenser, sur l'axe du critère n, une variation inverse d'amplitude significativement supérieure à p_n ;

– pour j fixé, le taux $r_{jn}(\underline{g}, \delta_n)$ peut fort bien varier lorsqu'on déplace le point $\underline{g}$ dans l'espace des performances ; dans le mode de raisonnement ci-dessus, cette possibilité était exclue ou négligée puisqu'on cherchait à appréhender $r_{jn}(\underline{g}, \delta_n)$ par une constante n_j.

[1] Dans MMCAD 10.4, il était convenu que $\delta_n = 1$.

[2] Celles-ci peuvent provenir soit du fait que g_j est trop proche de la valeur maximum de l'échelle du critère j ou bien du fait que cette dernière échelle est discrète. Le recours à des idées simples de prolongement et d'interpolation suffit pour surmonter ces difficultés.

Revenons au calcul d'un bilan par compensation fondé sur des coefficients $1/n_j$. Les trois hypothèses d'invariance par translation, de proportionnalité et d'additivité impliquent que le taux de substitution $r_{jn}(\underline{g}, \delta_n)$:

- est indépendant du vecteur de performances $\underline{g}$ et
- est tel que $r_{jn}(\underline{g}, \alpha \cdot \delta_n) = \alpha \cdot r_{jn}(\underline{g}, \delta_n)$.

On verra, au chapitre 4, comment on peut utiliser et formaliser un raisonnement par compensation hors du cadre restrictif de ces hypothèses.

Soulignons enfin que $r_{jn}(\underline{g}, \delta_n)$ peut être vu comme une façon de quantifier l'importance accordée au critère j (relativement au critère n) lorsqu'on raisonne au voisinage du point $\underline{g}$ de l'espace des performances. Il faut prendre garde au fait que (comme avec n_j) plus l'importance accordée au critère j est grande et plus faible est le nombre $r_{jn}(\underline{g}, \delta_n)$. Autrement dit, si l'on veut raisonner en termes de "poids", c'est l'inverse des nombres $r_{jn}(\underline{g}, \delta_n)$ qu'il convient de faire intervenir. La métaphore du poids n'est cependant pas sans danger. En effet, on ne peut pas déduire de l'inégalité :

$$1/r_{jn}(\underline{g}, \delta_n) > 1/r_{kn}(\underline{g}, \delta_n)$$

que le critère j a plus d'importance que le critère k (au voisinage de $\underline{g}$ et pour une variation élémentaire de référence δ_n fixée). Pour s'en convaincre, il suffit de ranger l'unité dans laquelle s'expriment les performances sur l'axe du critère j (ou sur l'axe du critère k) et de constater qu'une telle inégalité peut être inversée sans que l'importance relative accordée aux deux critères ne s'en trouve modifiée. Ainsi, sauf conditions particulières, la simple comparaison des taux $r_{jn}(\underline{g}, \delta_n)$ et $r_{kn}(\underline{g}, \delta_n)$ (tout comme celle des nombres n_j et n_k) est dépourvue de signification en termes d'importance.

3.1.6 Informations inter-critères

Dès l'instant où l'on souhaite fonder l'aide à la décision sur un système relationnel de préférences qui dépasse la simple idée de dominance (autrement dit le Δ-surclassement (r.3.1.11)), on se voit contraint, d'une façon ou d'une autre, de faire intervenir des informations extérieures à la famille F (c'est-à-dire non contenues dans le tableau des performances). Les paragraphes précédents nous ont conduits à mettre en évidence les formes sous lesquelles on fait couramment intervenir de telles informations supplémentaires pour raisonner les résultantes de conflits entre critères. C'est ainsi que l'on a été amenés à introduire :

- des grandeurs auxquelles on fait jouer le rôle de "données" numériques ou fonctionnelles comme, par exemple, les coefficients d'importance k_j (cf. 3.1.2), les seuils de veto $v_j[g_j(a)]$ (cf. 3.1.3), les taux de substitution $r_{jn}(\underline{g}, \delta_n)$ (cf. 3.1.5) ;
- des règles logiques auxquelles on fait jouer le rôle de principe fondamental ou hypothèse de travail comme, par exemple, l'hypothèse 2 au 3.1.4, les principes qui sous-tendent, au 3.1.5, le calcul d'un bilan par compensation ou bien encore le fait que le taux de substitution $r_{jn}(\underline{g}, \delta_n)$ soit une constante (indépendante non seulement de l'unité δ_n mais encore du vecteur $\underline{g}$).

La raison d'être de telles informations, que nous qualifierons respectivement de numériques et logiques, est de caractériser le mode d'influence qu'exerce chaque critère relativement aux autres pour définir, à un niveau global, la relation de préférence qui lie deux actions quelconques. C'est pourquoi nous qualifions ces informations d'inter-critères. Par **information inter-critère**, on désigne toute information (numérique ou logique) qui précise le rôle que joue un critère vis-à-vis d'un autre ou de plusieurs autres pour asseoir la résultante de critères en conflit.

Quelles que soient l'approche opérationnelle et la procédure suivies pour définir un modèle de préférences globales, une bonne analyse des informations inter-critères qui les sous-tendent est essentielle pour parvenir à une réelle compréhension de ce que l'on fait. Une telle analyse peut, dans bien des cas, avantageusement prendre appui sur la distinction entre considérations de type O et de type C (introduites au 3.1.1) pour élaborer la résultante de conflits entre critères.

C'est ainsi que les règles, concepts et discussions présentés aux 3.1.2, 3.3.3 et 3.1.4 prennent appui (à l'exception de quelques développements annexes) sur des considérations ordinales. Cela signifie en particulier que même si les échelles associées aux critères (cf. tableaux 3.1.1 et 3.1.2) font appel à des nombres, la teneur quantitative de ceux-ci n'est pas fondamentalement prise en compte par l'analyse de la concordance, de la discordance ou par les différentes formes de surclassement étudiées au 3.1.4. Autrement dit, la définition et l'interprétation de toutes les informations inter-critères que l'on peut être amené à véhiculer lorsque l'on introduit des coefficients d'importance de type k_j, des seuils de veto v_j ou encore des principes ou hypothèses comme ceux du 3.1.4 supposent simplement que les couples d'échelons liés à un critère donné peuvent être répartis entre un petit nombre de catégories. Le fait qu'un couple soit affecté à telle ou telle catégorie lui confère une signification particulière (voire une absence de signification). Les nombres qui servent à coder les performances (les pourcentages dans les exemples numériques ci-dessus) n'opèrent pas en tant que quantités puisqu'on pourrait leur substituer des désignations purement ordinales (par exemple à partir d'échelles du type : "catastrophique, "très mauvais", "mauvais", "médiocre", ..., "bon", "très bon", "excellent") et expliciter, pour chaque catégorie, la liste des actions qu'elles renferment.

Au 3.1.5 au contraire, ni les principes sur lesquels se fonde le calcul d'un bilan par compensation, ni le concept de taux de substitution ne peuvent s'accommoder d'échelles dont on ne veut exploiter que le caractère purement ordinal, même si on les complète par une répartition des écarts de performances entre un petit nombre de catégories. C'est le signe que l'on a quitté les considérations de type O pour rentrer dans celles de type C. Sur ces bases, on peut parler d'informations inter-critères de type O et d'informations inter-critères de type C.

3.2 PROCÉDURE D'AGRÉGATION MULTICRITÈRE : DÉFINITION ET PREMIERS EXEMPLES

On a vu, au 3.1, un certain nombre de concepts utiles pour raisonner la comparaison d'actions évaluées sur une famille de critères. La mise en œuvre de ces raisonnements conduit souvent à utiliser ce que nous définirons, au 3.2.1, comme une Procédure d'Agrégation MultiCritère (PAMC). C'est toujours le cas lorsque l'élaboration de la recommandation prend appui sur un modèle explicite des préférences globales comme dans les approches opérationnelles 1 et 2. Le concept de PAMC sera illustré, au 3.2.2, par quelques exemples simples. Ceux-ci permettront au lecteur de se familiariser avec les notions utiles pour aborder les chapitres 4 et 5 où d'autres PAMC, plus complexes, seront présentées.

Dès lors qu'elle amène à bâtir un modèle de préférences plus riche que celui fourni par Δ_F ou S_Δ, une PAMC fait intervenir ce que nous avons appelé, au 3.1.6, des informations inter-critères. Parmi ces informations, celles concernant l'importance relative des divers critères sont cruciales. On y consacre le 3.2.3.

On concluera ce chapitre, au 3.2.4, par quelques remarques concernant les liens et les différences entre le problème de l'agrégation des performances et celui, classique en théorie du choix social, de l'agrégation des préférences individuelles en une préférence collective.

3.2.1 Définition et remarques

DÉFINITION 3.2.1 : Une **procédure d'agrégation multicritère (PAMC)** est une règle, un procédé permettant d'établir, sur la base du tableau des performances et d'informations inter-critères (cf. 3.1.6), un ou plusieurs systèmes relationnels de préférences (s.r.p.) sur l'ensemble A des actions (et, éventuellement, sur l'ensemble des mutations (A × A)).

Cette définition, très générale, appelle quelques remarques :

Remarque 1 : Le s.r.p. sur A dont il est question dans la définition peut prendre des formes diverses : (I, P), (I, Q, P), (I, P, R), (S, R), ... Lorsque le s.r.p. ainsi établi exclut toute incomparabilité et possède des propriétés remarquables de transitivité [1], on dira que la PAMC vise à l'établissement d'un critère unique de synthèse. Ces PAMC seront étudiées en détail au chapitre 4. Les autres font l'objet du chapitre 5.

Remarque 2 : Ce sont le ou les s.r.p. obtenus par application d'une PAMC qui serviront de base à l'élaboration d'une recommandation. Lorsque la PAMC vise à l'établissement d'un critère unique de synthèse, l'exploitation des modèles de préférences pour parvenir à une recommandation dans une problématique donnée s'opère, en général, de façon simple comme on le verra

[1] Cf. 1.4 et 1.6.

au 6.1. Le problème est beaucoup plus complexe s'agissant des autres PAMC. Nous l'aborderons au chapitre 6.

Remarque 3 : La donnée d'un tableau de performances est suffisante à elle seule pour bâtir sur A un s.r.p. (Δ_F, R_{Δ_F}) qui peut être vu comme le produit d'une PAMC particulièrement frustre [1]. Raffiner ce modèle des préférences globales suppose inévitablement, même si cela est souvent inconscient ou implicite dans les études réelles, d'utiliser – et donc d'obtenir et de modéliser – des informations extérieures au tableau de performances. On verra, tout au long de cet ouvrage, que ces informations inter-critères sont très spécifiques à la PAMC utilisée. La façon de les obtenir, de les modéliser, de gérer les inévitables divergences d'opinion parmi les acteurs du processus de décision à propos de ces informations constitue des options cruciales de l'approche opérationnelle retenue (cf. 3.1.6).

Remarque 4 : La plupart des PAMC ne visent qu'à l'établissement d'un s.r.p. sur A (éventuellement par le biais d'un critère). Cependant, comme on le verra au 4.4, il est également possible de chercher à élaborer une information plus riche et à prendre position sur le problème de la comparaison de mutations [2]. Ceci explique la précaution prise à la fin de la définition 3.2.1, une PAMC pouvant conduire à l'établissement d'un s.r.p. sur l'ensemble $A \times A$ des mutations. Bien souvent, le fait de disposer d'un s.r.p. sur $A \times A$ facilite grandement l'exploitation des résultats de la PAMC en fonction de la problématique retenue.

Remarque 5 : Les divers s.r.p. auxquels peut conduire une PAMC peuvent être vus soit comme un ensemble de s.r.p. élaborés à un moment donné, soit comme une succession de s.r.p. bâtis à des moments différents dans le temps. Dans le premier cas, l'existence de plusieurs s.r.p. pourra s'interpréter comme marquant l'existence de préférences (d'indifférences, de surclassements) plus ou moins crédibles, probants ou marqués. Dans le

[1] Cf. 3.1 où d'autres PAMC simples ont déjà été envisagées.

[2] Cf. MMCAD, 7.2.4.

second cas, elle traduira le fait que les préférences de l'acteur Z ont évolué au cours même du processus de modélisation (cf. Roy (1987)). Ces deux phénomènes peuvent coexister.

Remarque 6 : Si la famille F de critères est cohérente au sens de la définition 2.2.1, il convient de s'assurer que le (ou les) s.r.p. établis par une PAMC donnée sur la base de F satisfont bien à l'axiome 2.2.2 [1]. Il s'agit là d'une vérification ayant trait à la compatibilité entre la PAMC et la définition des critères qu'il est toujours prudent d'opérer.

Remarque 7 : Telle que nous l'avons définie, une PAMC pourra faire intervenir des vecteurs de performances autres que $\underline{g}(a)$ et $\underline{g}(b)$ dans l'établissement de la (ou des) relation(s) liant a et b, mettant ainsi en défaut une propriété d'"**indépendance vis-à-vis des actions non pertinentes**" [2]. Nous n'envisagerons pas dans la suite de telles PAMC [3]. Comme nous le verrons cependant au chapitre 6, on peut vouloir tirer parti de ce (ou ces) s.r.p. pour parvenir à une recommandation en utilisant des techniques ne respectant pas cette propriété d'indépendance vis-à-vis des actions non pertinentes.

Remarque 8 : Les PAMC étudiées dans ce chapitre (ainsi qu'aux deux chapitres suivants) feront toutes l'hypothèse que le pouvoir discriminant des critères contenus dans le tableau des performances a pu être précisé à l'aide de seuils de discrimination, ce qui en fait soit des vrai, quasi, pré ou pseudo-critères [4]. Ceci implique que la relation S_g que le critère modélise soit complète et possède des propriétés remarquables de transitivité. Notre expérience nous incite à penser que cette hypothèse est opérationnelle.

En-dehors de toutes les autres options constitutives d'une approche opérationnelle, mettre en œuvre une PAMC, c'est-à-dire combiner l'information contenue dans le tableau des performances avec d'autres informations pour parvenir à un ou plusieurs s.r.p., implique de prendre position sur un certain nombre de problèmes cruciaux en matière d'agrégation : quelle importance accorder aux différents critères ? Comment compenser des écarts de préféren-

[1] L'axiome d'exhaustivité 2.2.1 et l'axiome de non redondance 2.2.3 ont un statut différent à cet égard puisque la PAMC travaille exclusivement sur la base de F et d'informations inter-critères y afférant.

[2] Une traduction française possible de "independence of irrelevant alternatives".

[3] Ceci en conformité avec MMCAD, 11.1.1.

[4] Cf. 1.6.3.

ce ? Comment prendre en compte le pouvoir discriminant plus ou moins grand des différents critères ? De même que pour le choix d'une approche opérationnelle, le choix d'une PAMC ne saurait que faiblement dépendre d'un raisonnement hypothético-déductif [1]. Notre objectif dans cette section, de même que dans la suite de cet ouvrage, ne saurait donc être de guider le lecteur vers le choix d'une "meilleure" PAMC pour chaque type de situations.

Au 3.2.2, on présentera un certain nombre de PAMC élémentaires. Celles-ci peuvent, dans certains cas, être utilisées telles quelles. Elles constituent surtout le cœur de PAMC plus complexes, fort importantes, que nous rencontrerons aux chapitres 4 et 5.

Au 3.2.2, comme dans la suite de cet ouvrage, on s'efforcera de montrer, pour chaque PAMC, quelles sont les propriétés que devrait "posséder" [2] le tableau des performances pour pouvoir l'appliquer, quelles informations supplémentaires recueillir ou élaborer et comment les transformer pour parvenir au(x) s.r.p. Ce faisant, on s'efforcera de préciser comment chaque PAMC prend position sur les différents problèmes évoqués plus haut. Ce dernier aspect est tout-à-fait essentiel pour aider l'homme d'étude à choisir telle ou telle PAMC.

Cette mise à jour des caractéristiques sous-jacentes à chaque PAMC est traditionnellement effectuée en théorie de la décision par une analyse de type axiomatique s'efforçant de cerner les "hypothèses de rationalité" permettant de recourir à la procédure d'agrégation analysée. Comme nous le verrons par la suite l'interprétation de ces axiomes ne va pas sans poser problème dans certaines situations. Le fait de disposer des conditions nécessaires et suffisantes pour pouvoir "appliquer" telle ou telle PAMC est souvent loin de permettre de comprendre précisément ce que mettre en œuvre cette PAMC revient à supposer dans le cadre d'une étude d'aide à la décision. Cependant, en dépit de ces difficultés, nous avons cru utile de devoir faire figurer, dans ce chapitre ainsi qu'aux deux suivants, quelques remarques ayant trait à l'analyse axiomatique des PAMC étudiées. Cette analyse axiomatique permet en effet souvent de faire ressortir un certain nombre de caractéristiques fondamentales

[1] Cf. MMCAD, 11.1.2.

[2] Le terme posséder est ici mis entre guillemets car le tableau des performances est un "construit", fruit d'un travail de modélisation souvent long au cours duquel de nombreuses options ont déjà été prises. Face à un même problème, il est envisageable de modéliser le tableau des performances de différentes façons et donc de lui reconnaître ou non certaines propriétés.

que l'intuition seule ne permet pas, en général, de découvrir et ainsi de comparer plus précisément ce qui sépare différentes PAMC.

Cependant, il s'agira plus pour nous de donner au lecteur une "porte d'entrée" dans une littérature très abondante (et, le plus souvent, en langue anglaise) que de faire œuvre mathématique. C'est pourquoi nous omettrons généralement les démonstrations des propositions annoncées lorsque celles-ci sont facilement accessibles. De même, pour ne pas alourdir inutilement l'exposé, nous avons souvent cherché à privilégier la lisibilité de ces propositions au détriment d'une présentation rigoureuse sur le plan formel.

3.2.2 Présentation de quelques PAMC élémentaires

Ce paragraphe s'attachera à présenter quelques PAMC élémentaires fondées sur les raisonnements et les concepts introduits au 3.1 et permettant d'enrichir Δ_F ou S_Δ sur A.

a) PAMC lexicographique

On a déjà souligné au 3.1 que, dans la phase d'agrégation, un problème crucial réside dans l'importance relative à accorder à chaque critère. Une **PAMC lexicographique** repose sur un rangement de tous les critères de F selon un ordre complet traduisant une hiérarchie d'importance. Celle-ci reflète une importance dictatoriale [1] en ce sens que l'on ne tiendra compte de ce qui se passe sur les critères situés au bas de la hiérarchie que lorsque les comparaisons effectuées sur les critères hiérarchiquement supérieurs l'autorisent.

Précisons ce à quoi conduit ce principe dans le cas où F ne contient que des vrai-critères [2], ces critères ayant été numérotés par ordre d'importance hiérarchique décroissante. Pour comparer deux actions a et b en utilisant une PAMC lexicographique, on s'intéresse tout d'abord au critère g_1 qui est le plus important. Supposons que la comparaison des valeurs $g_1(a)$ et $g_1(b)$ traduise une préférence stricte de a sur b, c'est-à-dire que $g_1(a) > g_1(b)$.

[1] ou bureaucratique.

[2] On verra que l'application d'une PAMC lexicographique à une famille F ne comprenant pas que des vrai-critères ne va pas sans soulever des difficultés.

Avec une PAMC lexicographique, on concluera alors que, globalement, a est strictement préférée à b quelles que soient les évaluations de ces deux actions sur les critères autres que g_1. En revanche, si les évaluations $g_1(a)$ et $g_1(b)$ traduisent une indifférence entre a et b (ce qui implique $g_1(a) = g_1(b)$), on s'intéressera alors à la comparaison des évaluations $g_2(a)$ et $g_2(b)$. Si celle-ci traduit l'existence d'une préférence stricte de a sur b, on conclut alors à l'existence d'une préférence stricte au niveau global. Au contraire, l'existence d'une situation d'indifférence entre a et b sur g_2 implique de s'intéresser à la comparaison de $g_3(a)$ et $g_3(b)$ et ainsi de suite. Ainsi, cette PAMC, lorsque les n critères de F sont des vrai-critères, conduit à ranger les actions de A selon un préordre complet (I, P) de la même manière que les mots d'une langue sont rangés dans un dictionnaire, d'où le qualificatif lexicographique.

Cette analogie du dictionnaire ne doit cependant pas faire illusion puisque ce type de PAMC peut ne pas conduire à un rangement des actions sous forme de préordre complet lorsque la famille F ne contient pas que des vrai-critères. Considérons, à titre d'exemple, les données du tableau 3.2.1 dans lequel trois actions sont évaluées sur une famille F de deux quasi-critères [1] à seuil constant.

Si l'on suppose que g_1 est hiérarchiquement plus important que g_2, l'application d'une PAMC de type lexicographique conduit alors a :

c P b, b P a, a P c.

Cet exemple suffit à montrer que la simplicité avec laquelle cette PAMC résout le problème de l'agrégation ne va pas sans contrepartie. De plus, il n'est pas simple de vouloir adapter cette PAMC au cas où l'on dispose d'une hiérarchie d'importance se présentant sous la forme d'un préordre complet (ou de toute autre structure plus faible [2]) : le principe à adopter dans le cas où les évaluations sur deux critères jugés d'égale importance conduit à des conclusions opposées est loin de s'imposer avec évidence. L'introduction de situations de préférence faible (qui traduisent une hésitation entre la préférence stricte et l'indifférence) ne va pas également sans poser problème. Dans le cas où la comparaison de $g_1(a)$ et $g_1(b)$ nous conduit à adopter une situation de

[1] On trouvera de nombreux résultats utiles concernant l'agrégation lexicographique de quasi-ordres dans Pirlot et Vincke (1992).

[2] Cf. 1.4.2.

préférence faible a Q_1 b sur ce critère, faut-il admettre que, globalement, a est faiblement préférée à b ou, au contraire, faut-il s'intéresser au critère g_2 pour admettre, par exemple, qu'une situation de préférence stricte b P_2 a permettra de conclure que, globalement, b S a ?

Tableau 3.2.1 : Exemple numérique

	g_1	g_2
p = q	3	1
a	10	8
b	8	10
c	6	12

Faisons enfin remarquer que, pour pouvoir appliquer ce type de PAMC, il faut que les acteurs du processus de décision admettent l'idée d'une hiérarchie d'importance amenant à négliger entièrement ce qui peut se passer sur les critères "subalternes". Compte-tenu des préceptes qui ont conduit à l'élaboration de F et du tableau des performances, il nous semble qu'un tel consensus ne pourra se produire que dans des situations assez exceptionnelles.

En dépit de ces inconvénients, cette PAMC présente des avantages lorsqu'il s'agit de tirer rapidement une conclusion à partir du tableau des performances. Elle permet de plus de faire ressortir les principaux problèmes liés à l'agrégation des performances : quelle importance accorder aux différents critères et que signifie cette importance ? Comment tenir compte du pouvoir discriminant plus ou moins grand des différents critères ?

Cette PAMC a été utilisée dans un certain nombre de méthodes multicritères et, en particulier, celles issues du "goal programming" [1]. Mentionnons en dernier lieu que, d'un point de vue théorique, cette PAMC présente de nombreux points communs avec celles utilisant la notion de concordance et celles utilisant l'idée d'utilité additive sur lesquels nous reviendrons dans la suite de cet ouvrage [2].

[1] On parle alors de "goal programming" avec "poids préemptifs" (cf. Zeleny (1982)).

[2] Pour une étude théorique approfondie de cette PAMC, on pourra se reporter à Fishburn (1974).

b) PAMC élémentaire de type concordance

On a déjà évoqué au 3.1.2 une façon simple de bâtir un s.r.p. en utilisant la seule notion de concordance. Fondée sur des informations inter-critères de type O, elle amène à affecter, à chaque coalition C de critères, une importance k[C]. Dans ce paragraphe, nous présentons deux PAMC élémentaires fondées sur cette seule notion.

La PAMC concordance de type ELECTRE I conduit à un s.r.p. (S, R) et revient à poser :

$$a \; S \; b \text{ si } \frac{k[C(a \; S \; b)]}{k[F]} \geq s,$$

$$a \; R \; b \text{ si Non}(a \; S \; b) \text{ et Non}(b \; S \; a)$$

où s est une valeur comprise entre 0 et 1. Prendre en compte une telle valeur permet d'être plus ou moins exigeant sur l'importance de la coalition C(a S b) nécessaire pour asseoir la proposition a S b. Poser s = 1 dans le cadre de cette PAMC conduit à un surclassement qui n'est autre que S_Δ.

La **PAMC concordance de type Rochat** [1] conduit, elle, à un s.r.p. (I, P) avec :

$$a \; P \; b \text{ si } k[C(a \; P \; b)] > k[C(b \; P \; a)],$$
$$a \; I \; b \text{ si } k[C(a \; P \; b)] = k[C(b \; P \; a)].$$

Cette dernière PAMC revenant à négliger les g_j critères tels que a Q_j b ou b Q_j a, il pourra être prudent de restreindre son application éventuelle au cas où l'on dispose d'une famille F de vrai ou quasi-critères.

Il est bien entendu possible d'imaginer d'autres PAMC fondées sur la seule notion de concordance. En pratique, l'importance d'une coalition C sera souvent appréciée de façon additive en posant (cf. 3.1.2) :

[1] Cette PAMC est en effet inspirée du travail de Rochat (1980).

$$k[C] = \sum_{i \in C} k_i$$

après avoir associé un coefficient d'importance positif k_i à chaque critère [1].

Les PAMC fondées sur la seule notion de concordance ne conduisent pas, en général, à des s.r.p. ayant des propriétés remarquables de transitivité.

A titre d'exemple, considérons le tableau 3.2.2 où 3 actions sont évaluées sur une famille F de 3 vrai-critères.

L'application d'une PAMC concordance de type Rochat avec $k_1 = k_2 = k_3$ conduit alors au s.r.p.

c P b, b P a, a P c.

Nous reviendrons au chapitre 5 sur d'autres façons de définir des PAMC utilisant la notion de concordance.

c) PAMC élémentaire de type concordance discordance

On a vu au 3.1.3 l'intérêt, voire la nécessité, de recourir à l'idée de discordance parallèlement à celle de concordance. Prendre en compte l'idée de discordance au sein d'une PAMC revient à refuser d'admettre une proposition de type a S b, a Q b, a P b ou a I b dès lors que, sur certains critères de C(b P a), la différence $(g_i(b) - g_i(a))$ est jugée trop importante. Comme on l'a vu, une façon simple de recourir à cette notion consiste à définir un "seuil de veto" sur chaque critère. Ce seuil

[1] Il est facile de montrer qu'une PAMC de type lexicographique est un cas particulier d'une PAMC concordance de type Rochat. Pour s'en convaincre, il suffit de remarquer, compte-tenu de (r.3.2.1), qu'une hiérarchie de critère 1, puis 2, puis 3 dans une PAMC de type lexicographique revient à adopter des importances telles que : k[{1}] > k[{2, 3}] et k[{2}] > k[{3}] > k[∅] dans une PAMC concordance de type Rochat.

de veto [1] est tel que, s'il existe un critère i tel que $g_i(b) - g_i(a) > v_i$, on est amené à refuser toute proposition faisant apparaître a comme au moins aussi bonne que b. Cette idée de veto a été présentée et discutée au 3.1.3 (cf. en particulier (r.3.1.6)). Le lecteur notera cependant que les rôles de a et b ont été ici permutés par rapport à (r.3.1.6). Ce seuil est toujours supérieur au seuil de préférence p_i.

Tableau 3.2.2 : Exemple numérique

	g_1	g_2	g_3
a	10	9	8
b	8	10	9
c	9	8	10

En utilisant les deux PAMC élémentaires de type concordance qui viennent d'être évoquées, on peut alors obtenir deux PAMC élémentaires de type concordance-discordance. La première, à laquelle nous donnerons le nom de PAMC de type ELECTRE I, repose sur la façon de modéliser la notion de concordance évoquée au 2.3.3 et conduit à un s.r.p. (S, R) de la façon suivante :

$$\text{a S b si } \frac{k[C(a\ S\ b)]}{k[F]} \geq s \text{ et } g_i(b) - g_i(a) \leq v_i,\ \forall\ i \in F,$$
$$\text{a R b si Non(a S b) et Non(b S a).}$$

Notons ici encore que poser $s = 1$ revient à exiger l'unanimité des critères pour déclarer que a S b. Dans ce cas, l'effet de veto ne joue jamais et le surclassement obtenu s'identifie avec S_Δ.

[1] Notons que, comme on l'a vu au 3.1.3, rien n'empêcherait de raisonner avec un seuil de veto pouvant varier selon l'endroit où l'on se trouve sur l'échelle du critère.

On peut également chercher à introduire la notion de discordance sur la base d'une PAMC concordance de type Rochat. On est alors conduit à un s.r.p. (I, P, R) de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
&\text{a P b si } k[C(a\ P\ b)] > k[C(b\ P\ a)] \text{ et}\\
&\qquad g_i(b) - g_i(a) \leq v_i,\ \forall\ i \in F,\\
&\text{a I b si } k[C(a\ P\ b)] = k[C(b\ P\ a)] \text{ et}\\
&\qquad g_i(b) - g_i(a) \leq v_i,\ \forall\ i \in F,\\
&\qquad g_i(a) - g_i(b) \leq v_i,\ \forall\ i \in F,\\
&\text{a R b si Non(a P b), Non(b P a) et Non(a I b).}
\end{aligned}$$

Ces PAMC ainsi que d'autres, moins élémentaires, fondées sur les concepts de concordance et de discordance seront étudiées plus en détail au chapitre 5.

d) PAMC de type somme pondérée

Les PAMC qui viennent d'être évoquées ne prennent pas en compte l'idée de bilan par compensation évoquée au 3.1.5. Comme on l'a vu, une façon simple de prendre en compte cette idée revient à définir, pour chaque critère i, un "taux de conversion" $1/n_j$ permettant d'exprimer des écarts $(g_j(a) - g_j(b))$ dans la "monnaie" d'un critère de référence.

Dans le cas d'une famille cohérente de vrai-critères, ceci peut conduire à une PAMC produisant un s.r.p. de type (I, P) qui est un préordre complet en posant :

$$\text{a P b si } \sum_{i=1}^{n} k_i \cdot (g_i(a) - g_i(b)) > 0,$$

$$\text{a I b si } \sum_{i=1}^{n} k_i \cdot (g_i(a) - g_i(b)) = 0$$

où les k_i représentent les "taux de conversion". On peut les normaliser de façon à ce que l'on ait $\sum_{i=1}^{n} k_i = 1$.

Il est bien sur possible de récrire ces deux expressions de manière plus classique en posant :

$$a \text{ P } b \text{ si } \sum_{i=1}^{n} k_i \cdot g_i(a) > \sum_{i=1}^{n} k_i \cdot g_i(b),$$

$$a \text{ I } b \text{ si } \sum_{i=1}^{n} k_i \cdot g_i(a) = \sum_{i=1}^{n} k_i \cdot g_i(b).$$

Cette PAMC ne convient que lorsque l'on travaille avec une famille F de vrai-critères dans laquelle les seuls écarts non significatifs sont ceux pour lesquels $(g_i(a) - g_i(b))$ vaut exactement 0. Cette réécriture est alors peu adaptée si l'on souhaite généraliser le modèle de la somme pondérée à des familles ne comprenant plus que des vrai-critères.

Dans le cas d'une famille cohérente de quasi-critères, on peut aménager simplement les expressions ci-dessus en posant :

$$a \text{ P } b \text{ si } \sum_{i \in C(a|b)} k_i \cdot (g_i(a) - g_i(b)) > 0,$$

$$a \text{ I } b \text{ si } \sum_{i \in C(a|b)} k_i \cdot (g_i(a) - g_i(b)) = 0,$$

ce qui revient à exclure les écarts non significatifs, c'est-à-dire tels que $|g_i(a) - g_i(b)| \leq q_i$, du bilan par compensation. Bien d'autres façons de faire sont néanmoins envisageables. On en verra certaines au 5.3.2 c).

Dans le cas d'une famille cohérente de pseudo-critères, on peut chercher à ne faire figurer les écarts tels que $q_i < g_i(a) - g_i(b) \leq p_i$ que pour une part dans le bilan par compensation. Une façon simple de le faire consiste à poser, lorsque les seuils p_i et q_i sont constants :

$$a \text{ P } b \text{ si } \sum_{i \in C(a|b)} k_i \cdot f_i(g_i(a) - g_i(b)) > 0,$$

$$a \text{ I } b \text{ si } \sum_{i \in C(a|b)} k_i \cdot f_i(g_i(a) - g_i(b)) = 0,$$

les f_i étant des fonctions telles que :

$$f_i(x) = x \text{ si } |x| > p_i \text{ et}$$

$$f_i(x) = \frac{p_i \cdot (x - q_i)}{p_i - q_i} \text{ si } q_i < x \leq p_i,$$

$$f_i(x) = \frac{p_i \cdot (x + q_i)}{p_i - q_i} \text{ si } q_i < -x \leq p_i.$$

On peut prolonger la fonction f_i dans l'intervalle $[-q_i, +q_i]$ conformément à ce qui a été fait à la figure 3.2.1. On peut alors écrire :

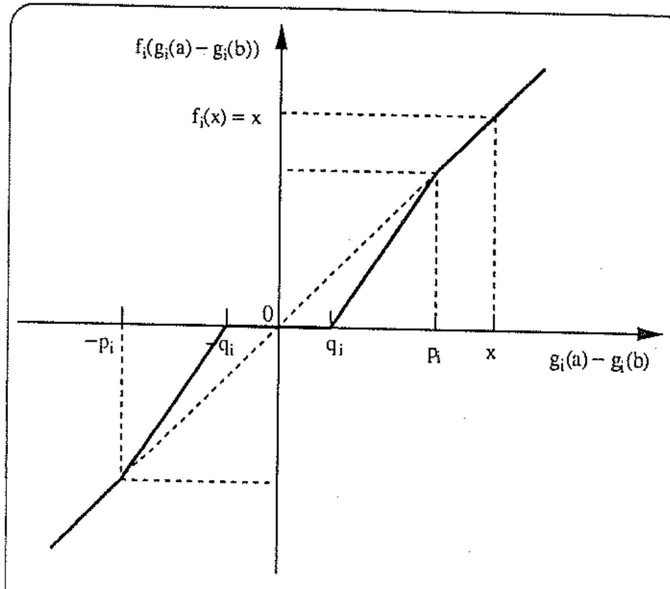

Figure 3.2.1. Représentation graphique des fonctions f_i

$$a \text{ P } b \text{ si } \sum_{i=1}^{n} k_i \cdot f_i(g_i(a) - g_i(b)) > 0,$$

$$a \text{ I } b \text{ si } \sum_{i=1}^{n} k_i \cdot f_i(g_i(a) - g_i(b)) = 0.$$

Les PAMC que nous avons présentées dans le cas d'une famille cohérente de quasi ou pseudo-critères conduisent toutes deux à des s.r.p. de type (I, P). Au contraire de ce qui se passe dans le cas d'une famille de vrai-critères, ces PAMC ne conduisent cependant pas à des s.r.p. où I et P sont transitifs comme le montre l'exemple du tableau 3.2.3.

Tableau 3.2.3 : Exemple numérique

	g_1	g_2	g_3
p = q	20	20	20
a	100	100	100
b	119	119	79
c	138	138	61

Avec les données du tableau 3.2.3, choisir $k_1 = k_2 = k_3 = 1/3$ conduit alors au s.r.p. a P b, b P c, c P a.

3.2.3 Prise en compte de l'importance relative des critères dans une PAMC

Les considérations du paragraphe précédent ainsi que ce qui a été dit au 3.1 font ressortir que, parmi les informations extérieures au tableau des performances nécessaires à la mise en œuvre d'une PAMC, celles concernant l'importance relative à accorder aux différents critères étaient cruciales. Ceci est conforme à l'idée que l'on se fait habituellement du multicritère : pour agréger, il faut des "poids", poids qui traduisent, en termes numériques, la notion d'importance relative. Il convient cependant de remarquer dès à présent que l'idée de "poids" n'est pas la seule façon de quantifier cette notion. Comme on l'a déjà souligné au 3.1, d'autres grandeurs telles les seuils de veto peuvent permettre d'en saisir des facettes différentes. Nous limiterons cependant notre attention, dans ce paragraphe, au problème des "poids". Nous aurons l'occasion de revenir sur cette question à plusieurs reprises dans cet ouvrage. Il nous a cependant semblé bon de faire dès à présent quelques brèves remarques d'ordre général qui nous paraissent importantes.

a) La plupart des PAMC conduisent à associer, à chaque critère i, un nombre k_i reflétant une facette de l'importance de ce critère au sein de la procédure d'agrégation. Il convient de

remarquer que :

– Toutes choses égales par ailleurs, plus ce coefficient k_i est élevé, plus le critère i acquiert d'importance.

– L'ordre des k_i ne peut pas toujours s'interpréter simplement en termes d'importance relative des différents critères. Ainsi, dans une PAMC de type somme pondérée, changer l'unité dans laquelle s'exprime le critère i implique de changer la valeur numérique du coefficient k_i, ce qui peut entraîner un bouleversement de l'ordre de ces coefficients si l'on souhaite que ce changement d'unité ne se traduise pas par l'établissement d'un s.r.p. différent. L'expression "poids" prêtant souvent à confusion [1], nous utiliserons l'expression de "coefficients d'importance" pour désigner les k_i. De même, nous parlerons de "jeu de coefficients d'importance" pour désigner le n-uple $(k_1, k_2, ..., k_n)$.

On a vu, au paragraphe précédent, que les PAMC de type somme pondérée ou concordance élémentaire utilisaient de tels coefficients k_i. Les PAMC lexicographiques n'y font pas explicitement appel. Pourtant, il est aussi possible, dans ce cadre, d'affecter un coefficient k_i à chaque critère pour refléter son importance hiérarchique. Toutefois, seul l'ordre des critères défini par les k_i interviendrait alors pour définir le s.r.p.

b) Il importe de souligner que ces coefficients n'ont pas la même interprétation d'une PAMC à une autre du fait de l'utilisation différente qui en est faite. Dans une PAMC de type concordance élémentaire, ils servent à traduire une idée d'importance entre coalitions de critères et constituent des informations inter-critères de type O. Dans une PAMC de type somme pondérée, ils permettent de valoriser, sur une même échelle, des écarts de préférence selon différents critères (cf. 3.1.5) ; ils constituent donc alors une information inter-critère de type C comme on l'a déjà souligné au 3.1.6. Ces coefficients ne peuvent donc s'interpréter en-dehors du cadre de la PAMC qui les utilise, étant

[1] La notion de poids est en effet souvent associée intuitivement aux seules PAMC de type somme pondérée.

intrinsèquement dépendants de l'idée d'importance véhiculée par cette PAMC. Il faut donc être très prudent lorsque l'on cherche à comparer les valeurs numériques de ces coefficients d'importance utilisés dans différentes PAMC. Ceci est d'autant plus vrai que, comme on l'a indiqué plus haut, d'autres grandeurs que les coefficients d'importance peuvent intervenir au sein d'une PAMC pour prendre en compte certains aspects de l'importance relative des critères.

c) Supposons qu'en utilisant une PAMC donnée sur un tableau de performances avec un jeu donné de coefficients d'importance, on ait obtenu un certain s.r.p. On peut alors se demander si d'autres jeux de coefficients d'importance auraient pu conduire à un s.r.p. identique.

Remarquons tout d'abord que, dans la plupart des PAMC, si le jeu de coefficients d'importance $(k_1, k_2, ..., k_n)$ conduit à un s.r.p., tous les jeux du type $(\alpha{\cdot}k_1, \alpha{\cdot}k_2, ..., \alpha{\cdot}k_n)$ avec $\alpha > 0$ conduisent à un s.r.p. identique. On peut donc, sans inconvénients, raisonner en supposant que le jeu de coefficients a été normalisé de manière arbitraire. Une normalisation commode consiste à poser $\sum_{i=1}^{n} k_i = 1$.

Une fois décidé d'une normalisation arbitraire, plusieurs jeux de coefficients d'importance différents peuvent-ils conduire au même s.r.p. ? Dans une PAMC concordance élémentaire de type Rochat (et donc, a fortiori, dans une PAMC lexicographique), la réponse à cette question est positive. Tous les jeux de coefficients d'importance traduisant (par addition) une même hiérarchie des groupes de critères conduisent au même s.r.p. Appliquer une PAMC concordance élémentaire de type Rochat sur une famille cohérente de 3 critères avec

$$k_1 = 1/10,\ k_2 = 2/10,\ k_3 = 1/10$$

conduit à un s.r.p. qui est le même que si l'on avait choisi le jeu

$$k_1' = 2/11,\ k_2' = 3/11,\ k_3' = 6/11.$$

En effet, il est facile de vérifier que, $\forall$ I, J $\subset$ F, I $\cap$ J = $\varnothing$:

$$\sum_{i \in I} k_i > \sum_{j \in J} k_j \Leftrightarrow \sum_{i \in I} k_i' > \sum_{j \in J} k_j'.$$

Le lecteur pourrait penser qu'il n'en va pas de même dans une PAMC de type somme pondérée. Ceci n'est cependant vrai que dans le cas où l'ensemble A est "continu". On verra en effet, au 4.2.1.2, que, dans le cas où A est fini, il existe toujours une infinité de jeux de coefficients d'importance (normalisés) conduisant au même s.r.p. dans le cadre d'une PAMC somme pondérée.

Ainsi, même dans le cas où l'on cherche à rendre compte de préférences pré-existantes à l'aide d'une PAMC, il est presque toujours possible de le faire en utilisant plusieurs jeux de coefficients d'importance.

d) La plupart des acteurs d'un processus de décision confrontés à un tableau de performances vont émettre des jugements intuitifs et qualitatifs concernant l'importance relative des différents critères. Ces jugements traduisent, en général, une position volontariste de ces différents acteurs : ceux-ci souhaitent voir tel ou tel critère avoir beaucoup de "poids" dans la procédure d'agrégation. Le problème essentiel sera donc, pour l'homme d'étude, de parvenir à traduire ces positions volontaristes en un ou un ensemble de jeux de coefficients d'importance ayant une signification précise au sein de la PAMC retenue. On voit donc que, d'une façon plus nette que l'information contenue dans le tableau des performances, les coefficients d'importance sont des construits [1], fruits d'une modélisation impliquant le recueil et/ou l'élaboration d'informations inter-critères dans le cadre d'une PAMC donnée.

[1] Ceci reste vrai même dans le cadre d'une démarche purement descriptive, plusieurs PAMC pouvant parfois être utilisées pour rendre compte des mêmes préférences globales pré-existantes.

Une façon possible de parvenir à cerner un ensemble de jeux de coefficients d'importance consiste à essayer de directement tirer parti des jugements qualitatifs des acteurs sur l'importance relative des critères [1]. Ceci comporte, à notre sens, un grand nombre de difficultés, indépendamment même du fait que les jugements émis par les différents acteurs se révèlent souvent antagonistes ou conflictuels. Une information en termes d'importance n'a, en effet, pas de signification opérationnelle claire en-dehors d'une PAMC donnée. Au prix de nombreux efforts, on pourrait éventuellement, dans une situation donnée, chercher à savoir quels sont les types de raisonnements plus ou moins formalisés que met en œuvre un acteur pour analyser intuitivement un tableau de performances et tenter d'interpréter l'information fournie en termes d'importance au sein de ces raisonnements [2]. Dans bien des cas, un tel travail nous paraît superflu compte-tenu de sa difficulté et de l'illusoire précision des résultats en termes de coefficients l'importance qui pourrait en résulter au départ d'une formation qualitative et vague. L'important est, à nos yeux, de tenter, lors de l'établissement des coefficients d'importance, de rester cohérent avec ce que semblent être les positions volontaristes des différents acteurs. Ceci implique de renoncer le plus souvent à l'établissement d'un seul jeu de coefficients d'importance. En effet, même si les positions volontaristes des acteurs ne se révèlent pas conflictuelles, le principe même de la traduction de ces positions en termes numériques rend souvent inutile la recherche d'une trop grande précision. Afin d'éviter de raisonner directement sur l'information qualitative en termes d'importance dont l'interprétation est, on l'a vu, délicate, on se fondera, le plus souvent, pour donner une valeur numérique aux indices d'importance, sur l'analyse, au sein d'une PAMC donnée, d'un certain nombre de jugements de préférences émis sur des actions judicieusement choisies. Le choix de ces actions, la façon de formuler les questions et de les enchaîner restent, bien entendu, propres à chaque PAMC. Nous y reviendrons à plusieurs reprises dans la suite de cet ouvrage.

[1] C'est là ce qu'on appelle, dans la littérature, les méthodes dites "psychométriques" de pondération. Leur émergence remonte à Eckenrode (1965). Elles connaissent un regain d'intérêt lié aux travaux de T. Saaty (voir par exemple Saaty (1981)).

[2] Il y a là un champ d'investigation de nature empirique encore très ouvert. Parmi les questions dignes d'intérêt, mentionnons :
- Est-il possible de recueillir de l'information directement en termes d'importance de façon suffisamment fiable ?
- Y a-t-il une méthode de recueil particulièrement efficace à cet égard ?
- L'information recueillie permet-elle, combinée à telle ou telle PAMC, d'expliquer un certain nombre de préférences globales de l'acteur considéré ?
On trouvera des indications utiles sur ces questions dans Mousseau (1993).

3.2.4 Agrégation des performances et agrégation des préférences en théorie du choix social

Le problème de l'agrégation des performances se rapproche, par bien des aspects, du problème classique de l'agrégation des préférences en théorie du choix social [1]. Il suffit, pour s'en rendre compte, de remplacer, dans tout ce qui précède, les mots "critères", "relation S_g", "préférence globale" par "votants", "préférences individuelles" et "préférences collectives". La théorie du choix social est plus ancienne et a donné lieu à bien davantage de travaux que les problèmes multicritères. Il serait donc illusoire de chercher à la résumer ici. Notre objectif sera donc simplement de tenter de préciser les liens unissant ces deux approches.

Depuis l'ouvrage classique d'Arrow (1963), un des problèmes centraux de la théorie du choix social concerne la possibilité d'agréger, en une préférence collective, les préférences de n individus (votants) concernant un ensemble d'actions (candidats) de façon à respecter un certain nombre d'exigences que l'on estime désirables. A ce titre, une telle procédure d'agrégation est formellement identique à une PAMC, les informations intercritères étant remplacées, en théorie du choix social, par les exigences que l'on s'impose de respecter.

La plupart des résultats obtenus dans ce domaine sont des résultats d'impossibilité qui démontrent, sous des conditions générales, l'inexistence d'une procédure d'agrégation respectant un petit nombre d'exigences en apparence raisonnables : absence de dictateur, respect de l'unanimité, etc.

Certains, devant l'identité formelle des deux problèmes, ont cru pouvoir transposer ces résultats d'impossibilité au cas multicritère pour en conclure souvent à la vanité de l'analyse multicritère [2]. Cette conclusion serait fondée si l'on pouvait admettre :

[1] Voir Arrow (1963), Sen (1970, 1982) et Kelly (1978).

[2] Voir par exemple Gargaillo (1982).

1°) que les exigences utilisées en théorie du choix social pour agréger les préférences individuelles doivent l'être aussi au sein des PAMC pour agréger des performances ;

2°) que les seules informations extérieures au tableau de performances dont on dispose pour agréger des performances sont ces exigences.

Dans la majorité des problèmes multicritères, ces deux conditions ne nous paraissent pas satisfaites.

Compte-tenu du nombre extrêmement élevé de façons possibles de combiner diverses exigences de façon à parvenir à un théorème d'impossibilité, il ne nous est pas possible, dans le cadre restreint de cet ouvrage, de fournir une réponse exhaustive aux deux points évoqués. Nous nous contenterons ici de mentionner quelques unes des différences fondamentales entre ces deux approches.

– Dans la définition d'une PAMC, nous avons admis implicitement que le (ou les) s.r.p. issu(s) de son application pouvai(en)t ne pas posséder des propriétés remarquables de transitivité et de complétude rendant ensuite nécessaire la mise en œuvre de techniques d'exploitation de ces relations pour parvenir à une prescription. Il en va différemment en théorie du choix social où l'on suppose soit :

. que l'on cherche à construire une préférence collective ayant des propriétés remarquables de transitivité et de complétude [1],

. que l'on cherche à bâtir une préférence collective quelconque que l'on exploite [2] ensuite de façon à respecter certaines propriétés.

Il y a là une différence importante entre ces deux approches. En particulier, la condition d'indépendance vis-à-vis des actions non pertinentes ainsi que des conditions plus faibles qui lui sont reliées concernant la cohérence vis-à-vis de la contraction ou de la dilatation de l'ensemble des actions est, en général, violée dans la phase d'exploitation du surclassement en analyse multicritère.

– Pour des raisons "institutionnelles", on estime qu'une bonne procédure d'agrégation en théorie du choix social doit pouvoir faire face à n'importe

[1] Ordres ou préordres complets le plus souvent mais aussi, parfois, des structures plus faibles (voir par exemple Sen (1969)). Notons que la recherche de telles structures plus faibles ne contribue que très rarement à supprimer les "cas" d'impossibilité.

[2] Dans une problématique α s'il s'agit d'élire le meilleur candidat (voir par exemple Bordes (1983)).

quel nombre de votants, quelles que soient leurs préférences. Même si cela est rarement précisé explicitement, il est clair, à nos yeux, qu'aucune PAMC ne peut prétendre à cette universalité et que le domaine de validité de ces procédures est généralement réduit à une catégorie limitée de situations délimitées par des conditions plus ou moins difficiles à formaliser que l'on suppose vérifiées dans les cas pratiques.

– Toutes les PAMC font appel à une notion d'importance relative, notion qui est automatiquement exclue en théorie du choix social si l'on admet le principe, fort démocratique, de rationalité voulant que l'opinion exprimée par un votant soit traitée indépendamment de l'identité de ce votant. Il y a là une différence fondamentale et irréductible entre ces deux approches. De plus, la plupart des PAMC font appel à l'idée de comparaison d'écarts de préférence sur différents critères (en termes du choix social, ceci revient à admettre une certaine "comparaison interpersonnelle des utilités"). Pour qu'une telle comparaison soit possible, il est nécessaire de disposer d'une information plus riche que la seule relation S_g sur chacun des critères (cf. MMCAD, 7.2.4 et 9.4), information que l'on exclut généralement en théorie du choix social [1]. On verra d'ailleurs, au 5.5, que les PAMC rejetant l'idée de comparaison d'écarts permettent de retrouver certains théorèmes célèbres d'impossibilité.

Si certaines des exigences classiques utilisées en théorie du choix social se retrouvent "naturellement" en multicritère (respect du principe de Pareto-dominance, monotonicité, absence de dictateur – si l'on fait abstraction des procédures lexicographiques, non imposition de la préférence collective), on voit donc qu'il y a, entre les deux approches, certaines différences fondamentales qui imposent de se garder des assimilations et des transpositions trop brutales tant l'agrégation multicritère présente un certain nombre de caractères spécifiques.

Il ne faudrait cependant pas conclure de cette section que ces deux champs d'investigation sont complètement disjoints. D'une point de vue pédagogique, Vansnick (1986a) a montré comment on peut voir le multicritère comme un élargissement et un déplacement de la problématique de la théorie du choix social. Il y a de plus beaucoup à tirer de l'abondante littérature dans

[1] Il est intéressant de noter que lorsqu'une telle information est admise en théorie du choix social, les procédures d'agrégation utilisées présentent alors des analogies frappantes avec les PAMC (voir par exemple Sen (1977, 1979)). On pourra également se référer à l'approche utilitariste prônée par Harsanyi (1955). Pour une démarche allant du multicritère vers le choix social, on consultera le chapitre 10 de Keeney et Raiffa (1976) ainsi que Dyer et Sarin (1979a).

ce domaine, tant du point de vue de la conception des PAMC que de l'exploitation du surclassement. Nous reviendrons sur ces questions au 5.5 et au 6.5.

Chapitre 4

PROCÉDURES D'AGRÉGATION MULTICRITÈRE CONDUISANT À UN CRITÈRE UNIQUE DE SYNTHÈSE

RÉSUMÉ

L'objet de ce chapitre est l'étude des PAMC visant à établir un s.r.p. sur l'ensemble des actions en bâtissant un critère unique de synthèse $g(a) = V(g_1, g_2, ..., g_n)$.

Ces diverses PAMC se différencient principalement par les propriétés et le pouvoir discriminant qu'elles confèrent à ce critère de synthèse.

La section 4.2 est consacrée à l'étude des PAMC qui bâtissent un vrai-critère de synthèse. On y étudie plus particulièrement la PAMC additive conduisant à poser :

$$g(a) = v_1[g_1(a)] + v_2[g_2(a)] + ... + v_n[g_n(a)]$$

qui est analysée tant du point de vue axiomatique que de celui de sa mise en œuvre.

Après avoir rapidement passé en revue d'autres façons de parvenir à un vrai-critère de synthèse, on consacre la section suivante à l'étude des PAMC visant à l'établissement d'un critère unique de synthèse muni de seuils de discrimination. Bien que l'intérêt de ce type de PAMC soit très important, on montre les difficultés tant pratiques que théoriques que l'on rencontre lorsque l'on souhaite les appliquer.

La section 4.4 est consacrée aux PAMC visant à l'établissement d'un critère de synthèse induisant à la fois un s.r.p. sur A et un s.r.p. sur l'ensemble des mutations A × A. Après avoir montré l'intérêt de ce type de PAMC pour l'aide à la décision et analysé diverses nouvelles hypothèses d'indépendance qui apparaissent dans ce cas, on insiste plus particulièrement sur les formes d'agrégation additives et multiplicatives.