ce domaine, tant du point de vue de la conception des PAMC que de l'exploitation du surclassement. Nous reviendrons sur ces questions au 5.5 et au 6.5.

# Chapitre 4

# PROCÉDURES D'AGRÉGATION MULTICRITÈRE CONDUISANT À UN CRITÈRE UNIQUE DE SYNTHÈSE


**RÉSUMÉ**

L'objet de ce chapitre est l'étude des PAMC visant à établir un s.r.p. sur l'ensemble des actions en bâtissant un critère unique de synthèse $g(a) = V(g_1, g_2, \ldots, g_n)$.

Ces diverses PAMC se différencient principalement par les propriétés et le pouvoir discriminant qu'elles confèrent à ce critère de synthèse.

La section 4.2 est consacrée à l'étude des PAMC qui bâtissent un vrai-critère de synthèse. On y étudie plus particulièrement la PAMC additive conduisant à poser :

$$g(a) = v_1[g_1(a)] + v_2[g_2(a)] + \ldots + v_n[g_n(a)]$$

qui est analysée tant du point de vue axiomatique que de celui de sa mise en œuvre.

Après avoir rapidement passé en revue d'autres façons de parvenir à un vrai-critère de synthèse, on consacre la section suivante à l'étude des PAMC visant à l'établissement d'un critère unique de synthèse muni de seuils de discrimination. Bien que l'intérêt de ce type de PAMC soit très important, on montre les difficultés tant pratiques que théoriques que l'on rencontre lorsque l'on souhaite les appliquer.

La section 4.4 est consacrée aux PAMC visant à l'établissement d'un critère de synthèse induisant à la fois un s.r.p. sur A et un s.r.p. sur l'ensemble des mutations A × A. Après avoir montré l'intérêt de ce type de PAMC pour l'aide à la décision et analysé diverses nouvelles hypothèses d'indépendance qui apparaissent dans ce cas, on insiste plus particulièrement sur les formes d'agrégation additives et multiplicatives.

La section 4.5 de ce chapitre est consacrée au cas particulier des PAMC se fondant sur la théorie de l'utilité espérée de Von Neumann et Morgenstern. On montre qu'elles visent à bâtir un critère unique de synthèse en se fondant sur une description probabiliste des conséquences de la mise à exécution des actions sans nécessairement bâtir un tableau de performances. Dans ce cadre, on peut envisager un grand nombre de PAMC. On se restreint, dans cette section, à l'étude des procédures d'agrégation additives et multiplicatives (qui sont, de loin, les plus utilisées en pratique) et aux problèmes soulevés par leur mise en œuvre.

On conclut ce chapitre au 4.6 par quelques remarques générales sur les problèmes soulevés par la mise en œuvre des PAMC qui y sont présentées.

## 4.1 GÉNÉRALITÉS

Il est naturel et courant de fonder l'aide à la décision sur un modèle de préférences issu d'un critère g défini sur A. Lorsqu'une analyse préalable a montré l'intérêt que pouvait présenter la prise en compte d'une famille F de n critères ($n > 1$), ceux-ci peuvent être synthétisés en un seul par ce que nous avons appelé (cf. définition 3.2.1) une **procédure d'agrégation multicritère**. Les PAMC qui feront l'objet de ce chapitre visent précisément à bâtir sur A une fonction g à valeurs réelles de telle sorte que g puisse être considéré comme un critère et donc en particulier que :

$$g(a) \geq g(b) \Rightarrow a\,S\,b$$

où S est une relation de surclassement globale prenant en compte les n critères de F.

Il importe, dès à présent, d'attirer l'attention du lecteur sur le fait que ce qui est dit dans ce chapitre peut avoir un intérêt dans des approches opérationnelles autres que celles du critère unique de synthèse [1]. Dans une méthode relevant de l'approche opérationnelle du surclassement de synthèse (A.O.2), on pourra, par exemple, chercher à bâtir plusieurs fonctions g conduisant donc à plusieurs relations de surclassement globales et à ne retenir en définitive que l'intersection de ces différents surclassements, laissant ainsi place à d'éventuelles situations d'incomparabilité (cf. 5.3.2.3). Dans l'approche du jugement local interactif (A.O.3), on peut concevoir un protocole d'interaction fondé sur une "succession" de fonctions d'agrégation, formellement identiques à des critères de synthèse définis de façon locale, en fonction des réponses fournies par l'interrogé (cf. chapitre 7).

[1] Cf. 1.7.



La plupart de ces PAMC cherchent à définir le critère g sur la base des critères de F et donc à bâtir une fonction d'agrégation V telle que :

$$g(a) = V(g_1(a), g_2(a), \ldots, g_n(a)).$$

Cette fonction V tient compte à la fois de l'information contenue dans le tableau des performances et d'informations inter-critères (cf. 3.1.6).

On verra au 4.5 qu'on peut également vouloir bâtir V directement à partir du modèle d'évaluation $\Gamma(A)$ des actions de A (cf. 1.5). On a donc, dans le cas plus général :

$$g(a) = V(\Gamma(a)) = V(\{\gamma(a)),\ \delta_i^a(e)\},\ i = 1, 2, \ldots, \bar{n}).$$

Les différentes PAMC visant à bâtir un critère unique de synthèse se différencient principalement par :

– la forme de la fonction V utilisée ;
– la nature des informations inter-critères qu'elles prennent en compte à côté du tableau des performances ;
– le pouvoir discriminant et les propriétés qu'elles confèrent à g.

La section 4.2 est consacrée à l'étude des vrai-critères de synthèse. On y insiste plus particulièrement sur un modèle d'agrégation additif. A la section 4.3, on aborde l'étude de critères de synthèse au pouvoir discriminant plus nuancé. La section 4.4 étudie des critères de synthèse permettant de comparer non seulement des actions mais aussi des écarts entre actions. La théorie de l'utilité espérée fait l'objet de la section 4.5. On conclura ce chapitre au 4.6 par quelques remarques sur les problèmes liés à la mise en œuvre de ces PAMC.

Il est possible d'envisager un très grand nombre de PAMC entrant dans le cadre ci-dessus. Dans ce qui suit, nous nous limiterons à celles qui présentent, à nos yeux, un certain intérêt en aide à la décision. Ceci implique, bien entendu, une part importante de subjectivité. Nous avons cherché principalement à ne mentionner que les PAMC qui ont déjà été appliquées dans des études réelles ou qui, à notre avis, seraient susceptibles de l'être compte-tenu des informations qu'elles requièrent pour bâtir V. On se contentera de mentionner brièvement celles dont l'intérêt est avant tout théorique.

Pour chaque PAMC envisagée, on s'efforcera à la fois de montrer comment elles peuvent être mises en œuvre et quelles sont les hypothèses théoriques qui "sous-tendent" leur utilisation [1]. S'intéresser à l'**analyse axiomatique d'une PAMC** de ce chapitre ou la mettre en œuvre suppose, le plus souvent, de raisonner sur un ensemble d'actions plus riche que l'ensemble A des actions potentielles. Plus précisément, on raisonnera sur un ensemble d'actions contenant A et suffisamment riche d'actions fictives pour que l'on puisse admettre que l'ensemble des vecteurs de performances de ces actions est identique [2] à $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$, produit cartésien des échelles associées aux n critères de F.

L'analyse axiomatique d'une PAMC vise, comme nous l'avons déjà mentionné au 3.2, à caractériser les s.r.p. susceptibles d'être obtenus à l'aide de cette PAMC. Une telle analyse conduit à énoncer les "hypothèses de rationalité" sous-jacentes à l'utilisation d'une PAMC. Si certaines de ces hypothèses peuvent avoir une interprétation relativement simple soit en vue d'un test, soit pour servir de fondement à un raisonnement, il n'est pas exclu que l'analyse axiomatique d'une PAMC fasse apparaître des conditions difficilement interprétables. De plus, comme nous le verrons au 4.2.1.2, il est des cas où le problème de la caractérisation axiomatique n'admet pas de

[1] Appliquer une PAMC aboutit à définir un s.r.p. sur A. Si ce s.r.p. n'est pas remis en cause par les acteurs du processus de décision, il est important de savoir s'il y a bien conformité entre le s.r.p. qui a été bâti et les axiomes de cohérence mentionnés au 2.2. Ce sera le cas de façon évidente pour toutes les PAMC étudiées dans ce chapitre et nous n'y reviendrons pas dans la suite, laissant au lecteur le soin d'opérer ces vérifications s'il le désire.

[2] On s'autorisera, dans ces conditions, à parler de s.r.p. sur $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$.



solution simple (c'est-à-dire qu'il n'existe pas de systèmes d'axiomes pleinement satisfaisants pour caractériser les s.r.p. en question, ce qui est par exemple le cas si l'on a besoin d'une infinité d'axiomes). Dans ce cas, il est fréquent de devoir s'intéresser à un problème moins général admettant une solution simple en imposant au problème de vérifier un certain nombre de conditions structurelles non nécessaires. L'interprétation du système d'axiomes obtenu devient alors extrêmement délicate dans une optique d'aide à la décision (d'autant plus que deux corps d'axiomes suffisants mais pas nécessaires ne sont pas forcément logiquement équivalents), au point qu'il peut paraître légitime de se demander si sa recherche présente véritablement un intérêt. Sans répondre de façon tranchée à cette question, nous croyons néanmoins qu'une telle analyse peut contribuer à mieux faire comprendre le fonctionnement des PAMC et, qu'à terme, elle permettra de mieux les comparer et les utiliser.

Cet ouvrage ne vise pas à faire une revue de littérature complète du problème de l'analyse axiomatique des PAMC. Pour une analyse détaillée de ces problèmes, nous renvoyons aux ouvrages de base en la matière : Krantz et al. (1971), Roberts (1979), Pzangal (1971), Fishburn (1970a). Nous nous contenterons donc, le plus souvent, d'énoncer des résultats renvoyant le lecteur intéressé à ces ouvrages pour y trouver une démonstration complète et rigoureuse.

Avant d'aborder l'étude de ces PAMC, il nous paraît important d'insister sur leur caractéristique essentielle qui est de refuser l'introduction de l'incomparabilité à ce stade de la modélisation (ce qui n'exclut pas, comme nous l'avons déjà mentionné, de les utiliser au sein d'A.O.2, l'incomparabilité étant introduite ultérieurement). Les s.r.p. auxquels ces procédures conduisent sont donc particulièrement riches et, partant, souvent sujets à caution car établis dans des conditions pouvant être remises en cause. Le lecteur familier avec la méthodologie proposée dans MMCAD percevra sans peine tout ce que cette élimination systématique de l'incomparabilité peut parfois avoir de restrictif dans les problèmes réels compte-tenu de la qualité des "données" de $\Gamma(A)$ et de la présence éventuelle d'acteurs multiples ayant des systèmes de valeurs fortement contrastés. Cependant, nous invitons le lecteur à se reporter au 1.6.1 pour se convaincre que l'utilisation de telles PAMC ne doit pas être confondue avec une analyse purement monocritère. Ces PAMC ont été souvent utilisées dans le cadre de méthodes ayant été appliquées à des problèmes réels. Elles présentent donc un intérêt certain en matière d'aide multicritère à la décision.

Soulignons enfin que, lorsque l'on a eu recours à une PAMC bâtissant un critère unique de synthèse, l'élaboration d'une recommandation dans l'une des trois problématiques $\alpha$, $\beta$ ou $\gamma$ s'opère de façon assez naturelle et ne nécessite pas, en général, la mise en œuvre de procédures spécifiques comme on le verra plus précisément au 4.6 et au 6.1.

## 4.2 CAS OÙ L'ON CHERCHE À BÂTIR UN VRAI-CRITÈRE

On verra au 4.3 les difficultés auxquelles conduit l'utilisation d'un critère de synthèse avec seuils de discrimination, ces difficultés allant de pair avec une modélisation des préférences plus réaliste et flexible. De ce fait, la plupart des PAMC visant à bâtir un critère de synthèse cherchent à en faire un vrai-critère. Cette section est consacrée à ces PAMC. Elles conduisent à une modélisation des préférences globales telle que :

$g(a) = V(g_1(a), g_2(a), \ldots, g_n(a))$,
$a \; P \; b \Leftrightarrow g(a) > g(b)$,
$a \; I \; b \Leftrightarrow g(a) = g(b)$.

Dans le cas où l'évaluation des actions de A sur chacun des critères conduit à un petit nombre de valeurs, on peut vouloir chercher à définir la fonction V en se contentant d'associer une et une seule des relations P ou I à la comparaison de tous les couples de vecteurs de performances [1] ($\underline{g}(a)$, $\underline{g}(b)$). C'est cette idée qui est mise en œuvre dans la **méthode des déclassements comparés** [2]. Dans le cas général, on conçoit bien qu'une telle définition de V est souvent difficile. Pour bâtir g, il faut donc, alors, spécifier une forme fonctionnelle précise pour V permettant de donner une valeur à g(a) compte-tenu du vecteur de performances $\underline{g}(a)$ et d'informations inter-critères.

[1] Rappelons que $\underline{g}(a) = (g_1(a), g_2(a), \ldots, g_n(a))$.

[2] Cf. Le Boulanger et Roy (1968). Pour une autre illustration de cette méthode, voir aussi MMCAD, 11.2.2.



Lorsque l'on cherche à bâtir un vrai-critère de synthèse, il semble naturel de vouloir le faire sur la base d'une famille cohérente de vrai-critères. C'est ce que font la plupart des PAMC étudiées dans ce chapitre. Il importe cependant de noter que les trois axiomes fondateurs du concept de famille cohérente n'interdisent nullement de chercher à bâtir un vrai-critère de synthèse sur la base d'une famille de quasi, pré ou pseudo-critères [1]. Sauf mention contraire, on n'envisagera pas ce cas dans la suite de cette section et l'on supposera que l'on travaille sur la base d'une famille cohérente de vrai-critères. Mentionnons cependant que, dans une étude réelle, il peut y avoir un intérêt certain à bâtir un modèle d'évaluation des actions faisant intervenir des seuils de discrimination non nuls, même si, dans une deuxième phase de l'étude, on cherche à obtenir un préordre sur A, par exemple en tirant parti du préordre sous-jacent au quasi, pré ou pseudo-critère [2] ou au moyen d'hypothèses ad hoc.

### 4.2.1 Agrégation additive [3]

#### 4.2.1.1 Définitions et remarques

Un des modèles les plus simples qu'on puisse envisager, en-dehors de la somme pondérée que l'on a déjà étudiée au 3.2.2 et au 3.2.3, revient à supposer que l'on peut donner une valeur à g(a) en additionnant de façon adéquate les diverses composantes de $\underline{g}(a)$. Ceci revient à considérer un modèle tel que, $\forall$ a, b $\in$ A :

$a \; P \; b \Leftrightarrow g(a) > g(b)$,
$a \; I \; b \Leftrightarrow g(a) = g(b)$
avec

$$g(a) = \sum_{i=1}^{n} v_i(g_i(a)) \qquad \text{(r.4.2.1)}$$

où les $v_i$ sont des fonctions monotones strictement croissantes.

[1] En effet, aucun d'eux ne fait apparaître les relations $I_k$, $Q_k$ ou $P_k$.

[2] Cf. 1.4.

[3] On pourrait préciser ici "Agrégation additive d'ordre 1" en référence au travail de Mareschal (1988). Nous nous référerons souvent à la PAMC définie par (r.4.2.1) en parlant d'agrégation additive **simple** pour éviter, lorsque le besoin s'en présentera, tout risque de confusion avec d'autres PAMC utilisant également une opération d'addition. Précisons que le terme de "simple" ne préjuge bien sûr en rien des qualités et de l'intérêt de cette PAMC.

Il est élémentaire de montrer que, dans ces conditions, $v_i(g_i)$ est également un vrai-critère et modélise le même préordre que $g_i$.

Dans les problèmes réels, on peut mettre (r.4.2.1) sous une forme qui permet de mieux en apprécier l'intérêt. Dans ces problèmes, on peut en effet supposer que, $\forall\ i \in F$, l'échelle $E_i$ du critère $g_i$ est bornée inférieurement par une valeur $e_{i*}$ et supérieurement par une valeur $e_i^*$, ces deux valeurs étant distinctes. On notera $\underline{e}_* = (e_{1*}, e_{2*}, ..., e_{n*})$ et $\underline{e}^* = (e_1^*, e_2^*, ..., e_n^*)$. Posons, $\forall\ i \in F$ :

$$v_i^* = v_i(e_i^*),$$
$$v_{i*} = v_i(e_{i*}),$$
$$v^* = \sum_{i=1}^{n} v_i^*,$$
$$v_* = \sum_{i=1}^{n} v_{i*},$$
$$w_i(g_i(a)) = (v_i(g_i(a)) - v_{i*})/(v_i^* - v_{i*}),$$
$$k_i = \frac{v_i^* - v_{i*}}{v^* - v_*}.$$

Considérons alors le critère $g'$ défini par :

$$g'(a) = (g(a) - v_*)/(v^* - v_*).$$

Il est facile de montrer que $g'$ est un codage de g. Il s'agit donc d'un vrai-critère modélisant le même préordre.

Compte-tenu de ce qui précède, on peut, dans les problèmes réels, récrire (r.4.2.1) en posant :

$$g'(a) = \sum_{i=1}^{n} k_i \cdot w_i(g_i(a)) \qquad \text{(r.4.2.2)}$$

avec :



$$\sum_{i=1}^{n} k_i = 1,$$
$$w_i(e_{i*}) = 0,\ w_i(e_i^*) = 1,$$

$g'(a)$ étant compris entre 0 et 1.

Sous la forme (r.4.2.2), on voit que la PAMC additive revient :

– à trouver un codage de chaque critère et
– à appliquer un modèle de somme pondérée sur les codages des critères.

La somme pondérée en est donc un cas particulier où tous les codages sont des fonctions identité. En recourant à de tels codages, la PAMC additive permet de s'affranchir des hypothèses de proportionnalité et d'invariance par translation, sous-jacentes au modèle de la somme pondérée (cf. 3.1.5).

Notons que, comme dans le modèle de la somme pondérée, les coefficients $k_i$ utilisés dans (r.4.2.2) dépendent de l'échelle du critère $g_i$. La comparaison de tels coefficients est donc, ici encore, dépourvue de signification pour apprécier l'importance relative de ces critères.

L'intérêt de la PAMC additive (r.4.2.1) ou (r.4.2.2) en aide à la décision tient à sa grande simplicité. Nous en avons tous eu une expérience intuitive, par exemple dans le cas particulier consistant à calculer une moyenne de notes obtenues à des examens. Cette PAMC est certainement la plus utilisée en aide multicritère à la décision, soit en tant que telle ou sous forme de somme pondérée, soit par le biais de calculs de distances [1] ou en

[1] On peut par exemple montrer simplement que bâtir un s.r.p. en calculant une distance de Minskowski (de degré fini (cf. 7.2)) par rapport à un point de référence se ramène à un modèle du type (r.4.2.1) sous réserve que le point de référence soit situé de manière adéquate.

goal programming [1], ... Cette PAMC ne va cependant pas sans inconvénients, tant pratiques que théoriques, comme nous le verrons par la suite. Elle appelle dès à présent quelques remarques.

a) Un premier examen de (r.4.2.1) révèle que, dans un s.r.p. (P, I) construit en utilisant un modèle d'agrégation additive :

– (P, I) est un préordre complet.
– Toute sous-famille de critères est indépendante au sens des préférences dans F [2]. On dira que les critères sont **mutuellement indépendants au sens des préférences.**

Tout s.r.p. (P, I) vérifiant ces deux hypothèses ne peut cependant pas être obtenu avec (r.4.2.1) comme le montre l'exemple numérique [3] du tableau 4.2.1.

Considérons un ordre complet rangeant les actions de la façon suivante : $a_1$, $a_4$, $a_2$, $a_3$, $a_5$, $a_7$, $a_8$, $a_6$ puis $a_9$. Dans ce s.r.p., il est facile de vérifier que $g_1$ et $g_2$ sont indépendants au sens des préférences dans $F = \{g_1, g_2\}$ (ce sont donc bien des critères). Cependant, il est impossible qu'un tel s.r.p. ait pu être obtenu en utilisant une agrégation additive. En effet, si tel était le cas, on aurait :

$$a_3 \; P \; a_5 \Leftrightarrow v_1(3) + v_2(1) > v_1(2) + v_2(2),$$
$$a_5 \; P \; a_7 \Leftrightarrow v_1(2) + v_2(2) > v_1(1) + v_2(3),$$
$$a_8 \; P \; a_6 \Leftrightarrow v_1(1) + v_2(2) > v_1(2) + v_2(1),$$

[1] en goal programming classique et non en goal programming avec "poids préemptifs".

[2] Conformément à ce qui a été dit au 2.3.2 et pour rester cohérent avec une tradition bien établie, nous emploierons, dans ce chapitre traitant de l'agrégation en un critère unique de synthèse, l'expression "indépendance au sens des préférences" au lieu de "séparabilité".

[3] Il est possible de bâtir de tels exemples pour un nombre de critères supérieur à deux mais leur taille nous empêche d'en reproduire un ici. Notons que, dans cet exemple, l'ensemble des vecteurs de performances des actions considérées a bien une structure de produit cartésien.



$$a_4 \; P \; a_2 \Leftrightarrow v_1(2) + v_2(3) > v_1(3) + v_2(2).$$

**Tableau 4.2.1** : Exemple numérique

| | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | $a_6$ | $a_7$ | $a_8$ | $a_9$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g_1$ | 3 | 3 | 3 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 |
| $g_2$ | 3 | 2 | 1 | 3 | 2 | 1 | 3 | 2 | 1 |

L'addition des deux premières inéquations donne :

$$v_1(3) + v_2(1) > v_1(1) + v_2(3)$$

alors que celle des deux dernières conduit à :

$$v_1(1) + v_2(3) > v_1(3) + v_2(1),$$

ce qui est contradictoire.

b) La PAMC additive conduit à trouver un codage $v_i$ de chacun des critères $g_i$ et à bâtir un s.r.p. (P, I) tel que :

$$a \; P \; b \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} v_i(g_i(a)) > \sum_{i=1}^{n} v_i(g_i(b)) \text{ et}$$

$$a \; I \; b \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} v_i(g_i(a)) = \sum_{i=1}^{n} v_i(g_i(b)).$$

Cette formulation, si elle est classique, ne doit cependant pas faire oublier qu'il est possible de présenter cette PAMC tout autrement.

Considérons, à titre d'exemple, le codage

$$g'(a) = \exp(g(a))$$

du critère g(a) défini par (r.4.2.1). La fonction exponentielle étant strictement croissante, g' conduira au même s.r.p. (P, I) sur A que g. On peut alors reformuler le modèle en écrivant :

$$g'(a) = \exp\left(\sum_{i=1}^{n} v_i(g_i(a))\right) = \prod_{i=1}^{n} (\exp(v_i(g_i(a))) = \prod_{i=1}^{n} v_i'(g_i(a))$$

où $v_i'(g_i(a)) = \exp(v_i(g_i(a)))$ est un codage de $g_i(a)$.

La PAMC additive peut donc également se concevoir comme une agrégation multiplicative [1] [2] (on pourrait d'ailleurs également faire apparaître d'autres opérations plus complexes). Le terme "additive" prête donc à confusion. Compte-tenu de ces remarques, nous le retiendrons néanmoins dans le souci de rester cohérent avec une terminologie déjà bien établie.

### 4.2.1.2 Analyse axiomatique

Rappelons que, dans tout ce qui suit, on supposera que l'on raisonne sur un ensemble d'actions suffisamment riche pour que l'on puisse considérer que tout vecteur de performances de $E_1 \times E_2 \times ... \times E_n$ correspond à l'évaluation d'une action [3]. Rares sont les résultats disponibles lorsque l'on raisonne sur un sous-ensemble de $E_1 \times E_2 \times ... \times E_n$ n'ayant pas une structure de produit cartésien. Précisons que cette hypothèse, qui revient à ajouter à A un grand nombre d'actions fictives, souvent irréalistes, ne va pas sans poser problème lorsqu'il est exclu que certaines combinaisons de performances puissent correspondre à des actions réalistes (cf. 2.4.3).

La forme additive (r.4.2.1) a donné lieu à d'innombrables publications dont la teneur est bien résumée dans les ouvrages

[1] Pour une agrégation multiplicative respectant l'indépendance au sens des préférences de chaque sous-ensemble de critères, l'inverse est également vrai.

[2] Mentionnons cependant que, si l'on peut montrer l'équivalence au niveau formel entre une agrégation multiplicative et une agrégation additive, cette dernière reste, en pratique, bien plus simple à faire comprendre et donc à mettre en œuvre. Sur ce point, voir Schärlig (1985).

[3] Ce qui importe, sur le plan théorique, c'est que l'ensemble des vecteurs de performances des actions jouisse d'une structure de produit cartésien. Dans tout ce qui suit, on pourrait donc remplacer $E_1 \times E_2 \times ... \times E_n$ par $g_1(a) \times g_2(A) \times ... \times g_n(A)$. Cependant, ceci conduirait à lier l'analyse à un ensemble A particulier.



mentionnés plus haut. On a déjà remarqué que, dans un s.r.p. (P, I) obtenu avec (r.4.2.1) :

– (P, I) était un préordre complet ;
– toute sous-famille de critères était indépendante au sens des préférences dans F.

Comme l'a montré l'exemple du tableau 4.2.1, ces deux conditions ne sont cependant pas suffisantes pour s'assurer qu'un s.r.p. puisse être obtenu avec (r.4.2.1). Dans le cas général, aucune condition simple ajoutée à elles deux ne permet d'obtenir un corps d'axiomes nécessaires et suffisants [1].

Lorsque $E_1 \times E_2 \times ... \times E_n$ est fini, on peut obtenir un corps d'axiomes nécessaires et suffisants pour la représentation (r.4.2.1). En effet, pour chaque paire d'actions (a, b), le s.r.p. (P, I) définit une inéquation linéaire dont les inconnues sont les valeurs de $v_i(g_i(a))$ et $v_i(g_i(b))$. En considérant l'ensemble de toutes les paires d'actions, on obtient alors un ensemble fini d'inéquations linéaires. On peut alors faire appel à des résultats classiques d'algèbre linéaire pour caractériser les systèmes admettant une solution et donc les s.r.p. (P, I) représentables par un vrai-critère de synthèse vérifiant (r.4.2.1).

Nous donnons ci-après un résultat démontré par Fishburn (1970a) à la suite de Scott (1964). Dans ce résultat, $\underline{x}^k = (x_1^k, x_2^k, ..., x_n^k)$ et $\underline{y}^k = (y_1^k, y_2^k, ..., y_n^k)$ désignent les éléments de $E_1 \times E_2 \times ... \times E_n$. On écrira que $\underline{x}^k$ P $\underline{y}^k$ (resp. $\underline{x}^k$ I $\underline{y}^k$) s'il existe deux actions (a, b) telles que $\underline{g}(a) = \underline{x}^k$, $\underline{g}(b) = \underline{y}^k$ et a P b (resp. a I b).

**RÉSULAT 4.2.1** : Soit (P, I) un s.r.p. sur un ensemble fini $E_1 \times E_2 \times ... \times E_n$.
Il existe un vrai-critère de synthèse vérifiant (r.4.2.1) si et seulement si :

$\forall$ p = 2, 3, ...,
$\forall$ $\underline{x}^1, \underline{x}^2, ..., \underline{x}^p, \underline{y}^1, \underline{y}^2, ..., \underline{y}^p \in E_1 \times E_2 \times ... \times E_n$ tels que

[1] Il ne s'agit pas là d'un problème ouvert mais d'une impossibilité logique (cf. Scott et Suppes (1958)).

$(x_i^1, x_i^2, ..., x_i^p)$ est une permutation de $(y_i^1, y_i^2, ..., y_i^p)$ pour $i = 1, 2, ..., n$,

$[\underline{x}^j \text{ P } \underline{y}^j$ ou $\underline{x}^j \text{ I } \underline{y}^j$ pour $j = 1, 2, ..., p-1] \Leftrightarrow [\text{Non}(\underline{x}^p \text{ P } \underline{y}^p)]$.

Le résultat 4.2.1 utilise en fait une infinité dénombrable d'axiomes puisque la condition énoncée doit être vérifiée pour tout entier $p \geq 2$. La nécessité de cette condition est facilement démontrée. De même, on peut prouver aisément qu'elle impose à (P, I) d'être un préordre complet vérifiant l'indépendance mutuelle au sens des préférences. Son interprétation est cependant loin d'être simple et un tel résultat illustre les difficultés que l'on peut rencontrer à utiliser des résultats d'ordre axiomatique en aide à la décision.

Ce type de résultat a été étendu (au prix d'une complexité plus grande) au cas d'un ensemble dénombrable et infini non dénombrable [1].

S'il existe un vrai critère g vérifiant (r.4.2.1), il est clair que tout critère g′ défini par :

$$g'(a) = \sum_{i=1}^{n} v_i'(g_i(a)) \text{ et} \qquad \text{(r.4.2.3)}$$

$$v_i'(g_i(a)) = \alpha \cdot v_i(g_i(a)) + \beta_i \text{ avec } \alpha, \beta_i \in \mathbf{R} \text{ et } \alpha > 0$$

jouit également des mêmes propriétés.

On peut cependant montrer facilement que l'ensemble des vrai-critères vérifiant la forme additive (r.4.2.1) ne se déduit pas simplement d'un de ses éléments en appliquant la transformation (r.4.2.3).

Considérons l'exemple du tableau 4.2.2.

[1] Voir Tversky (1967) et Jaffray (1974).



**Tableau 4.2.2** : Exemple numérique

| | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $g_1$ | 1 | 1 | 3 | 3 |
| $g_2$ | 1 | 2 | 1 | 2 |

Le s.r.p. : $a_4$ P $a_3$, $a_4$ P $a_2$, $a_4$ P $a_1$, $a_3$ P $a_2$, $a_3$ P $a_1$, $a_2$ P $a_1$ peut se représenter à l'aide du vrai-critère $g(a) = g_1(a) + g_2(a)$. Mais on peut tout autant utiliser, pour le représenter, le vrai-critère $g(a) = \exp(g_1(a)) + \log(g_2(a))$ [1].

On conçoit donc qu'il soit relativement difficile d'interpréter la forme des fonctions de codage $v_i$ dans un tel cadre.

Dès lors que l'on s'autorise à raisonner "dans le continu" sur un ensemble d'actions infini et pourvu que le préordre complet (P, I) se comporte de manière "compatible" avec ce continu [2], la solution axiomatique au problème (r.4.2.1) devient beaucoup plus simple. Dans le cas $n \geq 3$ (le cas $n = 2$ étant plus complexe), cette

[1] On peut montrer (voir Krantz et al. (1971, ch. 9)) que, sur un ensemble fini, s'il existe un vrai-critère g vérifiant (r.4.2.1), alors il en existe une infinité d'autres ne se déduisant pas les uns des autres par application de la transformation (r.4.2.3). Toutes les transformations monotones strictement croissantes ne sont cependant pas admissibles (on pourra considérer pour s'en convaincre le critère $g(a) = g_1(a) + \exp(g_2(a))$ dans l'exemple du texte). On est donc en présence d'une structure intermédiaire entre l'"ordinal" et le "cardinal" qui a reçu le nom de "structure métrique ordonnée". Pour un algorithme permettant de caractériser l'ensemble des vrai-critères vérifiant (r.4.2.1), on pourra se reporter à McClelland et Coombs (1975). On pourra également se reporter à l'étude de Berhaut (1981).

[2] Ceci est réalisé en recourant à des hypothèses de solvabilité (cf. Krantz et al. (1971, ch. 6)) imposant à la structure manipulée d'être suffisamment riche. En plus d'hypothèses de non trivialité, il faut également exclure (à l'aide de conditions archimédiennes) l'occurrence de cas où le préordre (I, P) ne serait pas représentable par un vrai-critère, situation pouvant se produire sur des ensembles infinis. Notons que ces conditions peuvent se reformuler très économiquement mais au prix d'une interprétation particulièrement malaisée en termes topologiques (cf. Debreu (1960)).

immersion dans le continu comporte deux conséquences essentielles :

– le fait que (P, I) soit un préordre complet joint à l'indépendance mutuelle au sens des préférences sont des conditions non seulement nécessaires mais aussi suffisantes pour (r.4.2.1) ;

– l'ensemble des solutions à (r.4.2.1) est caractérisé par la transformation (r.4.2.3).

Dans ce cadre, les codages $v_i$ deviennent uniques, à l'exception de leur origine (coefficients $\beta_i$) et de leur unité, celle-ci devant être raisonnée pour tous les codages à la fois. Le gain retiré de cette immersion dans le continu est donc considérable, tant du point de vue théorique que pratique, ces propriétés d'unicité donnant un "sens" à la forme des codages utilisés, ce qui rend possible la mise en œuvre de certaines procédures d'"estimation" pratiques. Ce gain est néanmoins réalisé au prix de l'obtention d'un système d'axiomes dont l'interprétation en aide à la décision est assez délicate (contrairement à d'autres domaines où l'introduction du "continu" va de soi) en conférant aux axiomes nécessaires une force accrue due aux structures particulières auxquelles ils s'appliquent.

Notons enfin que l'adoption d'une forme additive comporte une conséquence importante, très souvent utile en pratique. Un simple examen de (r.4.2.1) montre en effet que, dans une forme additive, le taux de substitution [1] entre deux critères i et j, $r_{ij}(g, \delta_j)$ ne dépend pas des performances sur les critères autres que i et j. Sous des hypothèses techniques additionnelles [2], on peut montrer que, réciproquement, toute PAMC produisant un s.r.p. tel que, pour tout i et j, les taux de substitution $r_{ij}(g, \delta_j)$ ne dépendent pas des performances sur les critères autres que i et j est équivalente à une forme additive de type (r.4.2.1). Ceci est, par exemple, le cas dans une PAMC de type multiplicatif vérifiant l'indépendance mutuelle au sens des préférences. Comme nous l'avons déjà mentionné au 4.2.1.1, une telle PAMC est équivalente à une PAMC additive.

[1] Cf. 3.1.5. Puisque l'on raisonne ici avec des vrai-critères, rien n'empêcherait de ne considérer que la limite du rapport $r_{ij}(g, \delta_j)/\delta_j$ lorsque $\delta_j$ tend vers 0, c'est-à-dire des taux marginaux de substitution.

[2] Le lecteur intéressé trouvera la démonstration formelle de ce résultat dans Ting (1971).



### 4.2.1.3 Mise en œuvre [1]

Chercher à construire un vrai-critère en utilisant une PAMC additive suppose que l'on a préalablement soit admis comme base de travail (démarche constructive), soit accepté au vu de tests (démarche descriptive) l'hypothèse d'indépendance mutuelle au sens des préférences. Nous reviendrons sur ce problème au 4.2.1.4 en admettant ici que tel est le cas. On a vu, au 4.2.1.1, pour quelles raisons il est intéressant d'introduire des fonctions de codage $v_i$. En pratique, il faut leur donner une forme explicite. Les techniques utilisées pour cela doivent être celles que les fonctions $v_i$ ainsi bâties jouent précisément le rôle qu'on veut leur faire jouer. Ce problème n'est pas simple.

Fishburn (1967) mentionne 24 méthodes différentes pour bâtir les codages $v_i$. Ce nombre se réduit à 18 si l'on excepte les méthodes utilisant une technique probabiliste qui sont plus adaptées au cas de la théorie de l'utilité espérée (cf. 4.5). Toutes ces méthodes reviennent à donner une importance aux écarts $g_i(a) - g_i(b)$ sous la forme $v_i(g_i(a)) - v_i(g_i(b))$ en choisissant une unité de façon adéquate. Ceci peut être fait de multiples façons et nous renvoyons à Fishburn (1967) pour un aperçu des différentes méthodes envisageables. Nous nous contenterons ici d'en décrire une, figurant dans l'ouvrage de Keeney et Raiffa (1976, ch. 3), qui présente la particularité d'être uniquement fondée sur des jugements en termes de préférence et d'indifférence (à l'exclusion de jugements en termes d'intensité de préférence par exemple) et qui, donc, ne fait appel qu'à des notions utilisées dans l'analyse axiomatique du modèle (c'est là précisément une des vertus – possibles – d'une analyse axiomatique que de permettre la conception de méthodes de construction appropriées). Elle se justifie essentiellement dans une démarche descriptive.

[1] Dans cette section, nous ne ferons qu'évoquer les principes généraux de mise en œuvre. On laissera en particulier de côté tout ce qui a trait à la phase essentielle de l'analyse de robustesse qui relève de l'élaboration de la recommandation davantage que de la mise en œuvre d'une PAMC. On y reviendra au 4.6.

*a) Fonctions $v_i$*

On a vu que, dans les problèmes réels, le vrai-critère issu d'une agrégation additive pouvait toujours s'écrire sous la forme (r.4.2.2), c'est-à-dire [1] :

$$\left.\begin{aligned} & g(a) = \sum_{i=1}^{n} k_i \cdot v_i(g_i(a)), \\ & \sum_{i=1}^{n} k_i = 1, \\ & v_i(e_i^*) = 1, \\ & v_i(e_{i*}) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(r.4.2.2 bis)}$$

Considérons une action fictive a telle que :

$\underline{g}(a) = (z_1, z_2, \ldots, z_{i-1}, x_i, z_{i+1}, \ldots, z_n)$.

Afin d'alléger la notation, on notera $(x_i\,;\,z^{-i})$ un tel vecteur de performances dans cette section.

Considérons alors deux actions a et b telles que :

$\underline{g}(a) = (x_i, y^{-i})$ et
$\underline{g}(b) = (x_i, z^{-i})$.

Dans le modèle additif, la relation liant a à b ne dépend pas de la valeur $x_i$. On peut toujours trouver des valeurs $y^{-i}$ et $z^{-i}$ telles que l'on ait a P b.

Considérons à présent quatre actions $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$ telles que :

$\underline{g}(a_1) = (e_{i*}\,;\,y^{-i})$,
$\underline{g}(a_2) = (x_i\,;\,z^{-i})$,
$\underline{g}(a_3) = (x_i\,;\,y^{-i})$,
$\underline{g}(a_4) = (e_i^*\,;\,z^{-i})$.

Si l'on parvient à trouver une performance $x_i$ telle que :

$a_1$ I $a_2$ et $a_3$ I $a_4$,

le modèle (r.4.2.2 bis) implique alors $v_i(x_i) = 1/2$.

[1] Rappelons que $e_{i*}$ et $e_i^*$ désignent respectivement la pire et la meilleure valeur sur l'échelle $E_i$ du critère $g_i$.



Remarquons ici que, pour qu'il soit possible de trouver une telle valeur $x_i$, il faut avoir choisi judicieusement les vecteurs de performances $y^{-i}$ et $z^{-i}$ afin que la différence d'évaluation sur le critère i puisse compenser la différence d'évaluation sur les autres critères. Notons que même si, d'un point de vue théorique, on peut vouloir utiliser une forme d'agrégation additive pour représenter des préférences lexicographiques où aucune compensation n'est tolérée, la mise en œuvre des méthodes de construction pratique fait appel à une telle notion de compensation. Précisons de plus qu'une telle méthode est inapplicable lorsque l'échelle des $g_i$ est discrète [1].

Dans la pratique, la valeur de $x_i$ recherchée sera le plus souvent obtenue à partir d'une série de questions visant à la cerner progressivement. Ce sera en fait toujours le cas lorsque nous nous intéresserons à la recherche d'une valeur assurant une indifférence entre deux actions.

La valeur $x_i$ telle que $v_i(x_i) = 1/2$ ayant été obtenue, considérons quatre actions telles que :

$\underline{g}(b_1) = (e_{i*}, y^{-i})$,
$\underline{g}(b_2) = (x_i', z^{-i})$,
$\underline{g}(b_3) = (x_i', y^{-i})$,
$\underline{g}(b_4) = (x_i, z^{-i})$.

Par le même raisonnement que précédemment, si l'on parvient à trouver une performance $x_i'$ telle que :

$b_1$ I $b_2$ et $b_3$ I $b_4$,

on pourra poser, compte-tenu de (r.4.2.2 bis), $v_i(x_i') = 1/4$.

De même, en considérant quatre actions telles que :

$\underline{g}(c_1) = (x_i, y^{-i})$,
$\underline{g}(c_2) = (x_i'', z^{-i})$,
$\underline{g}(c_3) = (x_i'', y^{-i})$,
$\underline{g}(c_4) = (e_i^*, z^{-i})$

et $c_1$ I $c_2$, $c_3$ I $c_4$,

on aura $v_i(x_i'') = 3/4$.

Supposons obtenues des valeurs $x_i$, $x_i'$ et $x_i''$ telles que $v_i(x_i) = 1/2$, $v_i(x_i') = 1/4$ et $v_i(x_i'') = 3/4$. Considérons à présent quatre actions telles que :

[1] Dans ce cas, voir Fishburn (1967).

$\underline{g}(d_1) = (x_i', y^{-i})$,
$\underline{g}(d_2) = (w_i, z^{-i})$,
$\underline{g}(d_3) = (w_i, y^{-i})$,
$\underline{g}(d_4) = (x_i'', z^{-i})$.

Si l'on parvient à trouver un niveau de performance $w_i$ tel que :

$d_1$ I $d_2$ et $d_3$ I $d_4$,

on pourra poser $v_i(w_i) = 1/2$.

La cohérence avec le modèle requiert ici que $w_i$ soit égal à (ou très proche de) $x_i$.

On peut ainsi obtenir autant de points que l'on désire pour donner une forme au codage $v_i$. Dans la pratique, il est bien entendu souhaitable de s'assurer d'une certaine cohérence des réponses avec le modèle et de discuter des éventuelles incohérences.

*b) Coefficients $k_i$*

Une fois obtenus les codages $v_i$, on peut donner une valeur aux coefficients $k_i$ dans (r.4.2.2 bis) en procédant de la façon suivante. Premièrement, il est prudent, dans la pratique, de chercher à ordonner ces coefficients. Pour ce faire, on peut demander de classer, par ordre de préférence, des actions ayant la plus mauvaise évaluation possible sur tous les critères sauf sur un seul. Par exemple, si $(e_{1*}, e_{2*}, ..., e_{i-1*}, e_i^*, e_{i+1*}, ..., e_{n*})$ est préféré à $(e_{1*}, e_{2*}, ..., e_{j-1*}, e_j^*, e_{j+1*}, ..., e_{n*})$, on pourra poser $k_i > k_j$. On peut de la même manière faire comparer des actions où plusieurs critères sont à leurs meilleures valeurs et ainsi obtenir des inégalités faisant intervenir plus de deux coefficients $k_i$. La répétition de ce processus amène à définir un polyèdre de $k_i$ admissibles que l'on peut vouloir chercher à explorer de façon systématique, sachant que $\sum_{i=1}^{n} k_i = 1$ [1].

Si l'on tient à donner une valeur précise aux $k_i$, on peut chercher à obtenir des jugements d'indifférence entre des actions différant sur plus d'un critère. Chaque jugement donne lieu à une équation faisant intervenir les n inconnues $k_1, k_2, ..., k_n$ puisque les fonctions $v_i$ sont supposées connues à ce stade. Il suffit d'obtenir $n - 1$ jugements de ce type pour pouvoir résoudre le système d'équations compte-tenu du fait que la somme de ces coefficients est égale à 1. Comme le notent Keeney et Raiffa (1976), il est ici encore prudent de procéder

[1] On peut vouloir chercher à tirer directement parti de ces rangements (voir Kirkwood et Sarin (1985), Bana e Costa (1989)).



à des questions de contrôle et d'obtenir de l'information redondante pour s'assurer d'un minimum de cohérence des réponses obtenues avec le modèle.

A l'issue de cette procédure, s'il a été possible d'obtenir des réponses cohérentes avec le modèle aux questions posées, on peut bâtir le vrai-critère g(a) en utilisant (r.4.2.2 bis). Il est important de noter que les actions introduites pour faire exprimer des préférences ou des indifférences font intervenir des actions fictives qui pourront apparaître, dans bien des cas, comme très irréalistes (en particulier lorsque ces actions ont la meilleure ou la pire des évaluations possibles sur un certain nombre de critères). De plus, pour donner une valeur aux $k_i$, on recourt à la comparaison d'actions dont les performances diffèrent sur plus d'un critère. La complexité de ces questions est donc assez importante. Ceci est dû au fait que la "cardinalité" introduite dans ce problème par le biais de l'additivité fait dépendre le codage $v_i$ de tous les autres codages. C'est là certainement une des raisons pour lesquelles cette PAMC est rarement mise en œuvre telle quelle en pratique en utilisant ce type de méthodes de questionnement. Son importance est cependant grande car, comme on l'a dit, elle est souvent utilisée, d'une façon plus ou moins explicite, au sein d'un grand nombre de méthodes.

Mentionnons pour conclure ce paragraphe une procédure d'obtention des codages $v_i$ de nature fort différente de celle dont il vient d'être question et qui est souvent utilisée tant en aide à la décision [1] qu'en mercatique [2] et sur laquelle nous reviendrons longuement au 7.4. Bien souvent, il est en effet possible d'obtenir, de la part d'un acteur Z, un certain nombre de jugements de préférences globaux sur des actions réelles (qu'il connaît bien) ou fictives (faciles à comparer). Au sein du modèle (r.4.2.1) ou (r.4.2.2), on peut associer, à chacun de ces jugements, une inéquation linéaire (ou équation dans le cas d'un jugement d'indifférence (cf. 4.2.1.2)). On peut alors chercher, en utilisant des techniques statistiques ou de programmation linéaire, à explorer le polyèdre ainsi défini (en ajoutant à chaque contrainte un, éventuellement deux, terme(s) d'erreur pour éviter de raisonner sur un polyèdre qui pourrait être vide) de manière à déterminer un ensemble de fonctions d'utilité additives le plus compatible possible avec l'information de départ. Faisons cependant observer que, même lorsque l'on cherche à déterminer plusieurs fonctions en explorant un polyèdre [3], on reste malgré tout tributaire du critère d'optimisation utilisé

[1] Voir Jacquet-Lagrèze et Siskos (1982).

[2] Voir Faivre et Pioche (1976).

[3] Ce qui reste l'exception dans ce genre de méthode où l'on a souvent tendance à exhiber une seule fonction dite "optimale".

dans les calculs, critère qui comporte souvent une bonne part d'arbitraire [1].

Signalons enfin qu'il est possible d'interpréter la **méthode d'analyse hiérarchique** (AHP) de Saaty (1981) comme une façon possible de mettre en œuvre une agrégation additive. Elle fait appel à des concepts qui lui sont très spécifiques et qui ont donné lieu à des débats (cf. par exemple Dyer (1990), Belton et Gear (1983)). Nous ne la développerons pas davantage dans ce livre. Mentionnons néanmoins qu'elle a donné lieu à de nombreuses applications pratiques (cf. la bibliographie de cas d'application en fin de volume).

#### 4.2.1.4 Retour sur l'indépendance au sens des préférences

L'hypothèse de l'indépendance de toute sous-famille de critères dans F, c'est-à-dire l'"indépendance mutuelle au sens des préférences" (cf. 4.2.1.1), est à la base de la procédure d'agrégation additive. Il y est fait appel à plusieurs reprises dans la procédure de construction décrite brièvement au paragraphe précédent. Dans une démarche descriptive, il convient donc de tester cette hypothèse et, dans une démarche constructive, de l'admettre comme base de travail. Comme nous l'avons déjà souligné au 2.3.2 et au 2.4.2, le travail de l'homme d'étude se trouve singulièrement compliqué dans les cas imposant de ne pas accepter cette hypothèse. Dans ce paragraphe, nous passerons brièvement en revue un certain nombre de résultats permettant, dans l'approche du critère unique de synthèse, de mieux cerner le contenu de cette hypothèse d'indépendance et d'indiquer quelques voies possibles dans les cas où l'on estime ne pas devoir l'accepter.

Ici encore, on supposera que l'on raisonne sur un ensemble d'actions suffisamment riche pour que l'on puisse considérer que l'ensemble des vecteurs de performances de ces actions correspond à $E_1 \times E_2 \times ... \times E_n$.

Un premier résultat permet, dans le cas où l'on a bâti un vrai-critère de synthèse, de lier plusieurs hypothèses d'indépendance.

**RÉSULTAT 4.2.2** : Considérons un vrai-critère g représentant un s.r.p. sur $E_1 \times E_2 \times ... \times E_n$. Sous certaines hypothèses de continuité, de dérivabilité et de non trivialité [2], si I et J sont deux sous-familles de critères toutes deux indépendantes au sens des préférences dans F et telles que $I \cap J \neq \emptyset$, Non($I \subset J$), Non($J \subset I$) et $I \cup J \neq F$, alors les familles $I \cup J$, $I \cap J$, $I \setminus J$, $J \setminus I$ et $(I \setminus J) \cup (J \setminus I)$ sont indépendantes au sens des préférences dans F.

[1] Voir Macquin (1980).

[2] Hypothèses qui sont généralement faites pour analyser axiomatiquement le modèle de l'utilité additive. On se reportera, pour la démonstration de ce résultat, à Gorman (1968) ou à Keeney et Raiffa (1976, p. 112 et ss.) pour une démonstration intuitive mais non rigoureuse.



Ce résultat montre que, s'il est légitime de raisonner toutes choses égales par ailleurs relativement à n'importe quelle paire de critères, alors il devient légitime de le faire vis-à-vis de n'importe quelle sous-famille de plus de deux critères dès lors que l'on se situe dans le cadre d'un s.r.p. (P, I) ayant une structure de préordre complet (et pouvant se représenter numériquement). Tester l'hypothèse d'indépendance mutuelle au sens des préférences ou l'accepter comme base de travail peut donc, dans ce cadre, se raisonner en se limitant à certaines sous-familles de deux critères judicieusement choisis [1].

On a vu, au 2.3.2 et au 2.4.2, que l'hypothèse d'indépendance au sens des préférences d'une sous-famille de critères était parfois fort restrictive dans certaines situations concrètes. Le résultat suivant, dû à Ting (1971), permet de simplifier la tâche de l'analyste dans cette situation.

**RÉSULTAT 4.2.3** : Considérons un vrai-critère g représentant un s.r.p. (P, I) sur $E_1 \times E_2 \times ... \times E_n$. Sous certaines hypothèses de continuité, de dérivabilité et de non trivialité, si une sous-famille J non vide de critères est indépendante au sens des préférences dans F, alors le vrai-critère g peut s'écrire [2] :

$g(a) = V(v(g_j(a) : j \in J) ; g_k(a) : k \notin J)$,

$v(g_j(a) : j \in J)$ étant un vrai-critère [3] ayant pour support la réunion des supports des critères de J.

Sous les hypothèses du résultat 4.2.3 et si toute sous-famille de J est indépendante au sens des préférences dans J, alors on a :

[1] Sur la base du résultat 4.2.2, on peut montrer, par exemple, qu'il suffit que les paires de critères {1, 2}, {2, 3}, ..., {n–1, n} puissent être considérées comme indépendantes au sens des préférences dans F pour que l'hypothèse d'indépendance mutuelle au sens des préférences soit acceptable. Ce résultat illustre ce que l'on a coutume d'appeler un effet de "chaînage" de l'indépendance au sens des préférences.

[2] Les hypothèses de continuité et de dérivabilité que nous passons sous silence permettent de s'assurer que V est strictement croissante en v de telle sorte que l'implication inverse est également vraie. Sous ces mêmes hypothèses, l'indépendance au sens des préférences de J dans F est équivalente à l'hypothèse selon laquelle les taux (marginaux) de substitution entre les critères de J ne dépendent pas des évaluations sur les critères n'entrant pas dans J (cf. supra).

[3] Les critères de J sont donc alors **contractables** (cf. 2.4.2).

$$v(g_j(a) : j \in J) = \sum_{j \in J} v_j(g_j(a)).$$

De même, si toute sous-famille de F\J est indépendante au sens des préférences dans F\J, alors on a :

$$g(a) = \chi_J(v(g_j(a) : j \in J) + \sum_{k \notin J} v_k(g_k(a))$$

où $\chi_J$ est une fonction monotone croissante.

Dans le cas où l'hypothèse d'indépendance mutuelle au sens des préférences dans F n'est pas acceptable, on peut donc chercher à regrouper, en les contractant, certains critères et à appliquer ensuite une agrégation additive classique. La façon de définir $v(g_j(a) : j \in J)$, critère agrégeant les critères de J, peut cependant se révéler délicate. On peut songer pour ce faire à utiliser les procédures d'agrégation que nous verrons au 4.2.2 ou [1] encore à cerner les surfaces d'indifférence entre les critères de J.

On trouvera dans Ting (1971) certaines techniques permettant de rechercher et d'isoler la (ou les) sous-famille(s) de critères "responsable(s)" de la non-indépendance mutuelle au sens des préférences.

#### 4.2.2 Autres formes d'agrégation conduisant à un vrai-critère de synthèse

Comme nous l'avons vu au 4.2.1.1, l'agrégation additive recouvre un grand nombre de situations du fait que le vrai-critère que l'on cherche à bâtir n'est défini qu'à une transformation monotone strictement croissante près. Il est cependant des cas où d'autres formes d'agrégation peuvent sembler plus adéquates, par exemple parce que l'hypothèse d'indépendance mutuelle au sens des préférences ne paraît pas légitime et parce qu'il paraît difficile de recourir à l'idée de contraction.

On a déjà vu, au début du 4.2, que l'on pouvait, dans certains cas, définir la fonction d'agrégation V de manière explicite comme cela est fait dans la méthode des déclassements comparés. On peut vouloir également recourir à des formes analytiques de V plus complexes que (r.4.2.1). Ces formes analytiques, si elles ont un grand intérêt sur le plan théorique, se prêtent cependant assez

[1] Dans le même ordre d'idées, il se peut que l'indépendance mutuelle puisse être acceptable pour un sous-ensemble de $E_1 \times E_2 \times ... \times E_n$ sur lequel on peut alors bâtir un critère g en utilisant la forme additive (r.4.2.1).



difficilement à une élaboration pratique en raison du grand nombre de degrés de liberté qu'elles présentent. Nous nous contenterons donc ici d'en mentionner quelques unes, leur faible intérêt pratique en aide à la décision ne méritant pas que l'on s'y attarde longuement.

Un premier résultat, très général mais sans grandes applications pratiques, concerne la possibilité d'obtenir un vrai-critère de synthèse sous la forme :

$$g(a) = V(g_1(a), g_2(a), ..., g_n(a)).$$

Il est clair que l'élaboration d'un tel critère suppose que le s.r.p. que l'on cherche à construire ou à représenter soit un préordre complet (pouvant se représenter numériquement). De plus, l'existence de chacun des critères $g_i$ suppose la présence d'un axe de signification et d'une fonction garantissant la propriété d'isolabilité [1]. On peut montrer (cf. Krantz et al. (1971, p. 318)) que ces deux conditions sont, en fait, suffisantes pour obtenir une fonction V strictement croissante dans chacun de ses arguments [2].

Il existe dans la littérature des formes d'agrégation conduisant à un vrai-critère et faisant l'économie de l'hypothèse d'isolabilité de chaque axe de signification [3]. Plus importantes sont cependant des procédures simples d'agrégation de plusieurs critères – recouvrant chacun un axe de signification isolable – en un vrai-critère de synthèse ne se ramenant pas à la forme additive. On peut par exemple envisager une PAMC du type (cf. Krantz et al. (1971, p. 339)) :

$$g(a) = (g_1(a) + g_2(a))^{g_3(a)} \text{ avec } g_1(a), g_2(a) \text{ et } g_3(a) > 0.$$

[1] g(a) étant un vrai-critère, l'isolabilité de chaque critère est donc équivalente au fait que chacun d'entre eux est indépendant au sens des préférences dans F.

[2] Il existe des modèles d'agrégation conduisant à un vrai-critère et qui ne sont pas "décomposables", c'est-à-dire que le vrai-critère ainsi construit ne peut s'exprimer sous la forme $g(a) = V(g_1(a), g_2(a), ..., g_n(a))$. Par exemple, on peut vouloir bâtir $g(a) = v_1(g_1(a)) + v_2(g_2(a)) + v_1'(g_1(a)) + v_2'(g_2(a))$, les fonctions $v_1$, $v_1'$, $v_2$, $v_2'$ n'étant pas nécessairement monotones croissantes. Ce type de structure a un réel intérêt dans d'autres domaines que l'aide multicritère à la décision. Cependant, nous les passerons ici sous silence car il nous semble illusoire de vouloir fonder une étude d'aide à la décision sans recourir, au moins, à des axes de signification isolables.

[3] Cf. Krantz et al. (1971, ch. 7) ; on a alors recours à des notions d'indépendance, plus sophistiquées que l'isolabilité, autorisant par exemple un renversement total de l'ordre de préférence sur chaque axe de signification.

Utilisons ce modèle sur l'exemple du tableau 4.2.3.

**Tableau 4.2.3** : Exemple numérique

| | $g_1$ | $g_2$ | $g_3$ |
|---|---|---|---|
| $a_1$ | 3 | 1/2 | 10 |
| $a_2$ | 1 | 1/2 | 20 |
| $a_3$ | 3 | 10 | 10 |
| $a_4$ | 1 | 10 | 20 |

On a : $g(a_1) = 35 > g(a_2) = 20$ et $g(a_3) = 130 < g(a_4) = 220$, ce qui viole l'indépendance au sens des préférences de $\{g_1, g_3\}$ dans F. Ce modèle ne peut donc se ramener à une forme additive.

On pourrait bâtir un même exemple en utilisant une PAMC :

$g(a) = g_1(a) \cdot g_2(a) + g_3(a)$.

On trouvera dans Krantz et al. (1971, ch. 7 et 9) l'énoncé de conditions suffisantes (dans le cas "continu") pour obtenir ce type de fonctions d'agrégation ainsi qu'un certain nombre de tests permettant de choisir telle ou telle forme fonctionnelle. Ce type de modèles d'agrégation, complétant la forme additive par des termes produits judicieusement choisis, constitue une des façons les plus simples pour modéliser en pratique des phénomènes de dépendance entre critères.

## 4.3 AGRÉGATION CONDUISANT À UN QUASI, PRÉ OU PSEUDO-CRITÈRE

Les PAMC qui font l'objet de cette section cherchent à bâtir un critère unique de synthèse dont le pouvoir discriminant soit plus faible que celui d'un vrai-critère. Elles présentent un grand intérêt conceptuel, en particulier lorsque l'on travaille sur une famille cohérente de critères ne contenant pas que des vrai-critères. Ce type de PAMC a déjà été évoqué au 3.1.5 et au 3.2.2 d) à propos de la somme pondérée.

En dépit de leur réel intérêt, ces PAMC n'ont fait l'objet que de peu de travaux, ce désintérêt s'expliquant peut-être par de réelles difficultés de mise en œuvre comme on le verra ci-après.



### 4.3.1 Quasi-critère de synthèse

Ce type de PAMC vise à construire un critère de synthèse g muni d'un seuil q tel que, $\forall$ a, b $\in$ A, $g(a) = V(g_1(a), g_2(a), \ldots, g_n(a))$ :

$$g(a) \geq g(b) \Rightarrow \begin{cases} a\ P\ b \text{ si } g(a) > g(b) + q(g(b)) \\ a\ I\ b \text{ sinon} \end{cases}$$

avec

$$\frac{q(g(a)) - q(g(b))}{g(a) - g(b)} \geq -1.$$

Rappelons que le seuil q(g(a)) peut toujours [1] être rendu constant, moyennant un codage approprié de g.

Le lecteur intéressé trouvera, dans Luce (1973), Krantz (1967) et Suppes et al. (1989), des systèmes d'axiomes suffisants pour obtenir un quasi-critère g à seuil constant s'obtenant de façon additive dans le cas "continu". Dans le cas fini, les conditions nécessaires et suffisantes pour obtenir un quasi-critère s'obtenant de façon additive sont données par Fishburn (1970b). Ces conditions sont cependant aussi peu attrayantes que celles du résultat 4.2.1.

Il est important de noter que l'abandon de la transitivité de l'indifférence rend ici inapplicable le type de méthodes présentées au 4.2.1.3 pour mettre en œuvre le modèle d'agrégation additif. C'est probablement pourquoi ce modèle d'agrégation, bien qu'attrayant sur le plan conceptuel puisque permettant de concilier la simplicité de l'agrégation additive avec l'obtention d'un critère de synthèse au pouvoir discriminant nuancé, n'a fait l'objet que de peu d'études. Il y a là un champ de recherche important. Parmi les questions dignes d'intérêt, mentionnons :

– la façon d'obtenir les codages $v_i$ sachant que l'indifférence n'est plus transitive ;

[1] dans les problèmes réels (cf. 1.4). Cette affirmation mériterait d'être nuancée dans le cas d'ensembles infinis. La représentation numérique des quasi-ordres, dans ce cas, pose d'ailleurs des problèmes assez délicats (cf. Roberts (1979, ch. 6) ou Suppes et al. (1989)).

- les liens unissant les seuils $q_i$ au seuil q ;
- les techniques à appliquer lorsque certains critères sont des vrai-critères.

### 4.3.2 Autres cas

A notre connaissance, aucun résultat théorique n'est disponible concernant des pré ou pseudo-critères de synthèse obtenus à l'aide d'une fonction d'agrégation additive. Rien ne s'opposerait cependant à la formulation de conditions similaires à celles mentionnées pour les quasi-critères. Les difficultés rencontrées ici sont du même type que celles mentionnées au paragraphe précédent. Signalons pour terminer que l'on trouvera, dans Fishburn (1970b) et dans Adams (1965), les conditions nécessaires et suffisantes, dans le cas fini, permettant d'obtenir, de façon additive, un critère de synthèse dont le pouvoir discriminant n'est pas précisé.

## 4.4 CAS OÙ L'ON CHERCHE À BÂTIR UNE GRADUATION OU UNE MESURE

### 4.4.1 Généralités

Il sera question, dans cette section, de PAMC cherchant à bâtir un critère g tel que :

$$\begin{aligned} &g(a) = V(g_1(a), g_2(a), ..., g_n(a) \\ &g(a) \geq g(b) \Rightarrow a\ S\ b \\ &g(a) - g(b) \geq g(c) - g(d) \Rightarrow (a \ominus b)\ S^*\ (c \ominus d) \end{aligned} \qquad \text{(r.4.1.1)}$$

où $S^*$ désigne une relation de surclassement sur A × A au contenu sémantique "est un écart de préférence au moins aussi important que" (rappelons [1] que (a ⊖ b) désigne un écart entre deux actions qui peut s'interpréter comme une mutation b → a).

L'intérêt de faire intervenir dans F des critères étant des graduations ou des mesures a déjà été discuté au 1.6.4 [2]. Indiquons ici seulement que le fait de bâtir un critère de synthèse qui soit une graduation ou une mesure peut présenter un réel intérêt en aide à la décision. Si l'on a pu bâtir un critère satisfaisant à (r.4.4.1), on pourra fonder sa prescription non seulement sur le

[1] Cf. 1.4 et 1.6.

[2] Pour une étude plus approfondie, nous renvoyons à MMCAD, 9.4.



classement de synthèse défini par S mais également en ayant recours à l'idée d'écart de préférence. Dans le cadre d'une problématique α, on pourra ainsi apprécier la plus ou moins grande proximité des "brillants seconds" par rapport à l'action "optimale". De même, dans le cadre d'une problématique β, le tri à effectuer pourra prendre appui sur les valeurs de g, ce qui permet de faire ressortir clairement les actions dont l'affectation pose problème. Dans une problématique γ, une information en termes d'écart de préférence permet de cerner rapidement les actions manifestement inadéquates et de concentrer son attention sur un sous-ensemble restreint.

Compte-tenu des difficultés évoquées au 4.3, nous nous limiterons, dans cette section, à des PAMC faisant de S et de $S^*$ des préordres complets. C'est dire que les critères de synthèse g dont il sera question dans cette section seront tels que :

$$\begin{aligned} &g(a) = V(g_1(a), ..., g_n(a)) \\ &a\ P\ b \Leftrightarrow g(a) > g(b) \\ &a\ I\ b \Leftrightarrow g(a) = g(b) \\ &(a \ominus b)\ P^*\ (c \ominus d) \Leftrightarrow g(a) - g(b) > g(c) - g(d) \\ &(a \ominus b)\ I^*\ (c \ominus d) \Leftrightarrow g(a) - g(b) = g(c) - g(d), \end{aligned} \qquad \text{(r.4.4.2)}$$

ce qui correspond au cas où g est une "mesure" [1].

De plus, conformément à ce qui a été fait au 4.2, on n'envisagera ici que des PAMC opérant sur la base d'une famille cohérente de vrai-critères.

Les conditions sur ($P^*$, $I^*$) permettant la construction d'un tel critère g sont bien connues. Dans le cas d'un ensemble fini, on dispose d'une condition nécessaire et suffisante (cf. Fishburn (1970a, ch. 6)). Tout comme dans le cas de la forme d'agrégation additive, cette condition n'entraîne pas que g soit défini à une transformation affine près. Le "passage au continu" permet – moyennant certaines hypothèses structurelles – d'obtenir des conditions plus

[1] Cf. 1.6.4.

simples [1] (cf. Krantz et al. (1971, ch. 4)). Dès lors que l'on se situe dans un tel cadre, g est défini à une transformation affine positive près [2], contrairement à la situation du 4.2, ce qui implique de s'intéresser à un nombre plus grand de formes fonctionnelles possibles pour la fonction d'agrégation V.

### 4.4.2 Procédures d'agrégation additive et multiplicative [3]

Dès lors que l'on cherche à modéliser des écarts de préférences, des notions d'indépendance plus générales que celles étudiées au 2.3.2 peuvent être envisagées. On dira qu'une sous-famille de critères J est indépendante au sens des différences de préférence dans F si les jugements en termes d'écart de préférence sur des actions ne se différenciant que sur les critères de J ne dépendent pas des valeurs fixées sur les critères de F\J.

Considérons quatre actions $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$ ayant toutes des évaluations identiques sur les critères de F\J. On dira que la sous-famille J est indépendante au sens des différences de préférence dans F si

$$a_1 \ominus a_2 \; P^* \; a_3 \ominus a_4 \text{ (resp. } I^*)$$

implique

$$b_1 \ominus b_2 \; P^* \; b_3 \ominus b_4 \text{ (resp. } I^*)$$

où $b_1$, $b_2$, $b_3$, $b_4$ sont des actions ayant des évaluations identiques sur les critères de F\J et ayant respectivement les mêmes évalua-

[1] Pour une approche alternative n'utilisant pas d'hypothèses structurelles mais faisant intervenir un nombre infini de relations, nous renvoyons à Vansnick (1984).

[2] c'est-à-dire que tout critère g' vérifiant (r.4.4.2) est lié à g par une transformation du type : $g' = \alpha \cdot g + \beta$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 0$.

[3] Nous nous limiterons, dans cette section, à l'étude de ces deux cas. Bien d'autres procédures d'agrégation sont envisageables mais elles nous semblent offrir peu d'intérêt en aide à la décision. En fait, la plupart des procédures d'agrégation que nous passerons en revue au 4.5 à propos de l'utilité espérée pourraient être également formalisées dans cette section.



tions que $a_1$, $a_2$, $a_3$ et $a_4$ sur les critères de J.

Dans tout ce qui suit, on supposera :

– que l'on raisonne sur un ensemble d'actions suffisamment riche pour que l'on puisse considérer que tout vecteur de performances de $E_1 \times E_2 \times ... \times E_n$ correspond à l'évaluation d'une action ;

– que, pour tout $i \in F$, l'échelle $E_i$ est bornée inférieurement par $e_{i*}$ et supérieurement [1] par $e_i^*$ ($e_{i*} \neq e_i^*$).

Le résultat suivant, démontré par Dyer et Sarin (1979b), est fondamental dans les applications pratiques. Il est inspiré d'un résultat tout-à-fait similaire que nous rencontrerons au 4.5 à propos de la théorie de l'utilité espérée.

**RÉSULTAT 4.4.1** : Considérons une fonction g vérifiant (r.4.4.2). Si les critères sont mutuellement indépendants au sens des préférences, si l'un des critères est indépendant au sens des différences de préférence dans F et [2] si $n \geq 3$, alors :

$$\text{soit } g(a) = \sum_{j=1}^{n} k_j \cdot v_j(a) \text{ si } \sum_{j=1}^{n} k_j = 1 \text{ (forme additive),} \qquad \text{(r.4.4.3)}$$

$$\text{soit } g(a) = \frac{1}{k}\left[\prod_{j=1}^{n} (1 + k \cdot k_j \cdot v_j(g_j(a)) - 1\right] \text{ si } \sum_{i=1}^{n} k_i \neq 1 \qquad \text{(r.4.4.4)}$$

(forme multiplicative),

où, $\forall\, i \in F$ :

$v_i(e_i^*) = 1$, $v_i(e_{i*}) = 0$,
$g(\tilde{a}) = 1$, $g(\underset{\sim}{a}) = 0$,
$k_i \in [0 \,;\, 1]$,
$k > -1$ et $k \neq 0$,

[1] On notera respectivement $\tilde{a}$ et $\underset{\sim}{a}$ les actions ayant pour vecteur de performances $(e_1^*, e_2^*, ..., e_n^*)$ et $(e_{1*}, e_{2*}, ..., e_{n*})$.

[2] Comme précédemment, le cas $n = 2$ impose de recourir à des conditions légèrement différentes.

k étant solution de l'équation $1 + k = \prod_{j=1}^{n} (1 + k \cdot k_j)$.

Ce résultat appelle un certain nombre de remarques.

a) Il fonde le choix entre la forme additive (r.4.4.3) et la forme multiplicative (r.4.4.4) sur la somme des coefficients [1] $k_j$. En pratique, cependant, ce critère de choix impliquerait de disposer de valeurs extrêmement précises des $k_j$, ce qui est rarement le cas. Pour tourner cette difficulté, Dyer et Sarin (1979b) montrent que, si l'on peut trouver quatre actions a, b, c et d ayant des performances identiques sur $F\backslash\{i, j\}$ dont les performances sur le couple de critères (i, j) valent respectivement

$(x_i, y_j)$, $(z_i, w_j)$, $(x_i, w_j)$ et $(z_i, y_j)$

et telles que $a \ominus b \; I^* \; c \ominus d$, alors la forme additive s'impose [2].

b) Au contraire de ce qui a été dit au 4.2.1.1 à propos de l'agrégation additive simple [3] (r.4.2.1), on constate ici que l'agrégation additive (r.4.4.3) n'est pas équivalente à l'agrégation multiplicative (r.4.4.4). Ceci est dû au fait que g étant une mesure, les seuls codages possibles de g préservant (r.4.4.2) sont des transformations affines positives. En considérant le logarithme de l'expression (r.4.4.4), on obtiendrait un critère de synthèse respectant la forme additive simple (r.4.2.1) mais qui ne respecterait pas (r.4.4.2), ne mesurant plus les différences de préférences.

---

[1] Notons que ce critère de séparation n'est pertinent qu'en raison des hypothèses de normalisation faites sur g et les fonctions $v_i$.

[2] Cette condition n'a pas reçu, à notre connaissance, de nom dans la littérature. Il est facile de montrer que la forme additive l'implique pour toute évaluation et que donc le fait de trouver des évaluations la mettant en défaut impose d'adopter la forme multiplicative.

[3] Nous précisons ici "simple" pour éviter tout risque de confusion entre la PAMC additive qui a fait l'objet du 4.2.1 et la PAMC additive conduisant à une mesure.



c) On a vu que, s'il existait une mesure respectant (r.4.4.3) ou (r.4.4.4), alors il existait également un critère de synthèse s'exprimant à l'aide de la forme additive (r.4.2.1). Du fait de la forme fonctionnelle très particulière de ces différents critères de synthèse, on conçoit intuitivement que, s'il existe un critère respectant (r.4.2.1) [1] et une mesure respectant (r.4.4.3) ou (r.4.4.4), ces critères ne sont pas sans lien. Dyer et Sarin (1979b) et Baron et al. (1984) ont prouvé un certain nombre de résultats à cet égard. En particulier, on peut montrer que, s'il existe un critère g vérifiant (r.4.2.1) et une mesure g′ vérifiant (r.4.4.3), alors g et g′ sont identiques moyennant une transformation affine positive près (ce qui implique qu'il en va de même pour les codages $v_j$ et $v_j'$).

### 4.4.3 Mise en œuvre

On a vu, au 4.2.1.3, la difficulté d'élaborer les codages $v_j$ dans une forme additive simple. Dans ce cas, en effet, il est nécessaire de travailler sur plusieurs critères à la fois, ce qui complique singulièrement les méthodes d'estimation ou de construction. Un des avantages de raisonner en termes de mesures est qu'il devient possible de bâtir les codages $v_j$ indépendamment les uns des autres. En effet, la "cardinalité" ne provient plus ici de l'additivité mais de l'idée de mesurer des différences de préférences. Faisons auparavant observer qu'il conviendrait, en toute rigueur, de tester (démarche descriptive) ou d'admettre comme base de travail (démarche constructive) les hypothèses d'indépendance à la base du résultat 4.4.1 avant de vouloir bâtir les codages $v_j$. Le problème de l'indépendance mutuelle au sens des préférences a déjà été évoqué au 2.4 et au 4.2.1.4. Compte-tenu de la complexité de la notion d'indépendance au sens des différences de préférences, on conçoit qu'il soit délicat de vouloir vérifier qu'elle convient, même dans une démarche purement descriptive [2]. Il s'agira donc ici, avant tout, de l'accepter de façon volontariste comme hypothèse conduisant à un modèle simple lorsque ceci semble "raisonnable".

---

[1] Dans le cas "continu" où les critères satisfaisant (r.4.2.1) se déduisent les uns des autres par application de la transformation (r.4.2.3).

[2] On trouvera dans MMCAD, 7.2.4 et 9.4 de nombreux exemples montrant pourquoi cette hypothèse peut être mise en défaut.

Fishburn (1967) présente trois méthodes différentes pour élaborer les codages $v_j$ en faisant appel à l'idée de différence de préférence :

– évaluation directe sur une échelle ("direct rating") ;
– évaluation fondée sur l'idée de bisection (au sens des différences de préférences) d'un intervalle [1] ;
– rangement des mutations par ordre croissant des différences de préférences et exploitation des inégalités ainsi mises à jour.

Mentionnons également la méthode dite des "mondes parallèles" mise au point par Vansnick (1984) à la suite de Camacho (1982) interprétant l'idée de mutation en considérant différentes situations possibles dans des "mondes" parallèles, identiques et sans connexion (on pourra se reporter également à Wakker (1986)).

La difficulté de la construction des codages $v_j$ tient cependant à la difficulté de donner un contenu opérationnel clair à la notion de différence de préférences. L'attrait intuitif de cette notion ne doit pas faire oublier qu'il est extrêmement difficile de formuler des questions y ayant trait. On peut avoir recours :

– à la pure introspection,
– à la technique des mondes parallèles,
– à la notion d'échange ou
– à un critère extérieur au problème

sans qu'aucune de ces interprétations ne présente, à notre sens, d'avantages déterminants (pour plus de précisions, on pourra se reporter à Von Winterfeld et Edwards (1986)).

Les codages $v_j$ étant construits, la mesure g sera parfaitement définie une fois obtenus les coefficients $k_j$ (et le coefficient k dans la forme multiplicative). Comme cela était le cas pour la forme additive simple, chaque jugement en termes de préférence ou

[1] C'est ce type de méthodes qui a été utilisé par Allais dans sa célèbre expérience de 1952 pour estimer ses "fonctions d'utilité cardinales".



d'indifférence donne lieu à une inégalité sur les coefficients $k_j$. On peut obtenir de la sorte un ensemble d'inégalités.

Dans le cas où le test mentionné à la remarque a) du 4.4.2 impose de recourir à la forme additive, il suffit alors de résoudre un système de n – 1 inéquations en tenant compte de la contrainte

$\sum_{j=1}^{n} k_j = 1$ pour donner un ordre de grandeur aux $k_j$.

Dans le cas où la forme multiplicative s'impose, le problème est un peu plus complexe dans la mesure où l'on n'a plus affaire à des inégalités linéaires. On peut alors considérer un système de n inéquations en $k \cdot k_j$, le résoudre pour trouver la valeur des inconnues $k \cdot k_j$ et ensuite obtenir la valeur de k qui n'est autre que $\prod_{j=1}^{n} (1 + k \cdot k_j) - 1$.

## 4.5 CAS PARTICULIER DE LA THÉORIE DE L'UTILITÉ ESPÉRÉE

### 4.5.1 Généralités

Les PAMC que nous avons envisagées jusqu'à présent prenaient appui sur un tableau de performances, c'est-à-dire sur les évaluations des actions potentielles sur différents critères constituant une famille cohérente. Rappelons (cf. 1.6) qu'un critère est une fonction visant à résumer, à l'aide d'un chiffre unique, les évaluations d'une action sur diverses conséquences se rattachant à un même "axe de signification" concret. Avant la construction de la famille de critères, on peut représenter le plus souvent [1] l'évaluation d'une action potentielle a sous la forme d'une distribution de vraisemblance sur les échelles associées aux diverses conséquences, c'est-à-dire par le modèle $\Gamma(a)$ défini au 1.5.

[1] Cf. MMCAD, ch. 8.

La théorie de l'utilité espérée s'attache au cas où la distribution de vraisemblance dont il vient d'être question est une distribution de probabilités. Elle vise à bâtir un vrai-critère de synthèse directement sur la base de ces évaluations sans nécessairement recourir à une phase préalable de construction d'un tableau de performances.

Dans le cadre le plus général, l'évaluation d'une action se présente donc ici sous la forme d'une distribution de probabilités $\delta^a$ sur l'ensemble $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_{\bar{n}}$ produit cartésien des échelles associées aux $\bar{n}$ conséquences retenues. Les échelles $E_i$ associées aux dimensions sont de même nature que celles associées aux critères dont il a été question dans les sections précédentes (cf. 1.6.2). La notation $\bar{n}$ a été introduite pour souligner le fait qu'il n'y a pas nécessairement égalité entre le nombre de dimensions et le nombre de critères (cf. 1.6). On se limitera, dans cette section, au cas où les échelles $E_i$ sont toutes finies. Ce qui y est dit se généralise naturellement au cas d'échelles infinies.

On cherche donc ici à bâtir une fonction d'évaluation du type :

$$g(a) = V(\delta^a(e_1, e_2, \ldots, e_{\bar{n}})\ ;\ (e_1, e_2, \ldots, e_{\bar{n}}) \in (E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_{\bar{n}})),$$

$\delta^a(e_1, e_2, \ldots, e_{\bar{n}})$ étant la probabilité de l'élément $(e_1, e_2, \ldots, e_{\bar{n}})$ de l'ensemble $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_{\bar{n}}$ si l'action a est mise à exécution.

Dans la plupart des problèmes réels, on fait souvent l'hypothèse simplificatrice consistant à considérer que les distributions de probabilités sur chacune des dimensions sont stochastiquement indépendantes. On a alors :

$$\delta^a(e_1, e_2, \ldots, e_{\bar{n}}) = \prod_{i=1}^{\bar{n}} \delta_i^a(e_i).$$



Dans le cadre de la théorie de l'utilité espérée, le vrai-critère de synthèse est du type [1] :

$$\left.\begin{array}{l} a\ P\ b \Leftrightarrow g(a) > g(b) \\ a\ I\ b \Leftrightarrow g(a) = g(b) \end{array}\right\} \qquad \text{(r.4.5.1)}$$

avec :

$$g(a) = \sum_{e_1 \in E_1} \sum_{e_2 \in E_2} \ldots \sum_{e_{\bar{n}} \in E_{\bar{n}}} u(e_1, e_2, \ldots, e_{\bar{n}}) \cdot \delta^a(e_1, e_2, \ldots, e_{\bar{n}})$$

qui revient à associer, à chaque vecteur $(e_1, e_2, \ldots, e_{\bar{n}})$, un coefficient $u(e_1, e_2, \ldots, e_{\bar{n}})$ généralement appelé "utilité" et à faire ensuite la somme de ces coefficients pondérée par les probabilités $\delta^a(e_1, e_2, \ldots, e_{\bar{n}})$, d'où l'appellation "utilité espérée". On verra au 4.5.2 que l'hypothèse d'indépendance stochastique simplifie l'utilisation de (r.4.5.1).

Le critère (r.4.5.1) ne fait que généraliser, au cas où l'on considère l'ensemble des $\bar{n}$ dimensions, un critère de ponctualisation que nous avons déjà rencontré au 2.4.1.

Soulignons que la fonction d'utilité u (qu'elle fasse intervenir une ou plusieurs dimensions) intègre, de façon non dissociable,

[1] Il est bien entendu possible d'envisager d'autres formes fonctionnelles. Il y a là un vaste débat concernant le problème de la "rationalité" dans l'incertain. Du point de vue de l'aide à la décision, si l'on souhaite bâtir un vrai-critère, la simplicité de la forme fonctionnelle utilisée en théorie de l'utilité espérée nous semble être un avantage déterminant. Notons cependant que, depuis quelques années, on assiste à une remise en cause profonde de cette théorie, tant en ce qui concerne ses possibilités de décrire le comportement observé en laboratoire d'un grand nombre d'individus (cf., entre autres, les résultats des expériences présentés et commentés dans les recueils de Allais et Hagen (1979), Stigum et Wenstøp (1983), Hagen et Wenstøp (1984) et Munier (1988), l'article classique de Kahneman et Tversky (1979) et la synthèse de Jaffray (1989)) que son attrait normatif (cf., sur un plan théorique, Allais (1953, 1979, 1986), Dekel (1986), Fishburn (1982, 1983, 1988), Jaffray (1988), Machina (1982, 1988), Quiggin (1982), Schmeidler (1984) ou Yaari (1987) ou les synthèses de Munier (1989 a et b).

deux aspects des préférences [1]. Ceux-ci ont trait respectivement :

– aux comparaisons d'écarts de préférences résultant de variations certaines des conséquences (attitude face au passage d'un échelon à un autre) ;
– aux jugements de préférences résultant de variations dans l'appréciation probabiliste des conséquences (attitude face au risque) [2].

Sous des conditions très fréquemment retenues en pratique, le critère de l'utilité espérée relatif à $\overline{n}$ dimensions (défini par (r.4.5.1)) se présente comme une PAMC agrégeant $\overline{n}$ (éventuellement un nombre plus réduit) de critères définis eux-mêmes selon un principe identique sur une (éventuellement plusieurs) dimensions. Lorsque ces hypothèses (dont il sera question au 4.5.2.2) ne sont pas remplies, on ne peut plus, en toute rigueur, parler d'une PAMC à propos de (r.4.5.1).

Considérons un s.r.p. de type (P, I) ayant les propriétés d'un préordre complet sur un ensemble d'actions évaluées au travers d'une distribution de probabilités sur un ensemble de $\overline{n}$ conséquences. On connaît, depuis l'ouvrage de Von Neumann et Morgenstern (1947), les conditions permettant de représenter ce s.r.p. par un vrai-critère bâti selon la formulation de l'utilité espérée (r.4.5.1) [3]. Précisons ici qu'un critère vérifiant (r.4.5.1) est défini à une transformation affine positive près.

Pour bâtir un tel critère, il faut donc pouvoir évaluer la fonction $u(e_1, e_2, ..., e_{\overline{n}})$. Lorsque la fonction u ne fait intervenir qu'une seule dimension, il existe (cf. infra et Keeney et Raiffa

[1] Cf. Bouyssou et Vansnick (1988, 1990).

[2] D'autres modèles ont été proposés pour séparer ces deux concepts. Mentionnons en particulier le modèle EURDP, cf. Quiggin (1982), Schmeidler (1984), Allais (1986), Yaari (1987).

[3] Pour un énoncé de ces conditions, nous renvoyons à Fishburn (1970a) ou à MMCAD, 9.4.4.1.



(1976)) un certain nombre de techniques de questionnement permettant de lui donner une forme précise. On pourrait songer à appliquer ces mêmes techniques dans le cas où u fait intervenir plusieurs dimensions [1]. Comme nous le verrons ci-après, cette façon de faire se heurte, en général, à des difficultés insurmontables. C'est pourquoi on cherche d'abord à décomposer la fonction $u(e_1, e_2, ..., e_{\overline{n}})$ en utilisant une forme fonctionnelle simple avant de procéder à une évaluation.

Avant d'aborder ce problème, mentionnons qu'il est possible d'utiliser la théorie de l'utilité espérée dans une étude d'aide à la décision dans une optique toute différente de celle abordée dans cette section [2]. On peut en effet vouloir bâtir, en utilisant la théorie de l'utilité espérée, non pas un critère de synthèse mais un critère parmi d'autres en appliquant la formule (r.4.5.1) à un sous-ensemble de dimensions appartenant au support d'un critère. C'est là une technique classique de ponctualisation. Y avoir recours ne préjuge en rien de la PAMC qui sera utilisée par la suite.

## 4.5.2 Procédures d'agrégation utilisées en théorie de l'utilité espérée

### 4.5.2.1 Compléments sur les notions d'indépendance

Le concept d'indépendance au sens des préférences introduit jusqu'à présent sur la base d'une famille de critères se transpose de façon immédiate au cas d'une famille de dimensions. On dira qu'une sous-famille de dimensions $J \subset D = \{1, 2, ..., \overline{n}\}$ est indépendante au sens des préférences dans D si les jugements de

[1] Rien ne s'opposerait non plus à bâtir une fonction d'évaluation agrégeant les $\overline{n}$ dimensions "dans le certain" et à ensuite bâtir une fonction d'utilité de Von Neumann-Morgenstern sur cette fonction. Sur ce point, comme sur tous ceux abordés dans cette section que le lecteur souhaiterait approfondir, nous renvoyons à l'ouvrage de Keeney et Raiffa (1976) où l'on trouvera, entre autres, un excellent rappel des principes et techniques de base en théorie de l'utilité espérée.

[2] Cf. 1.6.2.

préférence pour des actions ne différant que sur les dimensions de J ne dépendent pas des valeurs fixées sur D\J. Autrement dit, considérons quatre actions a, b, c, d évaluées de façon ponctuelle sur les $\bar{n}$ dimensions de D et telles que :

$$\gamma_j(a) = \gamma_j(c),\ \forall\ j \in J,$$
$$\gamma_j(b) = \gamma_j(d),\ \forall\ j \in J,$$
$$\gamma_i(a) = \gamma_i(b),\ \forall\ i \notin D\backslash J,$$
$$\gamma_i(c) = \gamma_i(d),\ \forall\ i \notin D\backslash J$$

où $\gamma_i(a)$ désigne l'évaluation ponctuelle de l'action a sur la dimension i.

L'**indépendance au sens des préférences** de J dans D implique alors que :

a P b (resp. a I b) ⇒ c P d (resp. c I d).

Lorsque les évaluations des actions font intervenir des distributions de probabilités, il est commode d'assimiler de telles actions idéales à des **loteries**. Toute action a caractérisée par une distribution de probabilités $\delta^a$ sur $E_1 \times E_2 \times ... \times E_{\bar{n}}$ peut en effet être vue comme une "loterie" dont les "lots" sont les différents $\bar{n}$-uplets $(e_1, e_2, ..., e_{\bar{n}})$, chaque lot étant affecté de sa probabilité d'occurrence $\delta^a(e_1, e_2, ..., e_{\bar{n}})$. Il est alors naturel de s'intéresser à d'autres formes d'indépendance qui concernent un cas particulier de l'indépendance au sens des dispersions définie au 2.4.1. On dira qu'une sous-famille J de dimensions est **indépendante au sens des utilités** dans D si les préférences, pour des loteries ne différant que sur les dimensions de J, ne dépendent pas des évaluations certaines sur les dimensions de D\J. Considérons quatre actions a, b, c, d évaluées de façon ponctuelle sur les dimensions de D\J telles que :

$$\delta^a(e_j)_{j\in J} = \delta^c(e_j)_{j\in J},$$
$$\delta^b(e_j)_{j\in J} = \delta^d(e_j)_{j\in J},$$
$$\gamma_i(a) = \gamma_i(b),\ \forall\ i \notin D\backslash J,$$
$$\gamma_i(c) = \gamma_i(d),\ \forall\ i \notin D\backslash J,$$



$\delta^a(e_j)_{j\in J}$ désignant la distribution de probabilités sur $\prod_{j\in J} E_j$ résultant de la mise à exécution de a.

L'indépendance au sens des utilités de J dans D implique alors que :

a P b (resp. a I b) ⇒ c P d (resp. c I d).

### 4.5.2.2 Agrégations additive et multiplicative

Ces deux formes d'agrégation sont les plus simples et sont celles qui sont employées dans la plupart des applications pratiques. De façon quelque peu simplifiée, elles concernent les cas où le critère unique de synthèse g(a) peut s'écrire sous l'une ou l'autre des formes suivantes :

$$g(a) = \sum_{i=1}^{\bar{n}} k_i \cdot g_i(a) \qquad \text{(r.4.5.2)}$$

$$k_i > 0,\ \sum_{i=1}^{\bar{n}} k_i = 1$$

$$g(a) = [\prod_{i=1}^{\bar{n}} (1 + k \cdot k_i \cdot g_i(a)) - 1]\ \frac{1}{k} \qquad \text{(r.4.5.3)}$$

$$k > -1,\ k \neq 0,\ k_i > 0,\ \sum_{i=1}^{\bar{n}} k_i \neq 1$$

où les $g_i$ sont des critères définis comme l'espérance mathématique de fonctions d'utilité partielles $u_i$ faisant intervenir normalement une seule dimension (éventuellement plusieurs dimensions).

Dans tout le reste de cette section, on supposera que :

– l'on raisonne sur un ensemble d'actions idéales suffisamment riche pour que l'on puisse considérer toute distribution de probabilités sur $E_1 \times E_2 \times ... \times E_{\bar{n}}$ comme correspondant à l'évaluation d'une action ;

– chaque échelle $E_i$ est bornée inférieurement par $e_{i*}$ et supérieurement par $e_i^*$ $(e_{i*} \neq e_i^*)$.

Le résultat fondamental suivant est dû à Keeney (1974) :

**RÉSULTAT 4.5.1** : Considérons un vrai-critère g vérifiant la forme d'utilité espérée (r.4.5.1). Si toute sous-famille de dimensions est indépendante au sens des utilités dans D (indépendance mutuelle au sens des utilités), alors, si $\bar{n} \geq 3$ [1] :

soit $u(e_1, e_2, ..., e_{\bar{n}}) = \sum_{i=1}^{\bar{n}} k_i \cdot u_i(e_i)$ (r.4.5.2 bis)

(forme additive)

si $\sum_{i=1}^{\bar{n}} k_i = 1$,

soit $u(e_1, e_2, ..., e_{\bar{n}}) = \left(\prod_{i=1}^{\bar{n}} (1 + k \cdot k_i \cdot u_i(e_i)) - 1\right) \frac{1}{k}$

(forme multiplicative) (r.4.5.3 bis)

si $\sum_{i=1}^{\bar{n}} k_i \neq 1$

avec

$k_i \in [0, 1]$,
$u_i(e_i^*) = 1$, $u(e_{i*}) = 0$,
$u(e_1^*, e_2^*, ..., e_{\bar{n}}^*) = 1$, $u(e_{1*}, e_{2*}, ..., e_{\bar{n}*}) = 0$,
$k > -1$ et $k \neq 0$ solution de l'équation

$$1 + k = \prod_{i=1}^{\bar{n}} (1 + k \cdot k_i)$$

Ce résultat fondamental appelle les commentaires suivants.

a) Ces deux formes peuvent s'écrire en une seule faisant apparaître la forme additive comme un cas limite de la forme multiplicative pour k = 0 en posant :

[1] Le cas $\bar{n} = 2$ imposant une fois de plus de recourir à des conditions spécifiques.



$$u(e_1, e_2, ..., e_{\bar{n}}) = \sum_{i=1}^{\bar{n}} k_i \cdot u_i(e_i) + k \cdot \sum_{i=1}^{\bar{n}} \sum_{j>1}^{\bar{n}} k_i \cdot k_j \cdot u_i(e_i) \cdot u_j(e_j)$$
$$+ k^2 \cdot \sum_{i=1}^{\bar{n}} \sum_{j>i}^{\bar{n}} \sum_{k>j}^{\bar{n}} k_i \cdot k_j \cdot k_k \cdot u_i(e_i) \cdot u_j(e_j) \cdot u_k(e_k)$$
$$+ ... + k^{\bar{n}-1} \cdot k_1 \cdot k_2 \cdot ... \cdot k_{\bar{n}} \cdot u_1(e_1) \cdot u_2(e_2) \cdot ... \cdot u_{\bar{n}}(e_{\bar{n}}).$$

b) Au vu de ce résultat, supposons que l'on retienne pour la fonction d'utilité une forme additive (r.4.5.2 bis). Un calcul simple permet alors de montrer que le critère de synthèse qui en résulte est du type (r.4.5.2), les critères $g_i(a)$ étant bâtis en calculant l'espérance mathématique de l'utilité partielle $u_i$ par rapport à la distribution de probabilités marginale de l'action a sur l'échelle $E_i$.

On retrouve une équivalence similaire entre (r.4.5.3 bis) et (r.4.5.3) dès lors que l'on admet (hypothèse souvent réaliste en pratique) que les évaluations des actions sous forme de distributions de probabilités sur les différentes dimensions sont stochastiquement indépendantes, c'est-à-dire que :

$$\delta^a(e_1, e_2, ..., e_{\bar{n}}) = \delta_1^a(e_i) \cdot \delta_2^a(e_2) \cdot ... \cdot \delta_{\bar{n}}^a(e_{\bar{n}}).$$

c) La condition d'indépendance mutuelle au sens des utilités est équivalente à la condition d'indépendance mutuelle au sens des préférences jointe à l'indépendance au sens des utilités d'une dimension dans D. On notera alors la parenté flagrante de ce résultat avec le résultat 4.4.1 (qui est postérieur), l'indépendance au sens des différences de préférences jouant le rôle de l'indépendance au sens des utilités.

d) De même qu'au 4.4.2, le critère permettant de choisir entre les deux décompositions sur la base de la somme des $k_i$ est parfois sujet à caution en pratique. On trouvera, dans Keeney et Raiffa (1976), un résultat classique imposant de recourir à la forme additive dès lors qu'il existe deux actions a et b respectivement assimilables aux loteries :

$$\left\{\begin{array}{ll} 1/2 & (e_i, e_j, (e_k)_{k\neq i,j}) \\ 1/2 & (e_i', e_j', (e_k)_{k\neq i,j}) \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{ll} 1/2 & (e_i, e_j', (e_k)_{k\neq i,j}) \\ 1/2 & (e_i', e_j, (e_k)_{k\neq i,j}) \end{array}\right.$$

et qui sont indifférentes [1].

e) De même qu'au 4.4.2, l'équation en k de degré $\bar{n}$

$$1 + k = \prod_{i=1}^{\bar{n}} (1 + k \cdot k_i)$$

admet, en général, une seule racine réelle supérieure à − 1 et différente de 0.

f) S'il existe une décomposition additive (r.4.5.2) ou une décomposition multiplicative (r.4.5.3), il existe aussi une décomposition additive simple sur l'ensemble des dimensions de type (r.4.2.1). Bien entendu, ces décompositions ne sont pas sans liens. En particulier, s'il existe (dans le cas "continu") une décomposition additive simple (r.4.2.1) et une décomposition additive (r.4.5.2), on peut montrer qu'elles sont identiques à une transformation affine positive près (les liens existant entre (r.4.2.1) et la décomposition multiplicative (r.4.5.3) font intervenir une transformation de type logarithmique). On peut de même établir des liens de même nature entre les décompositions étudiées ici et les décompositions additives et multiplicatives d'une mesure (lorsqu'elle existe) sur l'ensemble des dimensions.

[1] La généralisation de cette condition implique que les préférences entre des loteries ne dépendent que de leurs distributions marginales sur chacune des dimensions. On peut montrer (cf. Fishburn (1970a)) que c'est là une condition nécessaire et suffisante pour parvenir à une décomposition additive.



**4.5.2.3 Autres procédures d'agrégation**

Dans ce paragraphe, nous passerons brièvement en revue d'autres décompositions possibles de la fonction $u(e_1, e_2, ..., e_{\bar{n}})$. Leur intérêt est avant tout conceptuel dans la mesure où leur élaboration en pratique requiert un travail très lourd [1] et ne sont donc utilisées que dans des cas très particuliers.

Un premier résultat concerne le cas où chaque dimension est indépendante au sens des utilités dans D, hypothèse plus faible que l'indépendance mutuelle au sens des utilités, et aboutit à une **décomposition** dite "**multilinéaire**".

**RÉSULTAT 4.5.2** : Considérons une fonction g vérifiant (r.4.5.1). Si chaque dimension est indépendante au sens des utilités dans D, alors :

$$u(e_1, e_2, ..., e_{\bar{n}}) = \sum_{i=1}^{\bar{n}} k_i \cdot u_i(e_i) + \sum_{i=1}^{\bar{n}} \sum_{j>1} k_{ij} \cdot u_i(e_i) \cdot u_j(e_j)$$
$$+ \sum_{j=1}^{\bar{n}} \sum_{j>i} \sum_{k>j} k_{ijk} \cdot u_i(e_i) \cdot u_j(e_j) \cdot u_k(e_k) + ... +$$
$$k_{123...\bar{n}} \cdot u_1(e_1) \cdot u_2(e_2) \cdot u_3(e_3) \cdot ... \cdot u_{\bar{n}}(e_{\bar{n}})$$

avec

$u_i(e_i^*) = 1$, $u_i(e_{i*}) = 0$

$u(e_1^*, e_2^*, ..., e_{\bar{n}}^*) = 1$, $u(e_{1*}, e_{2*}, ..., e_{\bar{n}*}) = 0$.

Utiliser une telle décomposition pour bâtir un critère de synthèse imposerait d'élaborer $\bar{n}$ fonctions d'utilité partielles $u_i(e_i)$ et d'attribuer une valeur à $2^{\bar{n}}-1$ coefficients [2].

De nombreux autres résultats sont disponibles dans la littérature. Ils font apparaître des fonctions d'utilité partielles ayant plus d'un argument ou plusieurs fonctions ayant les mêmes arguments.

A titre d'exemple, citons :

[1] Pour plus de précisions sur les décompositions abordées dans ce paragraphe, nous renvoyons à Keeney et Raiffa (1976) et à Farquhar (1980, 1983).

[2] En fait, il faut élaborer $2^{\bar{n}} - 2$ valeurs sachant que la somme des coefficients vaut 1 puisque $u(e_1^*, e_2^*, ..., e_{\bar{n}}^*) = 1$.

– la décomposition "bilatérale" [1]

$$u(e_1, e_2, e_3) = k_1{\cdot}u_1(e_1) + k_2{\cdot}u_2(e_2) + k_3{\cdot}u_3(e_3) + k_{12}{\cdot}f_1(e_1){\cdot}f_2(e_2) + k_{13}{\cdot}f_1(e_1){\cdot}f_3(e_3) + k_{23}{\cdot}f_2(e_2){\cdot}f_3(e_3) + k_{123}{\cdot}f_1(e_1){\cdot}f_2(e_2){\cdot}f_3(e_3)\ ;$$

– les décompositions "cubiques" et "pyramidales" [2] avec par exemple

$$u(e_1, e_2, e_3) = k_1{\cdot}u_1(e_1) + k_2{\cdot}u_2(e_2) + k_3{\cdot}u_3(e_3) + k_{12}{\cdot}u_{12}(e_1, e_2) + k_{13}{\cdot}u_{13}(e_1, e_3) + k_{23}{\cdot}u_{23}(e_2, e_3) + k_{123}{\cdot}u_1(e_1){\cdot}u_2(e_2){\cdot}u_3(e_3)$$

ou

$$u(e_1, e_2, e_3) = k_1{\cdot}u_1(e_1) + k_2{\cdot}u_2(e_2) + k_3{\cdot}u_3(e_3) + k_{12}{\cdot}u_{12}(e_1, e_2) + k_{13}{\cdot}u_{13}(e_1, e_3) + k_{23}{\cdot}u_{23}(e_2, e_3) + k_{123}{\cdot}f_1(e_1){\cdot}f_2(e_2){\cdot}f_3(e_3)\ ;$$

– l'approche des structures de préférences "multivalentes" [3] cherchant à exploiter des propriétés d'indépendance vérifiées seulement sur des sous-ensembles d'échelons associés à une dimension ;

– l'approche du "balisage" par l'indifférence conditionnelle [4] faisant ressortir des propriétés d'indépendance généralisées au sens des utilités dites de "degré n".

### 4.5.3 Mise en œuvre [5]

#### 4.5.3.1 Compléments sur les hypothèses d'indépendance

Avant de s'intéresser à l'attribution de valeurs aux paramètres de la fonction d'utilité, une étape préalable consiste à chercher à cerner quelles sont les hypothèses d'indépendance qui sont vérifiées (démarche descriptive) ou qu'il est raisonnable d'accepter (démarche constructive) afin d'obtenir une forme fonctionnelle précise pour $u(e_1, e_2, ..., e_{\overline{n}})$. Les décompositions additives et multiplicatives étudiées précédemment impliquent l'indépendance mutuelle au sens des utilités de l'ensemble des dimensions. On a vu, au 2.4.1, quels types de difficultés on pouvait rencontrer pour savoir s'il convient ou non d'accepter l'indépendance au sens des utilités d'une dimension. Ces difficultés

[1] Voir Fishburn (1977c). Nous nous restreignons ici à trois dimensions pour ne pas alourdir inutilement les expressions.

[2] Voir Farquhar (1975).

[3] Voir Farquhar et Fishburn (1981).

[4] Voir Farquhar et Fishburn (1983).

[5] On trouvera un exemple réel de mise en oeuvre de ces concepts et résultats au 9.2.



sont de même nature avec plusieurs dimensions. Nous nous contenterons ici d'énoncer deux résultats classiques qui sont très utiles en pratique pour raisonner cette question.

Par analogie avec le résultat 4.2.2, on a :

**RÉSULTAT 4.5.3** : Considérons une fonction g vérifiant la formulation d'utilité espérée (r.4.5.1) [1]. Si deux sous-familles de dimensions I et J sont toutes deux indépendantes au sens des utilités dans D et sont telles que $I \cap J \neq \varnothing$, $\mathrm{Non}(I \subset J)$, $\mathrm{Non}(J \subset I)$, alors les sous-familles $I \cup J$, $I \cap J$, $I \setminus J$, $J \setminus I$, $(I \setminus J) \cup (J \setminus I)$ sont indépendantes au sens des utilités dans D.

On a également :

**RÉSULTAT 4.5.4** : Considérons une fonction g vérifiant la formulation de l'utilité espérée (r.4.5.1). Les trois propositions suivantes sont alors équivalentes dès lors que $\overline{n} \geq 3$ :

– les dimensions sont mutuellement indépendantes au sens des utilités ;

– les sous-familles de dimensions $\{i, i+1\}$ pour $i = 1, 2, ..., \overline{n} - 1$ sont indépendantes au sens des utilités dans D ;

– $\exists\, j \in D$ tel que la dimension j est indépendante au sens des utilités dans D et les sous-familles $\{j, i\}$ pour $i = 1, 2, ..., j-1, j+1, ..., \overline{n}$ sont indépendantes au sens des préférences dans D.

Admettre comme base de travail l'indépendance mutuelle au sens des utilités peut donc, dans cette situation, se raisonner en ne considérant que des paires de dimensions judicieusement choisies ou en utilisant une combinaison d'hypothèses d'indépendance au sens des préférences et des utilités.

#### 4.5.3.2 Elaboration des fonctions d'utilité partielles

Que ce soit dans les décompositions additives ou multiplicatives, une étape importante de la mise en œuvre de la théorie de l'utilité espérée consiste dans l'élaboration des fonctions d'utilités partielles $u_i(e_i)$. C'est le rôle des hypothèses d'indépendance utilisées au résultat 4.5.1 que de permettre de raisonner les fonctions d'utilités partielles $u_i(e_i)$ sans se préoccuper des autres dimensions. Rejeter ces hypothèses implique de s'intéresser à des fonctions d'utilité partielles conditionnelles à une évaluation fixée sur les autres dimensions. Travailler avec de telles fonctions

[1] La démonstration de cette proposition (voir par exemple Keeney et Raiffa (1976)) fait largement appel à la transitivité de P et I.

conditionnelles est rarement réaliste en pratique.

Relativement simple d'un point de vue conceptuel, l'élaboration de telles fonctions requiert une expérience certaine et se heurte souvent à bien des difficultés. Nous ne pouvons, dans le cadre de ce livre, étudier en détail toutes les procédures et techniques permettant d'élaborer ces fonctions [1]. Nous renvoyons pour cela aux ouvrages de Raiffa (1970), Keeney et Raiffa (1976) et à l'article de synthèse de Farquhar (1984).

Une étape préalable essentielle à l'élaboration des $u_i(e_i)$ consiste dans une définition claire de la dimension, de ses échelons, des unités utilisées, etc. Avant de procéder à une élaboration quantitative, il est également prudent de chercher à identifier et/ou à établir les "attitudes vis-à-vis du risque" sur cette dimension. On sait en effet [2] que certaines attitudes raisonnables vis-à-vis du risque conduisent à des formes fonctionnelles très précises pour les fonctions $u_i(e_i)$ (formes exponentielles, puissance, logarithmique, etc.).

Pour obtenir des valeurs de la fonction $u_i(e_i)$, on peut recourir à de nombreuses techniques. Tant dans la forme additive que multiplicative, on a :

$$u_i(e_{i*}) = 0 \text{ et } u_i(e_i^*) = 1.$$

De plus, ces préférences pour des loteries sur la dimension i ne dépendent pas des valeurs fixées sur les autres dimensions. Dès lors, si l'on peut trouver un échelon [3] $e_i'$ tel que le fait de subir

[1] Beaucoup parlent, à propos de cette élaboration, d'un véritable "art". Pour ceux désirant approfondir ce sujet, rien ne remplace les enseignements que l'on peut tirer d'un véritable dialogue. On trouvera dans Keeney (1977) la transcription détaillée d'un dialogue réel visant à l'élaboration de fonctions d'utilité.

[2] Il existe une littérature abondante à ce sujet dont on trouvera un bon aperçu dans Keeney et Raiffa (1976). L'article de base en la matière est Pratt (1964).

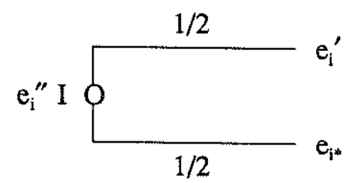
[3] Rappelons une fois de plus que la recherche de $e_i'$ s'opère par un resserrement progressif d'un intervalle comprenant cette valeur.



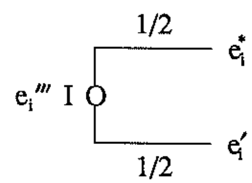
une conséquence certaine $e_i'$ soit jugé équivalent à celui de courir le risque de recevoir soit $e_{i*}$, soit $e_i^*$ avec des probabilités identiques, (r.4.5.1) permet, combinée à (r.4.5.2) ou (r.4.5.3), de poser :

$$u_i(e_i') = 1/2 \cdot u_i(e_{i*}) + 1/2 \cdot u_i(e_i^*) = 1/2.$$

On peut obtenir d'autres points sur la fonction d'utilité, par exemple en s'intéressant aux valeurs $e_i''$ et $e_i'''$ telles que :

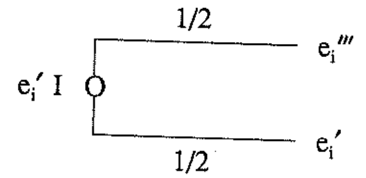



et

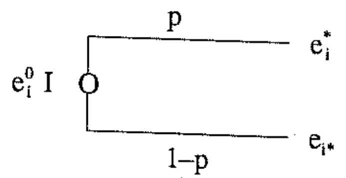



On posera alors $u_i(e_i'') = 1/4$ $u_i(e_i''') = 3/4$. On peut itérer à loisir cette technique, dite de la "conséquence variable" (ou de la loterie 50-50), pour obtenir autant de points que l'on souhaite sur la fonction d'utilité [1]. Le plus souvent, en pratique, on se contentera d'un nombre restreint de points traçant ensuite, à main levée, une fonction ou utilisant ces points pour calibrer les paramètres d'une forme fonctionnelle précise impliquée par des considérations qualitatives sur le goût ou l'aversion pour le risque. Pour s'assurer d'une certaine cohérence dans les valeurs attribuées, il est prudent de poser quelques questions de contrôle. On devrait avoir par exemple :

[1] La nature de ces questions explique qu'il soit extrêmement difficile de mettre en œuvre une élaboration directe de $u(e_1, e_2, ..., e_{\pi})$. Une telle façon de faire supposerait un nombre très élevé de questions particulièrement complexes. Il est important également que l'interrogé perçoive clairement la dimension et puisse la rattacher à son expérience concrète. Ceci explique qu'il soit, en général, difficile de vouloir bâtir une fonction d'utilité de Von Neumann-Morgenstern sur un critère de synthèse agrégeant (dans le "certain") les dimensions de D. En effet, un tel critère ne s'exprime généralement dans aucune unité concrète claire.




Une autre technique, dite de la "probabilité variable" (qui est adaptée au cas d'échelles discrètes, contrairement à la précédente), consiste à faire porter les questions non sur des échelons mais sur des probabilités. Fixons un échelon $e_i^0$. Si l'on parvient à trouver la probabilité p telle que




on pourra alors poser $u_i(e_i^0) = p \cdot u_i(e_i^*) + (1 - p) \cdot u_i(e_{i*}) = p$. D'autres techniques peuvent également être envisagées, par exemple en faisant varier un des lots de la loterie ou en faisant comparer deux loteries entre elles [1].

Il est clair que, dans une démarche purement descriptive, toutes ces techniques devraient conduire à des fonctions $u_i(e_i)$ identiques, à un aléa expérimental près. Il n'en va pas de même dans une démarche constructive où il est tout à fait concevable que la façon de présenter le problème, de poser les questions et de les enchaîner puisse avoir une influence non négligeable sur le résultat du dialogue.

De très nombreuses études laissent à penser qu'adopter une attitude purement descriptive pour mettre en œuvre ce genre de questionnement est fortement sujet à caution [2]. On constate en

[1] Sur cette dernière technique, voir McCord et de Neufville (1986).

[2] Voir les synthèses de Bouyssou (1984) ou Jaffray (1989).



effet que :

– les probabilités présentes dans les loteries sont souvent mal perçues et déformées, en particulier aux environs de la certitude [1],
– la façon de formuler les questions influence grandement les réponses en termes de préférences [2],
– le domaine sur lequel est estimée la fonction d'utilité influence significativement sa forme [3],

qu'enfin et surtout

– les diverses méthodes d'estimation produisent des résultats différents, ces différences étant importantes, systématiques et prévisibles [4].

Il serait cependant vain de chercher à nier l'intérêt de cette approche en aide à la décision. Le très grand nombre d'études ayant été réalisées en l'utilisant est là pour en témoigner [5]. Mais il est essentiel de reconnaître que l'intérêt de cette approche réside avant tout dans la puissance des conventions qu'elle propose au décideur pour structurer et raisonner ses préférences.

[1] Voir le recueil de Kahneman et al. (1981) où on trouvera une étude exhaustive de ce problème.

[2] En particulier, citons :
– Le phénomène du renversement de préférences (voir Lichtenstein et Slovic (1971)).
– Les effets de "référence" et du "contexte" (reference and context effects). Voir, par exemple, Hershey et Schoemaker (1980), Tversky (1977) ou encore Kahneman et Tversky (1979).

[3] Voir, par exemple, Hershey et al. (1980) ou Jaffray et Cohen (1982).

[4] Voir, outre l'article de Hershey et al. (1980), les travaux de McCord et de Neufville (1982), les résultats de l'étude de 1952 de Allais reproduits dans Allais (1979), Jonhson et Schkade (1989), Loomes (1988).

[5] Voir la bibliographie de Keeney (1982).

Mentionnons en dernier lieu qu'il est possible de construire les fonctions $u_i(e_i)$ en recourant à des techniques de programmation linéaire tout à fait comparables à celles qui ont déjà été mentionnées au 4.2.1.3 [1].

### 4.5.3.3 Attribution de valeurs aux coefficients $k_i$

L'attribution d'une valeur aux coefficients $k_i$ dans les formes additives et multiplicatives (r.4.5.2) et (r.4.5.3) s'opère suivant les mêmes principes que ceux qui ont déjà été évoqués au 4.2.1.3 à propos de la forme additive simple et au 4.4.3 à propos des mesures.

Il est prudent, dans tous les cas, de chercher à ordonner les $k_i$ avant de procéder à des questions plus complexes. Ceci se fait de manière simple sachant que :

$$(e_{1*}, e_{2*}, \ldots, e_{i-1*}, e_i^*, e_{i+1*}, \ldots, e_{\bar{n}*}) \ P \ (e_{1*}, e_{2*}, \ldots, e_{j-1*}, e_j^*, e_{j+1*}, e_{\bar{n}*})$$
$$\Rightarrow k_i > k_j$$

dans la forme additive aussi bien que dans la forme multiplicative.

Pour donner une valeur aux $k_i$ dans la forme additive, il suffit, sachant que $\sum_{i=1}^{\bar{n}} k_i = 1$, d'obtenir $\bar{n} - 1$ jugements de préférences sur des actions différant sur plusieurs dimensions. Ceci peut se faire simplement en évaluant des taux de substitution entre différentes dimensions. On obtient alors un polyèdre que l'on peut chercher à explorer de façon systématique. Si l'on souhaite attribuer une valeur unique aux $k_i$, on pourra chercher à obtenir des jugements en termes d'indifférence ou encore à attribuer directement une valeur aux $k_i$ en cherchant à définir la probabilité p telle que :

[1] Voir sur ce point Siskos (1983).



$$(e_{1*}, e_{2*}, \ldots, e_{i-1*}, e_i^*, e_{i+1*}, \ldots, e_{\bar{n}*}) \ I \ \bigcirc \begin{cases} \xrightarrow{p} (e_1^*, e_2^*, \ldots, e_{\bar{n}}^*) \\ \xrightarrow[1-p]{} (e_{1*}, e_{2*}, \ldots, e_{\bar{n}*}) \end{cases}$$

On a alors, tant dans la forme additive que multiplicative, $k_i = p$.

Pour donner une valeur aux $k_i$ dans la forme multiplicative, on peut recourir à la technique évoquée au 4.4.3 en raisonnant sur les coefficients $k \cdot k_i$, soit obtenir n – 1 équations (ou inéquations) et attribuer une valeur à l'un des $k_i$ en recourant à la technique de loterie que nous venons d'évoquer. La valeur de k se déduit alors aisément, de façon numérique, en résolvant l'équation :

$$1 + k = \prod_{i=1}^{\bar{n}} (1 + k \cdot k_i).$$

On verra au 9.2 un exemple de mise en œuvre de ces techniques.

## 4.6 CONCLUSION

En matière d'aide multicritère à la décision, l'approche opérationnelle qui repose sur la construction d'un critère unique de synthèse apparaît, aux yeux de beaucoup, comme la plus naturelle. On la croit généralement aisée parce que simple. La complexité des résultats théoriques rappelés dans ce chapitre, jointe à la pauvreté des résultats concernant divers problèmes importants auxquels se trouve confronté le praticien, nous invitent à souligner le caractère trompeur de cette apparente facilité.

Bâtir un critère unique de synthèse implique des réponses à trois types de problèmes :

– **Un problème structurel** : quelle est la classe de fonctions V au sein de laquelle on cherche le critère de synthèse ? Autrement dit, quelles sont les formes analytiques a priori possibles (et seules possibles) pour cette fonction V (somme pondérée, forme additive plus générale, forme multiplicative, ...) ?

– **Un problème paramétrique** : la classe de fonctions V envisagée fait intervenir un certain nombre de paramètres qui renvoient, le plus souvent, à ce que nous avons appelé des informations inter-critères ; quelle interprétation donner à de tels paramètres, sur quelles bases, selon quelle démarche peut-on leur attribuer une valeur numérique ?

– **Un problème de qualité** : compte-tenu de la part d'arbitraire que recèle le choix de la fonction V, les valeurs numériques attribuées aux paramètres qu'elle renferme et l'évaluation d'une action a quelconque (performance selon n critères ou modèles plus complexes), comment apprécier le pouvoir discriminant du critère de synthèse ; de façon plus précise, puisque, sauf exception, il est peu réaliste de traiter ce critère comme un vrai-critère, comment peut-on donner des valeurs numériques à des seuils d'indifférence et/ou de préférence ?

Dans ce chapitre, nous avons cherché à rassembler l'essentiel des résultats aujourd'hui disponibles pour aider le praticien à faire face à ces trois problèmes. Force est de constater la pauvreté de cette aide concernant le troisième (cf. 4.3). Cela tient certes à la difficulté du problème mais aussi au fait que, jusqu'à ce jour, la plupart des théoriciens ont regardé, a priori, le critère unique de synthèse comme un vrai-critère. Or, fréquemment, en pratique :

– la forme analytique retenue pour la fonction V n'est qu'une hypothèse de travail parmi d'autres ;

– la signification concrète des paramètres qu'elle renferme est quelque peu confuse et les valeurs numériques qui leur ont été attribuées discutables au sein d'intervalles plus ou moins grands ;

– enfin, les performances qu'il s'agit d'agréger renvoient à des critères qui ne sont pas, eux-mêmes, de vrai-critères.

Chacune des trois raisons qui viennent d'être évoquées vient donc contredire l'hypothèse d'un critère unique de synthèse qui soit un vrai-critère. Il importe de ce fait, à la lumière des particularités de chaque cas concret où cette approche opérationnelle est retenue, de discuter du pouvoir discriminant [1] du critère unique de synthèse afin d'éviter de travailler avec des seuils de préférence et/ou d'indifférence nuls sous le seul prétexte qu'on est embarrassé pour leur donner une valeur non nulle.



Relativement au problème paramétrique, on a vu (cf. notamment 4.2.1.3, 4.4.3, 4.5.3) que, sous des hypothèses bien définies, on pouvait prendre appui sur une technique précise de questionnement pour "estimer" (ou ajuster) la valeur des divers paramètres. Pour parler d'estimation (ou d'ajustement), il faut bien évidemment supposer que le système relationnel de préférences que le critère unique de synthèse décrit existe "quelque part" et puisse être questionné tout en demeurant inchangé par ce questionnement. C'est dire que les fondements théoriques de telles techniques se situent inévitablement dans le cadre d'une démarche descriptive. Cela ne signifie pas pour autant qu'elle soit dépourvue d'intérêt dans le cadre d'une démarche constructive. Certes, on ne peut plus alors parler d'"estimation" (ni d'ajustement) et encore moins de "biais" ou d'"erreur". On peut malgré tout, grâce à de telles techniques, clarifier la signification concrète des valeurs numériques attribuées et tester l'acceptabilité de l'hypothèse de travail qu'elles constituent.

Pour le problème structurel enfin, il existe, comme l'illustrent les résultats 4.2.1, 4.4.3, 4.4.4, 4.5.2, 4.5.3, un certain nombre de travaux qui permettent de justifier les formes analytiques les plus simples. Dans une démarche descriptive, ces résultats doivent permettre d'apprécier si la forme analytique retenue est ou non apte à représenter le système relationnel de préférences supposé pré-existant. Dans une démarche constructive, ils permettent de mettre à jour le type d'hypothèses structurelles qu'il est nécessaire et/ou suffisant d'accepter comme hypothèses de travail pour que la forme analytique considérée puisse être retenue. Ces résultats ont pu paraître un peu compliqués et trop limités à des propriétés d'indépendance. On peut regretter l'absence de résultats utilisables concernant des formes de dépendance susceptibles d'être typées sur des bases relativement simples.

[1] Cf. 1.6.3.

Les concepts, résultats et commentaires du présent chapitre sont susceptibles, dans bien des cas, d'aider à l'élaboration d'un critère unique de synthèse. Il n'en demeure pas moins qu'ils sont complexes et incomplets. Il ne nous paraît pas possible d'en dégager un guide de portée générale auquel l'homme d'étude pourrait se fier lorsqu'il a choisi l'approche opérationnelle du critère unique de synthèse. Quelle que soit la façon de s'y prendre, il importe à notre avis de bien noter, chemin faisant, les principaux facteurs d'imprécision, d'incertitude et d'indétermination qui affectent les options retenues dans chacun des trois problèmes discutés dans cette conclusion. De tels repères sont nécessaires pour que l'homme d'étude puisse effectuer ce que nous appellerons une analyse de robustesse, laquelle est généralement indispensable pour asseoir correctement une recommandation.

Ce que nous entendons précisément par analyse de robustesse sera précisé au 5.4.4. Bornons-nous à préciser que, par là, nous désignons l'ensemble des attendus, calculs et examens critiques qui ont pour objet de mettre en évidence la plus ou moins grande solidité (eu égard à ces facteurs d'imprécision, d'incertitude et d'indétermination) des conclusions dégagées. Elle consiste en particulier à conduire des calculs destinés à mettre à l'épreuve ces conclusions lorsqu'on répercute, sur le critère unique de synthèse, l'impact de variations d'amplitude raisonnable provoqué par l'analyse de tels facteurs. Contrairement à ce qui est pratiqué couramment dans ce qu'on appelle une "analyse de sensibilité", il importe de ne pas seulement faire varier l'un après l'autre et isolément chacun de ces facteurs. Il est indispensable de combiner, de manière suffisamment riche et représentative (mais sans doute pas de toutes les façons possibles), l'impact des différentes sources de variation. On peut ainsi examiner dans quelle mesure, selon que l'on adopte un critère unique de synthèse défini d'une manière ou d'une autre, les résultats obtenus (c'est-à-dire, selon les cas, la meilleure action, les actions situées en tête de classement, le rangement complet des actions ou l'affectation de ces actions à des catégories) s'avèrent relativement stables ou, au contraire, sont modifiés de façon significative. A titre d'illustration, imaginons que l'étude prenne appui sur la théorie de l'utilité espérée et, plus précisément, sur le résultat 4.5.1. Il faudra au



minimum combiner trois types de facteurs :

– la valeur de certaines caractéristiques et peut-être même de la forme analytique des distributions de probabilités car celles-ci découlent plus souvent d'hypothèses ad hoc (destinées à faciliter les calculs ou à se contenter de médiocres informations sur le caractère aléatoire de l'attribut en question) que de considérations objectives ;

– la valeur des caractéristiques et peut-être même les formes analytiques des fonctions d'utilité partielles (mêmes raisons que ci-dessus) ;

– les valeurs attribuées aux coefficients $k_i$ (et au coefficient k qui en découle).

Il faut bien reconnaître qu'une telle analyse de robustesse est souvent lourde et coûteuse. C'est pourquoi on y renonce souvent en pratique [1]. Pourtant, ce n'est qu'au prix de ce genre d'analyse que l'élaboration d'un critère unique de synthèse peut véritablement aider à construire, transformer, justifier des préférences et servir de base de discussion critique pour asseoir une recommandation.

[1] Cf. Roy et Bouyssou (1986).