Chapitre 5

PROCÉDURES D'AGRÉGATION MULTICRITÈRE NON FONDÉES SUR UN CRITÈRE UNIQUE DE SYNTHÈSE (PAMC DE TYPE ELECTRE)

RÉSUMÉ

5.1 Les PAMC dont il est question dans ce chapitre aboutissent à un ou plusieurs systèmes relationnels de préférences pouvant faire intervenir l'incomparabilité et la non transitivité des relations I, S ou P. On examine tout d'abord en quoi ces PAMC (dites de type II) diffèrent de celles étudiées au chapitre précédent (type I) et on explique leur raison d'être.

Les principaux types de modèles de préférences auxquels conduisent les PAMC de type II sont inventoriés au 5.1.1. La diversité de telles procédures est expliquée au 5.1.2 ainsi que les principales raisons qui peuvent amener à opter pour une procédure de type II plutôt que pour une procédure de type I.

5.2 Cette section est consacrée à une présentation des principales PAMC aboutissant à un unique système relationnel de préférences pouvant prendre l'une des formes suivantes : (S, R), (P, I, R), (P, ~), (P, ~, R). Les trois principales procédures étudiées sont ELECTRE I, ELECTRE IS et TACTIC. Pour chacune d'elles, dans un souci d'opérationnalité, on a séparé la présentation des formules (accompagnées du minimum d'explications nécessaires pour pouvoir les appliquer) des commentaires qui permettront au lecteur de comprendre leur raison d'être. Pour d'autres procédures simplement évoquées, le lecteur trouvera les indications bibliographiques nécessaires à leur approfondissement.

5.3 Dans cette section, on traite, avec le même souci d'opérationnalité que dans la section précédente, des PAMC qui aboutissent à plusieurs systèmes relationnels de préférences. Il s'agit de systèmes emboîtés qui font référence à une hiérarchie de crédibilité. Les divers niveaux qui caractérisent cette hiérarchie peuvent être imposés a priori (le nombre des s.r.p. est alors déterminé, cf. 5.3.1) ou appréciés sur une échelle allant de 0 à 1 (le nombre des s.r.p. est alors indéterminé, cf. 5.3.2).

Les principales procédures étudiées concernent :

- au 5.3.1, ELECTRE II et ELECTRE IV ;
- au 5.3.2, PROMETHEE, ELECTRE III et les procédures par compensation probante.

5.4 La construction effective, en vue d'une aide à la décision, de systèmes relationnels du type de ceux dont il est question dans les précédentes sections pose, à l'homme d'étude, un certain nombre de problèmes pratiques auxquelles on s'efforce de répondre dans cette section. Un paragraphe de généralités situe les problèmes. Les deux paragraphes suivants sont respectivement consacrés à la manière dont on peut attribuer des valeurs numériques aux coefficients d'importance et aux seuils de veto. Le dernier paragraphe introduit un concept fondamental en matière d'aide à la décision : celui d'analyse de robustesse. Un schéma pour conduire une telle analyse de robustesse est décrit.

5.5 Cette section aborde un certain nombre de questions théoriques à propos des PAMC présentées dans ce chapitre. On s'y demandera :

- si ces PAMC confèrent certaines "propriétés structurelles" aux systèmes de préférences construits ;
- à quelles conditions ces PAMC peuvent conduire à des systèmes de préférences ayant des propriétés remarquables de transitivité et/ou de complétude ;
- si l'on peut axiomatiser ces PAMC.

5.1 GÉNÉRALITÉS

L'aide à la décision peut prendre appui sur des modèles de préférences globales directement issus d'un critère unique de synthèse. Les techniques de construction de tels modèles, de même que leurs propriétés et leur portée pratique, ont été étudiées au chapitre précédent. Leur origine (critère unique de synthèse) confère à ces modèles de préférence deux particularités :

- ils excluent toute incomparabilité ;
- ils jouissent de ce que nous avons appelé des propriétés remarquables de transitivité.

Ce sont là des qualités qu'il est légitime de rechercher sauf si, pour en jouir, le modèle est exposé à d'autres défauts qui en sont

la contre-partie. L'imprécision, l'incertitude, l'indétermination qui affectent les performances et les informations inter-critères, jointes à la part d'arbitraire inévitable que comportent certaines options ayant trait à la logique d'agrégation, au choix des informations inter-critères, ..., font que le résultat de la comparaison d'une action b à une action a apparaît, selon les cas, comme plus ou moins discutable, plus ou moins fragile. Ce résultat, lorsqu'on a recours à un unique critère de synthèse g, est fondé sur la seule comparaison des deux nombres g(b) et g(a). Quelle que soit la manière dont ces nombres sont établis, cette façon de faire rend toujours possible l'énoncé du résultat en termes de préférence (stricte ou faible) ou d'indifférence (sans jamais avoir à recourir à l'incomparabilité) et cela en respectant automatiquement des propriétés remarquables de transitivité. Il peut de ce fait y avoir une contre-partie négative à cette façon de procéder. On s'expose en effet à masquer la fragilité, voire l'arbitraire, de certains des résultats obtenus. Les préférences et indifférences que le critère unique de synthèse installe de façon nette, même là où il y a ambiguïté et conflit, ne sont-elles pas, dans certains cas tout au moins, davantage le pur produit d'une règle qui, grâce à un mécanisme de transitivité, est apte à combler toute lacune plutôt que le reflet de préférences convenablement raisonnées ?

L'aide à la décision peut également prendre appui sur des modèles de préférences globales conçus, à l'opposé des précédents, de façon à mettre en évidence le caractère plus ou moins solide des jugements de préférence et d'indifférence qu'ils comportent. Ces jugements doivent alors être fondés sur une comparaison qui ne peut être réduite à celle de deux nombres. Pour éviter d'avoir à formuler des jugements trop fragiles, il est indispensable que de tels modèles acceptent les situations d'incomparabilité. Il convient également de ne pas leur imposer d'obligations de transitivité (sous quelque forme que ce soit) afin d'éviter de fabriquer, par enchaînement de résultats isolément acceptables bien que discutables, des jugements d'indifférence ou de préférence réellement mal fondés. De tels modèles ne peuvent évidemment être issus d'un unique critère de synthèse. Le système relationnel de préférences doit être établi directement. C'est pourquoi nous dirons qu'il est issu d'une ou plusieurs relations de synthèse.

Ce sont ces modèles que nous allons étudier dans ce chapitre. Nous mettrons l'accent sur les principales procédures actuellement en usage pour les construire. Nous allons auparavant préciser, en premier lieu, en quoi consistent ces modèles, autrement dit les formes sous lesquelles ils se présentent et, en second lieu, leur domaine d'intérêt de même que les principales raisons de leur diversité.

Dès à présent, il nous faut à nouveau attirer l'attention du lecteur sur une différence importante quant à la manière d'exploiter, pour l'aide à la décision, les deux types de modèles dont il vient d'être question. Lorsque le modèle de préférences globales est issu d'un critère unique de synthèse, la voie pour élaborer une prescription (qu'il s'agisse de choisir, de trier, de ranger) est toute tracée (cf. 3.2.1 d). Nous reviendrons sur ce point au 6.1.). En revanche, lorsque le modèle présente des incomparabilités et/ou certaines formes d'intransitivité, son utilisation en vue de l'aide à la décision nécessite de recourir à certains types de raisonnements, voire, le plus souvent, à des procédures additionnelles. Le chapitre 6 leur sera consacré.

Les procédures d'agrégation multicritère (cf. 3.2.1) auxquelles nous consacrons le présent chapitre s'inscrivent dans le cadre esquissé ci-dessus en vue de fonder le modèle de préférences globales sur des **relations de synthèse**. Nous parlerons à leur sujet de **PAMC de type II**. Nous nous référerons à celles fondées sur un critère unique de synthèse en parlant de **PAMC de type I**.

Soulignons que l'aide à la décision, selon qu'elle est conçue sur une PAMC de type I ou de type II, correspond très exactement à ce que nous avons appelé, au 1.7, une approche opérationnelle AO1 ou AO2. Rappelons que l'aide à la décision peut cependant se concevoir en dehors de toute procédure d'agrégation multicritère explicite et même de tout modèle de préférences globales défini sur A. Cette troisième façon d'envisager l'aide à la décision (approche opérationnelle AO3) sera étudiée au chapitre 7.

Précisons que, dans le cadre de AO2, il n'est pas obligatoire, ni forcément souhaitable, de dissocier, aussi clairement que nous

le faisons avec ce chapitre et le suivant, une première étape constituée par une PAMC suivie d'une seconde destinée à en exploiter le résultat en fonction de la problématique retenue. Certaines méthodes (telles QUALIFLEX, cf. Paelinck (1978) et Ancot (1988)), conçues pour la problématique γ, visent d'emblée à l'explicitation d'un préordre.

Signalons encore que le type de modèles de préférences globales qui caractérisent AO2 (acceptation d'incomparabilités et d'intransitivités) peut fort bien être construit en prenant pour point de départ non pas une famille F de n critères (cas étudié dans le présent chapitre) mais un modèle d'évaluation plus général, moins synthétique, $\Gamma(A)$ [1]. C'est notamment le cas des méthodes proposées par Martel et al. (1986) et D'Avignon et Vincke (1988).

Soulignons enfin qu'une compréhension en profondeur des sections qui suivent nécessite une bonne connaissance des notations et définitions du 3.1.

5.1.1 Objectif des procédures étudiées

Le modèle de préférences globales issu d'une PAMC de type II peut prendre des formes variées. Il peut se réduire à un unique s.r.p. [2] (cf. 5.2) ou en comporter plusieurs (cf. 5.3). Dans ce dernier cas, on peut aisément prendre en compte le fait que la comparaison de deux actions b et a peut aboutir à une affirmation de la forme b H a (H étant l'une des relations pour S, I, P, $\succ$, R, $\sim$, ...) lorsqu'on raisonne sous certaines conditions et à une affirmation sensiblement différente (b H' a) lorsque l'on modifie ces conditions. Autrement dit, en étant plus ou moins exigeant sur la nature et le contenu des arguments capables de conduire à l'acceptation d'une affirmation de type b H a, on peut faire ressortir la plus ou moins grande fragilité de ce résultat. C'est la raison pour laquelle on est conduit à construire plusieurs s.r.p.,

[1] Cf. 1.5 et 4.5.

[2] s.r.p. : abréviation de système relationnel de préférences (cf. 1.4).

lesquels correspondent à des niveaux de crédibilité hiérarchisés. Il est clair que plus la crédibilité est élevée dans cette hiérarchie et plus les cas d'incomparabilité (b R a ou b ~ a) ont tendance à se multiplier. Ces cas s'obtiennent généralement par complémentarité lorsqu'il n'y a pas d'argument fort, pour une relation autre que R ou ~, ni de b vers a, ni de a vers b.

Les s.r.p. auxquels conduisent les PAMC de type II sont habituellement de la forme (S, R), (P, I, R), (≻, I, R), (P, ~) ou (P, ~, R). Des exemples simples de PAMC aboutissant à un unique s.r.p. ayant l'une des formes précédentes ont déjà été présentés au 3.2.2 b) et c). Le lecteur qui les aurait oubliés aurait intérêt à se remettre en mémoire ces PAMC élémentaires avant de poursuivre.

Faisons remarquer que (P, ~) et (P, ~, R) mis à part, les trois autres formes de s.r.p. citées ci-dessus diffèrent avant tout par le contenu sémantique des relations mises en jeu. Aucun obstacle de fond n'empêche de passer de l'une à l'autre. Ce qui les sépare est une question de nuance. Concrètement, l'adoption de l'une des formes (P, I, R) ou (≻, I, R) implique que, dans l'énoncé des conditions ayant valeur de preuve pour asseoir un surclassement ($S = P \cup I$ ou $S = \succ \cup I$), on ait pu établir une différence significative entre les cas de symétrie et ceux d'asymétrie. Cela est nécessaire pour que les cas d'asymétrie b S a et Non(a S b) puissent être regardés comme fort peu compatibles avec l'indifférence. Ces cas d'asymétrie peuvent alors être assimilés soit à une préférence stricte (relation P), soit à une préférence (relation ≻). A contrario, en adoptant la forme (S, R) qui n'oblige pas à analyser séparément les cas de symétrie et ceux d'asymétrie, on admet (conformément à la définition du concept de surclassement [1]) que b S a et Non(a S b) puissent être compatibles avec une situation d'indifférence (cette dernière n'ayant pu être appréhendée plus clairement en raison d'imprécisions, d'incertitudes et d'indéterminations de toute sorte).

Les systèmes (P, ~) et (P, ~, R) diffèrent plus profondément des trois autres. Ils reposent sur la définition d'une relation asymétrique P, autrement dit sur celles des conditions qui légitiment l'affirmation b P a. Ils amalgament, dans la relation ~, les situations d'indifférence avec des situations d'incomparabilité sans aucune possibilité de les séparer. Il est donc difficile, voire impossible, de passer d'un système de la forme (P, ~) ou (P, ~, R) à un système de la forme (S, R).

[1] Cf. 1.4.1.

L'objectif des PAMC étudiées dans ce chapitre peut, dans un certain sens, être vu comme le suivant : pour chacun des couples (b, a) d'actions de A, valider une affirmation de type b H a si les arguments en sa faveur sont jugés suffisamment convaincants ou, au contraire, rejeter une telle affirmation comme insuffisamment justifiée. L'affirmation b H a s'interprète, selon les procédures, comme "b n'est pas pire que a" (b S a) ou "b est significativement meilleure que a" (b P a). Les conditions qui permettent d'affirmer ou d'infirmer le bien-fondé de b H a reposent sur la comparaison des vecteurs de performances $\underline{g}(b)$ et $\underline{g}(a)$ selon une technique propre à chaque procédure. Celles étudiées au 5.2 ont seulement pour objet de savoir si b H a est ou non acceptable dans les conditions considérées. Celles étudiées au 5.3 visent à préciser à quel niveau d'une hiérarchie de crédibilité l'affirmation ci-dessus peut être acceptée.

La quasi-totalité des procédures qui ont été proposées dans le cadre de cette approche opérationnelle AO2 reposent sur la définition d'un ensemble de conditions ou tests à satisfaire pour que l'affirmation b S a ou b P a soit regardée comme établie. Dans le cas le plus simple où l'on a affaire à un s.r.p. unique, la PAMC est entièrement définie par cet ensemble de conditions (c'est le cas d'ELECTRE I ou de TACTIC, cf. 5.2). Lorsque la PAMC conduit à expliciter plusieurs s.r.p., on observe deux façons de procéder (étudiées au 5.3) :

– l'une (cf. ELECTRE II ou ELECTRE IV) consiste à modifier, dans le sens d'une sévérité décroissante, certaines modalités d'application des conditions ou tests de façon à ce que les s.r.p. successifs qui en résultent contiennent de moins en moins de cas d'incomparabilité, les cas de surclassement qui les remplacent étant corrélativement de moins en moins solidement établis ;

– l'autre (cf. ELECTRE III ou PROMETHEE) consiste à apprécier directement, sur une échelle allant de 0 à 1, le niveau de vérification des conditions susceptibles de valider la proposition b S a ou b P a, ce qui amènera à définir un indice de crédibilité de la proposition (on parle dans ce cas de relation floue).

5.1.2 Examen critique

Comme le montrera la suite de ce chapitre, la diversité des PAMC de type II paraît encore plus grande que celle des PAMC de type I étudiées au chapitre 4. Pourquoi cette multiplicité de procédures ? A partir de quel genre d'examen critique l'homme d'étude peut-il opter pour l'une plutôt que pour une autre ? Avant même d'aborder ces questions, il convient de chercher à cerner les cas où le recours à une PAMC de type II est particulièrement justifié.

Les procédures présentées dans la suite de ce chapitre ont toutes été conçues par référence à une famille F contenant **au moins trois critères** et ce n'est même qu'à partir de cinq ou six qu'elles acquièrent leur pleine signification. Par la suite, nous nous placerons donc implicitement dans cette hypothèse. Dès lors que l'une quelconque des conditions énoncées ci-après est remplie, on peut estimer qu'elle constitue un élément de contexte favorable à l'usage d'une PAMC de type II.

CONDITION n° 1 : Parmi les critères, il en est un au moins dont les performances prennent leur valeur dans une échelle "faussement quantitative" qui ne se prête pas bien à la comparaison d'écarts de préférences [1] et qu'il paraît difficile et/ou artificiel de coder de façon à donner un sens, en termes d'écarts de préférences, aux rapports $(g(a) - g(b))/(g(c) - g(d))$.

CONDITION n° 2 : On observe une forte hétérogénéité quant à la nature des performances lorsque l'on passe d'un critère à un autre (exemple : durée, bruit, chaleur, surface, population, risque, ...) rendant difficile et/ou artificiel leur codage en vue de les exprimer en une unité commune.

CONDITION n° 3 : La compensation d'une perte sur un critère donné par un gain sur un autre critère (cf. 3.1.5) s'opère de façon

[1] Nous faisons ici allusion à des critères qui ne sont pas des mesures (cf. 1.6.4 et 4.4), par exemple parce que l'échelle associée n'est pas une échelle d'intervalle (cf. Roberts (1979) ou Vansnick (1990)).

complexe et/ou en liaison avec des systèmes de valeurs entre lesquels la modélisation n'a pas à prendre parti.

CONDITION n° 4 : Certains des critères sont des pseudo-critères et il paraît souhaitable de tenir compte des seuils d'indifférence et/ou de préférence qui leurs sont associés pour obtenir les préférences globales.

En revanche, le recours à une PAMC de type II ne paraît guère justifié dès l'instant où les performances selon chaque critère :

– sont définies ou peuvent être codées sans trop d'arbitraire sur une échelle commune à tous les critères ;
– sont exprimées sur cette échelle de manière à ce que les rapports d'écarts de performances aient un sens en termes de comparaison d'écarts de préférences.

En pratique, il semble que les conditions favorables à l'application des PAMC de type II aille de pair avec des ensembles A ne possédant qu'un nombre limité de ces actions (quelques dizaines, voire quelques centaines). On peut vouloir appliquer ces PAMC à des ensembles A de taille quelconque (notamment dans le cas où $A \subset \mathbb{R}^m$). Cependant, la manière de tirer parti du ou des systèmes de préférences ainsi bâtis n'a guère été étudiée [1].

La diversité des PAMC de type II s'explique par cinq catégories de questions. Nous allons brièvement montrer que chacune d'elles est source d'options variées de la part de l'homme d'étude. La multiplicité des procédures constitue en quelque sorte la réponse du théoricien à cette variété.

a) *Comment les conséquences des actions sont-elles décrites* ? : modèles d'évaluation complexes (comme $\Gamma(A)$, cf. 4.5) ou, au contraire, synthèse en une famille F de n critères ; dans ce dernier cas, F contient-elle des pseudo-critères ou seulement des vrai-critères ?

[1] Voir cependant la méthode PROMETHEE IV dans Brans et al. (1984).

b) *Selon quelle logique et avec quel type de grandeurs caractéristiques prendre en compte le rôle spécifique dévolu à chaque critère* ? : logique compensatoire avec taux de substitution ou logique non compensatoire avec ou sans coefficients d'importance intrinsèques et/ou phénomène de veto.

c) *Quel degré de complexité peut avoir la méthode* ? : il faut ici tenir compte du désir de transparence que peuvent exprimer les utilisateurs, du mode d'utilisation prévu (routinier ou, au contraire, au coup par coup) ainsi que de la place qu'il convient de donner à l'analyse de robustesse (cf. 5.4.4).

d) *Dans quelle problématique doit intervenir la PAMC en question* ? : nous verrons l'importance de ce type de considérations au chapitre suivant ; signalons seulement que si pour P.γ il paraît justifié de travailler avec une PAMC aboutissant à plusieurs s.r.p. (selon le schéma hiérarchisé indiqué plus haut), ceci semble une source de complications difficiles à justifier dans le cadre de P.α car on peut estimer qu'un unique s.r.p. est bien adapté au principe dichotomique de la sélection.

e) *Quelles exigences techniques souhaite-t-on voir remplies par la PAMC* ? : cette question ne peut être davantage précisée ici ; nous l'aborderons au 5.5.

Dans les deux sections suivantes, nous présentons, dans un souci d'opérationnalité, les principales PAMC aboutissant soit à un unique système de préférences (cf. 5.2), soit à plusieurs systèmes de préférences (cf. 5.3). Nous nous bornerons à énoncer les formules fondamentales en les accompagnant d'un minimum de commentaires explicatifs. Les éléments permettant de justifier ces formules ont en effet été présentés, pour la plupart, au 3.1. On consacrera le 5.4 à la manière de mettre en œuvre ces PAMC et, en particulier, d'élaborer les informations inter-critères qu'elles utilisent. Diverses questions plus théoriques seront enfin abordées au 5.5.

5.2 PROCÉDURES ABOUTISSANT À UN UNIQUE SYSTÈME DE PRÉFÉRENCES

Pour cette présentation, il nous a paru commode de séparer les procédures en deux catégories selon que, dans le système de préférences auquel elles aboutissent, l'incomparabilité est ou non clairement séparée de l'indifférence.

5.2.1 Systèmes de type (S, R) ou (P, I, R)

Définir une procédure de ce type équivaut à formuler des conditions faisant intervenir un couple quelconque de vecteurs de performances (g(b), g(a)), conditions qui, dès lors qu'elles sont satisfaites, valident l'affirmation "b S a". Etant donné une paire d'actions {a, b}, il se peut que ces conditions ne soient vérifiées ni par le couple (a, b), ni par le couple (b, a) : les deux actions sont alors incomparables (a R b). La figure 5.2.1 schématise les trois seules autres configurations possibles.

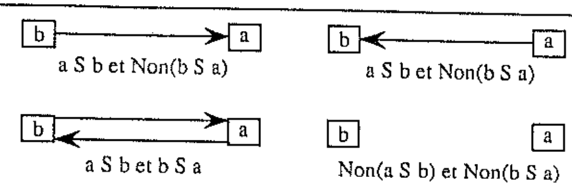

Figure 5.2.1. Configurations possibles dans un s.r.p. de type (S, R) ou (P, I, R)

Dire que le système est de type (P, I, R) plutôt que de type (S, R) équivaut à admettre que b S a et a S b caractérisent l'indifférence (a I b) alors que b S a et Non(a S b) caractérisent la préférence stricte (a P b). Rappelons que ceci ne peut être déduit logiquement de la définition de S (cf. 1.4.1).

En effet, la définition d'une relation de surclassement n'implique nullement que :

– la partie antisymétrique de S ne corresponde qu'au cas de préférence stricte P ;

– la partie symétrique de S corresponde à tous les cas d'indifférence I.

Il ne peut en être ainsi que sous la double hypothèse restrictive suivante :

– il existe une frontière totalement dépourvue d'ambiguïté séparant les situations d'indifférence et de préférence stricte ;
– les conditions qui servent à fonder l'affirmation a S b permettent d'appréhender cette frontière avec exactitude.

Dès lors que l'on met en doute l'existence d'une telle frontière ou notre aptitude à l'appréhender de façon exacte, il faut admettre que la séparation entre indifférence et préférence stricte ne peut pas être totalement significative. Il faut donc prendre en considération une "frange" d'ambiguïté traduisant une "hésitation" entre les deux situations. Elle a conduit Roy (1977) à introduire le concept de préférence faible et à adopter une définition du concept de surclassement [1] qui permettent de s'affranchir de toute hypothèse de séparation significative. Cette définition, en effet, n'implique nullement que les conditions qui servent à fonder l'affirmation a S b cernent avec exactitude une frontière qui séparerait les situations d'indifférence a I b et celles de préférence faible a Q b. En revanche, il devrait en être ainsi si l'on voulait que :

– la partie antisymétrique de S corresponde à la préférence ≻ ;
– la partie symétrique de S corresponde à l'indifférence I.

Avec la définition adoptée, la partie symétrique de S peut toujours [2] être regardée comme représentative des situations d'indifférence. Considérons maintenant une liaison asymétrique a S b et Non(b S a) (rappelons que Non(b S a) n'implique pas a S b). Elle a lieu lorsque les conditions justifient l'affirmation "a n'est pas pire que b" sans pour autant justifier "b n'est pas pire que a". Ces conditions ne sont pas nécessairement aptes à séparer a I b des deux autres situations a Q b, a P b. C'est pourquoi, en présence de la liaison asymétrique considérée, on ne peut affirmer ni a I b, ni Non(a I b) : l'option entre indifférence et préférence reste indéterminée. Toutefois, s'il faut opter entre a et b, la modélisation montre que l'option est favorable à a.

5.2.1.1 Système de préférences dans ELECTRE I (cf. Roy (1968))

La méthode ELECTRE I est ancienne. Nous avons cependant une double raison de préciser ici le système de préférence qu'elle

[1] Cf. 1.4.1, tableau 1.4.2.

[2] Pour plus de précisions sur tous ces points, nous renvoyons à MMCAD, 7.1.3.3.

utilise [1]. La première est d'ordre historique: c'est avec ce système qu'a été ouverte la voie des PAMC de type II. La seconde est d'ordre pédagogique : les formules d'agrégation qui définissent ce système sont parmi les plus simples et elles aident à comprendre les PAMC plus complexes présentées dans cette section et dans la suivante.

a) Formules

Elles s'appliquent au cas où F ne comporte que des vrai-critères. Elles font intervenir, pour chacun d'eux :

– un coefficient d'importance $k_j > 0$ (cf. 3.1.2) ;
– un seuil de veto $v_j(g_j) > 0$ (cf. 3.1.3) [2].

Ce sont là des données "inter-critères" (cf. 3.1.6) que l'on retrouvera dans la plupart des PAMC dont il va être question dans la suite de ce chapitre. La façon de leur attribuer en pratique une valeur numérique (ou plusieurs en vue d'une analyse de robustesse) sera discutée aux 5.4.2 et 5.4.3.

Compte-tenu des hypothèses qui viennent d'être précisées, on peut proposer (en respectant les notations du 3.1.2) :

$$C(b \ S \ a) = \{j \in F : g_j(b) \geq g_j(a)\} \qquad \text{(r.5.2.1)}$$

$$\forall \ C \subset F, \ k[C] = \sum_{j \in C} k_j. \qquad \text{(r.5.2.2)}$$

Dans ELECTRE I, la proposition b S a est regardée comme **valide si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites** :

Condition de concordance :

[1] Rappelons qu'une forme plus générale a déjà été présentée au 3.2.2 c).

[2] Dans la version originelle de la méthode, ce seuil était constant.

$$\frac{k[C(b\ S\ a)]}{k[F]} \geq s, \qquad \text{(r.5.2.3)}$$

$$1/2 \leq s \leq 1 - \frac{\min_{j \in F} k_j}{k[F]}.$$

Condition de non veto :

$$\forall\ j \in F,\ g_j(b) + v_j[g_j(b)] \geq g_j(a). \qquad \text{(r.5.2.4)}$$

La valeur s est ce que nous appellerons le **niveau exigé de concordance** (en abrégé, niveau de concordance) [1]. Pour des raisons tout-à-fait particulières, sa valeur peut être choisie hors de l'intervalle indiqué.

b) Commentaires

Les conditions (r.5.2.3) et (r.5.2.4) ne sont que la formulation, dans le cadre des hypothèses adoptées, des deux exigences suivantes :

EXIGENCE n° 1 : Pour valider la proposition b S a, il est nécessaire qu'une majorité "suffisamment importante" de critères soit favorable à cette proposition,
EXIGENCE n° 2 : Pour valider la proposition b S a, il est nécessaire que, parmi la minorité des critères qui s'opposent à cette proposition, aucun d'eux ne mette son veto,

qui reprennent des considérations présentées aux 3.1.2 et 3.1.3.

Il est facile de constater, les formules présentées plus haut ne reposant que sur l'importance relative des coalitions, que multiplier par une constante tous les coefficients d'importance ne change pas le système de préférences produit par ELECTRE I. Il n'est pas restrictif, en pratique, de supposer que les coefficients

[1] La dénomination "seuil" (au lieu de "niveau") de concordance a souvent été employée ; nous l'éviterons afin de ne pas créer de confusion avec d'autres seuils.

d'importance sont rationnels. Après multiplication par une constante, on peut donc les supposer tous entiers. Le coefficient k_j peut donc s'interpréter comme le nombre de voix attribuées au critère j dans le cadre d'une procédure de vote. Le niveau exigé de concordance s s'interprète alors comme un niveau de majorité exigé (majorité simple pour s = 1/2, majorité des deux tiers pour s = 2/3, etc.).

Dès que s dépasse la valeur s^* :

$$s^* = 1 - \frac{\min_{j \in F} k_j}{k[F]},$$

la condition (r.5.2.3) équivaut à requérir l'unanimité, c'est-à-dire C(b S a) = F ((r.5.2.4) est donc automatiquement vérifiée). Dans ce cas, F se confond avec la dominance Δ_F. Il s'ensuit que :

$s > s^* \Rightarrow$ S transitive.

La relation S étant réflexive par construction, le s.r.p. (S, R) a alors une structure de préordre partiel (cf. 1.4.2 c)). Lorsqu'on abaisse le niveau exigé de concordance s, la relation S s'enrichit progressivement en ce sens que b R a peut être remplacée par b S a et que b S a et Non(a S b) peuvent être remplacées par b S a et a S b. Corrélativement, des intransitivités peuvent apparaître. Elles peuvent revêtir l'une des deux formes suivantes :

c S b, b S a, c R a,
c S b, b S a, a S c, Non(a S b), Non(b S c) et Non(c S a).

La seconde correspond à une manifestation de ce que l'on appelle l'**effet Condorcet**. Pour en avoir une illustration, le lecteur pourra reprendre l'exemple numérique du tableau 3.2.2 avec $k_1 = k_2 = k_3 = 1$, $v_1 = v_2 = v_3 = 4$ et s = 1/2.

5.2.1.2 Système de préférences dans ELECTRE IS (cf. Roy et Skalka (1984))

La PAMC sur laquelle s'appuie ELECTRE IS est une extension de la précédente visant à prendre en compte :

– d'éventuels seuils d'indifférence et de préférence non nuls pour certains des critères de F et, corrélativement,

– un renforcement de l'effet de veto lorsque l'importance de la coalition concordante décroît.

Comme c'était déjà le cas avec ELECTRE I, soulignons que, pour un critère quel qu'il soit, on peut toujours supprimer l'effet de veto : il suffit pour cela de donner une valeur assez grande au seuil de veto v_j.

a) Formules

Elles s'appliquent au cas où les n critères de F sont des pseudo-critères, chacun étant muni d'un coefficient d'importance et d'un seuil de veto. Tous les seuils (indifférence, préférence et veto) peuvent varier le long de l'échelle du critère. Notons, en conformité avec ce qui a été fait au 3.1.2 :

$$C(b\ S\ a) = \{j \in F : g_j(b) + q_j[g_j(b)] \geq g_j(a)\} \qquad (r.5.2.5)$$

$$C(a\ Q\ b) = \{j \in F : g_j(b) + q_j[g_j(b)] < g_j(a) \leq g_j(b) + p_j[g_j(b)]\} \qquad (r.5.2.6)$$

$$k[C(b\ S\ a), C(a\ Q\ b)] = \sum_{j \in C(bSa)} k_j + \sum_{j \in C(aQb)} \varphi_j \cdot k_j$$

$$\text{avec : } \varphi_j = \frac{g_j(b) + p_j[g_j(b)] - g_j(a)}{p_j[g_j(b)] - q_j[g_j(b)]}. \qquad (r.5.2.7)$$

Le coefficient φ_j décroît linéairement de 1 jusqu'à 0 lorsque $g_j(a)$ décrit l'intervalle $[g_j(b) + q_j(g_j(b))\ ;\ g_j(b) + p_j(g_j(b))]$.

Dans ELECTRE IS, la proposition b S a est regardée comme **valide si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :**

Condition de concordance :

$$c(b, a) = \frac{k[C(b\ S\ a), C(a\ Q\ b)]}{k[F]} \geq s, \qquad (r.5.2.8)$$

$$1/2 \leq s \leq 1 - \frac{\min_{j \in F} k_j}{k[F]}.$$

Condition de non veto [1] **:**

$$g_j(b) + v_j[g_j(b)] \geq g_j(a) + q_j[g_j(a)] \cdot w[s, c] \qquad (r.5.2.9)$$

$$\text{avec } w[s, c] = \frac{1 - c(b, a) - [k_j/k[F]]}{1 - s - [k_j/k[F]]}.$$

Pour des raisons tout-à-fait particulières, la valeur s du niveau exigé de concordance peut être choisie hors de l'intervalle indiqué.

b) Commentaires

Pour faire comprendre ce qu'expriment les formules ci-dessus (en relation avec la généralisation annoncée), on comparera successivement (r.5.2.8) à (r.5.2.3) et (r.5.2.9) à (r.5.2.4).

La formule (r.5.2.8) fait intervenir la coalition C(b S a) (tout comme (r.5.2.3)) ; si les seuils d'indifférence sont nuls, (r.5.2.5) coïncide avec (r.5.2.1) mais, à côté de cette première coalition, intervient également la coalition C(a Q b). Celle-ci regroupe les critères (s'il en existe pour les actions considérées) qui, sans être en concordance avec la proposition b S a, ne sont pas pour autant en discordance avec elle. Pour de tels critères, la comparaison des performances $g_j(b)$ et $g_j(a)$ est ambiguë en ce sens qu'elle conduit à une hésitation entre l'acceptation claire et le rejet net de la proposition b S a. Il est donc normal de faire intervenir ces critères lorsqu'on cherche à apprécier l'importance de la sous-

[1] Cette condition suppose que $q_j(g_j(a)) \leq v_j(g_j(a)) - p_j(g_j(a))$, $\forall$ a $\in$ A et $\forall$ j $\in$ F. Si tel n'était pas le cas, il faudrait remplacer $q_j(g_j(a))$ par $Min(q_j(g_j(a))\ ;\ v_j(g_j(a)) - p_j(g_j(a)))$ dans la condition. Dans Roy et Skalka (1984) décrivant la version initiale d'ELECTRE IS, on a $w(s, c) = (1 - c(b, a))/(1 - s)$; les commentaires du b) ci-après montrent en toute rigueur que le terme $- k_j/k[F]$, qui a été ajouté au numérateur et au dénominateur, est nécessaire si l'on veut être parfaitement cohérent avec la définition du veto.

famille des critères favorables à l'acceptation de la proposition b S a (voir l'exigence n° 1 du 5.2.1.1 b) ; le problème ne se posait pas avec ELECTRE I puisque l'on raisonnait avec des vrai-critères). Voyons maintenant de quelle façon ELECTRE IS fait intervenir les critères en question.

Le critère j sort de C(b S a) pour entrer dans C(a Q b) (voir (r.5.2.6)) dès que $g_j(a) > g_j(b) + q_j[g_j(b)]$. Un raisonnement qualitatif élémentaire conduit à juger d'autant plus normal de prendre en compte le critère j pour apprécier l'importance de la sous-famille de critères considérée que $g_j(a)$ est plus proche de $g_j(b) + q_j[g_j(b)]$. Si l'on continue à faire croître $g_j(a)$, le critère j sort de C(a Q b) dès que $g_j(a) > g_j(b) + p_j[g_j(b)]$. A partir de ce moment, il doit cesser d'intervenir pour apprécier l'importance de la sous-famille considérée. Une façon de prendre en compte l'ambiguïté de la position des critères de C(a Q b) consiste à ne les faire intervenir dans le calcul d'importance que pour une fraction φ_j de leur coefficient d'importance propre k_j. Compte-tenu de ce qui précède, φ_j doit tendre vers 1 lorsque $g_j(a)$ tend, par valeur supérieure, vers $g_j(b) + q_j[g_j(b)]$ et décroître progressivement pour s'annuler lorsque $g_j(a) = g_j(b) + p_j[g_j(b)]$. Il en est bien ainsi avec (r.5.2.7). Certes, le choix d'une décroissance linéaire peut paraître arbitraire mais tout autre choix (et ceci est inhérent au caractère ambigu de la zone de préférence faible) serait au moins aussi arbitraire et forcément plus complexe.

Finalement, l'importance de la sous-famille des critères favorables à b S a est appréciée par k[C(b S a), C(a Q b)] définie par (r.5.2.7) sur la base d'une première sommation identique à celle de (r.5.2.2) et d'une seconde fondée sur les considérations qui précèdent immédiatement.

Venons-en maintenant à la comparaison entre (r.5.2.9) et (r.5.2.4).

Considérons tout d'abord le cas C(b S a) = F\{j}. On remarquera qu'il faut précisément se référer à ce cas pour définir le veto v_j (cf. 3.1.2). D'après (r.5.2.7), il vient :

$$k[C(b\ S\ a), C(a\ Q\ b)] = k[F] - k_j.$$

Dans ces conditions, on constate que, dans (r.5.2.9), le terme w(s, c) s'annule et que, par conséquent, la condition de non veto cesse d'être satisfaite à partir du moment où :

$$g_j(b) + v_j[g_j(b)] < g_j(a) \text{ avec } C(b\ S\ a) = F\backslash\{j\}.$$

Cette dernière condition n'est autre que (r.3.1.6), laquelle coïncide avec (r.5.2.4) si $v_j[g_j(b)] = v_j$.

Comme nous l'avons indiqué plus haut, dans ELECTRE IS, on a cherché à renforcer l'effet de veto lorsque l'importance de la coalition concordante décroît, c'est-à-dire devient inférieure à son maximum $k[F] - k_j$. Renforcer l'effet de veto signifie que le surclassement b S a peut être refusé avant même que $g_j(b) + v_j[g_j(b)]$ devienne inférieur à $g_j(a)$. Il en sera ainsi si l'on adopte une condition de non veto de la forme :

$$g_j(b) + v_j[g_j(b)] \geq g_j(a) + W[s, c(b, a)]$$

$$\text{avec } c(b, a) = \frac{k[C(b\ S\ a), C(a\ Q\ b)]}{k[F]}.$$

La quantité W[s, c] (destinée à renforcer l'effet de veto) doit, d'après ce qui précède, croître depuis 0 jusqu'à un maximum w_m lorsque c décroît de son maximum $1 - k_j/k[F]$ jusqu'à s (valeur en-dessous de laquelle la condition de concordance n'étant plus satisfaite, on cesse de s'intéresser à la condition de non veto). Pour des raisons de simplicité, nous avons adopté un mode de décroissance linéaire, ce qui donne :

$$W[s, c] = w_m \cdot \frac{1 - c(b, a) - k_j/k[F]}{1 - s - k_j/k[F]} = w_m \cdot w(s, c).$$

Le terme W[s, c], qui concrétise l'effet de renforcement du veto, venant s'ajouter à $g_j(a)$, il nous a paru naturel de lier son maximum w_m à la plus ou moins grande imprécision qui entache la valeur de la performance $g_j(a)$. Afin de limiter l'impact de cet effet de renforcement, nous avons posé $w_m = q_j[g_j(a)]$ mais on aurait pu choisir une valeur plus élevée, pourvu toutefois qu'elle reste inférieure à $v_j[g_j(b)] - p_j[g_j(b)]$ (il serait en effet incohérent que le veto provienne d'un critère non discordant ; ceci explique la note de bas de page sur la condition de non veto (r.5.2.9)).

Soulignons, pour achever ces commentaires, que $s > s^*$ conduit à une relation de surclassement S^* qui ne peut être validée que si aucun critère n'est discordant. C'est dire que les valeurs attribuées aux seuils de veto ne jouent plus aucun rôle. Lorsque S ne renferme que des quasi-critères, on a $S^* = S_\Delta$ (cf. 3.1.4). Dans ces conditions, à moins que S ne renferme que des vrai-critères, S^* n'est généralement pas transitive. Quelle que soit la valeur donnée à s, les intransitivités peuvent ici encore revêtir les deux formes décrites au 5.2.1.1 b) à propos d'ELECTRE I. Précisons enfin que lorsque b S a est validée pour une valeur s_0 du niveau de concordance, alors b S a est forcément validée pour toute valeur s supérieure à s_0.

5.2.1.3 Autres systèmes de préférences

On peut bien évidemment imaginer des PAMC autres qu'ELECTRE I ou ELECTRE IS qui conduisent à un système de préférences de type (S, R) ou (P, I, R). Nous nous bornerons ici à citer, sans en donner une formulation précise, deux procédures intéressantes aboutissant à des s.r.p. pouvant être rangés dans le cadre étudié.

La première, proposée par Rochat, a déjà été introduite aux 3.2.2 b) et c). Le système de préférences est de type (P, I, R) (ou (P, I) en l'absence de condition de non veto). Nous reviendrons sur le système de préférences ainsi bâti au 5.2.2.1 pour montrer que la relation d'indifférence ainsi bâtie recouvre aussi des situations d'incomparabilité (il est donc plus correct de remplacer dans ces systèmes I par ~). La procédure ORESTE, proposée par Roubens (1982), peut également être rangée dans ce cadre. Dans sa version initiale, elle s'applique à une famille F ne comprenant que des vrai-critères mais, contrairement à ELECTRE I, elle ne fait pas appel à des coefficients d'importance k_j : l'importance relative accordée à chaque critère est néanmoins prise en compte sur la base d'un préordre complet (simple rangement des critères par ordre d'importance décroissante). Enfin, une condition de non veto peut être introduite (cf. Pastijn et Leysen (1989)). Soulignons que ORESTE diffère d'une PAMC lexicographique (cf. 3.2.2 a)) bien que les conditions d'application soient identiques.

5.2.2 Systèmes de type (P, ~) et (P, ~, R)

Les systèmes de préférences dont il va être question ici sont le fruit de PAMC qui cherchent avant tout à séparer les situations de préférence stricte des autres. Dans ces procédures, les autres situations en question sont l'indifférence et l'incomparabilité

(conçues avant tout pour des vrai-critères ou des quasi-critères, ces procédures ignorent les situations de préférence faible). Définir une procédure de ce type équivaut donc à formuler des conditions faisant intervenir (comme au 5.2.1) un couple quelconque de vecteurs de performances (g(b), g(a)), conditions qui, dès lors qu'elles sont satisfaites, valident l'affirmation b P a.

Etant donné une paire d'actions {a, b}, il se peut que les conditions formulées ne soient vérifiées ni par le couple (a, b), ni par le couple (b, a). Cela valide donc l'une des deux affirmations a I b ou a R b sans que l'on puisse pour autant (hors de toute considération additionnelle) savoir laquelle des deux.

Dans ces conditions, P étant asymétrique, trois configurations seulement sont possibles [1] (et non plus quatre comme précédemment, voir figure 5.2.1) :

a P b, b P a, a ~ b.

Lorsque les conditions requises ne valident ni a P b ni b P a, il se peut que la façon dont ces conditions sont violées soit incompatible avec a I b. En explicitant de tels cas, on peut valider clairement des situations d'incomparabilité. Toutefois, la relation R qui se trouve ainsi définie ne permet pas, dans les procédures dont il va être question, d'affirmer que :

Non(a P b), Non(b P a) et Non(a R b) $\Rightarrow$ a I b.

C'est pourquoi les systèmes ainsi construits, en isolant certains cas d'incomparabilité, sont de type (P, ~, R) et non de type (P, I, R).

[1] Rappelons que ~ désigne précisément la relation de non préférence définie par Non(a ≻ b) et Non (b ≻ a). En l'absence de préférence faible, ceci équivaut à Non(a P b) et Non(b P a), cf. 1.4.1.

5.2.2.1 Systèmes de préférences dans TACTIC (cf. Vansnick (1986b))

a) Formules [1]

Elles s'appliquent au cas où F ne comporte que des vrai-critères ou des quasi-critères. Tout comme les méthodes ELECTRE, elles font intervenir, pour chaque critère, un coefficient d'importance $k_j > 0$. Nous distinguerons deux cas :

– aucun critère ne peut mettre son veto à la préférence stricte : le système obtenu est alors du type (P, ~) ;
– pour un critère au moins, on introduit un seuil de veto v_j (défini ici à la façon du 3.1.3 mais par référence à la relation P et non à la relation S) : le système obtenu est alors du type (P, ~, R).

Dans le cadre des hypothèses ci-dessus et conformément aux notations du 3.1.2, posons :

$$C(b\ P\ a) = \{j \in F : g_j(b) > g_j(a) + q_j(g_j(a))\} \qquad \text{(r.5.2.10)}$$

et, comme dans ELECTRE I (cf. (r.5.2.2)) :

$$\forall\ C \subset F : k[C] = \sum_{j \in C} k_j.$$

Dans le système de type (P, ~) de TACTIC, la proposition b P a est regardée comme valide si et seulement si la condition suivante est satisfaite :

Condition de concordance :

$$k[C(b\ P\ a)] > \rho \cdot k[C(a\ P\ b)], \qquad \text{(r.5.2.11)}$$

[1] TACTIC a essentiellement été développée en tant que PAMC. Cette méthode n'ayant pas donné lieu à une procédure d'exploitation spécifique, sa mise en œuvre dans le cadre d'une problématique particulière ne fera pas l'objet d'un paragraphe au chapitre 6.

$$1 \leq \rho \leq \frac{k[F]}{\min_{j \in F} k_j} - 1.$$

Le coefficient ρ sera encore appelé niveau exigé de concordance. Sa valeur peut ici encore être choisie, pour des raisons très particulières, hors de l'intervalle indiqué.

Dans le système (P, ~, R) de TACTIC, l'affirmation b P a n'est regardée comme validée que si, en plus de la condition de concordance (r.5.2.11), la condition de non veto ci-après (identique à celle d'ELECTRE I, cf. (r.5.2.4)) est satisfaite :

Condition de non veto :

$$\forall\ j \in F,\ g_j(b) + v_j[g_j(b)] \geq g_j(a).$$

S'il existe un critère j qui viole cette condition alors que (r.5.2.11) est vérifiée, on considère que l'incomparabilité b R a est validée. Il s'ensuit que l'on a b ~ a si et seulement si (r.5.2.11) est en défaut aussi bien avec le couple (b, a) qu'avec le couple (a, b).

b) Commentaires

La condition de concordance (r.5.2.11) proposée par Vansnick (1986b) pour fonder le système de préférences dans TACTIC diffère de celle (r.5.2.3) servant à fonder le système de préférences dans ELECTRE I sur deux points (du moins en apparence) :

Première différence : La proposition que l'on cherche à valider n'est plus b S a mais b P a.

Seconde différence : Pour valider la proposition étudiée, on ne prend plus appui sur l'existence d'une majorité suffisamment importante favorable à cette proposition [1] mais sur l'exigence n° 3 ci-après :

[1] Cf. exigence n° 1 au 5.2.1.1 b).

EXIGENCE n° 3 : Pour valider une proposition (b P a, b S a, ...), il est nécessaire d'avoir un rapport de force (ou d'importance) suffisamment élevé entre d'une part les critères qui sont pour la proposition étudiée et, d'autre part, ceux qui sont contre, ces derniers étant définis comme étant ceux qui sont pour une proposition contradictoire (laquelle peut être distincte de la négation de la proposition étudiée).

Les reformulations qui suivent de (r.5.2.3) et (r.5.2.11) vont nous conduire à montrer que la seconde différence est plus formelle que réelle.

Lorsque :

- F ne comporte que des quasi-critères et
- k[C] est défini par (r.5.2.2),

il vient, $\forall$ a, b $\in$ A :

$$k[F] = k[C(b\ P\ a)] + k[C(b\ I\ a)] + k[C(a\ P\ b)].$$

Prenant appui sur cette égalité, il est facile de prouver que la condition de concordance (r.5.2.3) peut être récrite comme suit :

$$k[C(b\ S\ a)] \geq \frac{s}{1-s}\, k[C(a\ P\ b)]. \qquad \text{(r.5.2.12)}$$

Ainsi récrite, la condition de concordance d'ELECTRE I peut être vue comme une mise en forme de l'exigence n° 3 (les critères contre b S a étant ici ceux qui sont pour la négation de cette proposition).

De façon symétrique, il est facile de montrer que (r.5.2.11)) peut être récrite comme suit :

$$\frac{k[C(b\ P\ a)]}{k[F] - k[C(b\ I\ a)]} > \rho/(1+\rho). \qquad \text{(r.5.2.13)}$$

Ainsi reformulée, la condition de concordance de TACTIC peut être vue comme une mise en forme de l'exigence n° 1 (cf. 5.2.1.1 b)) : la majorité que doivent constituer les critères favorables à b P a devant ici être calculée compte non tenu des critères pour lesquels il y a indifférence entre b et a (autrement dit, dans la procédure de vote, ces derniers critères correspondent à des cas d'abstention ou de votes nuls). Faisons remarquer que cette modification par rapport à ELECTRE I du mode de définition de la majorité n'aurait pas eu lieu

si, au second membre de (r.5.2.11), on avait fait intervenir, à la place de a P b, la négation de la proposition étudiée (c'est-à-dire a S b).

On peut donc dire que, dans TACTIC, le système de préférences consiste à valider la proposition b P a sur la base d'une exigence de même nature que celle (exigence n° 1 du 5.2.1.1 b)) servant, dans ELECTRE I, à valider b P a. Le fait que la validation porte sur la préférence stricte et non sur le surclassement constitue donc la différence essentielle entre les PAMC d'ELECTRE I et de TACTIC. En particulier, cela rend difficile d'isoler, dans cette dernière, les situations d'incomparabilité des situations d'indifférence.

Dès que ρ atteint la valeur ρ^* :

$$\rho^* = \frac{k[F]}{\min_{j \in F} k_j} - 1 = \frac{s^*}{1-s^*},$$

la condition (r.5.2.11) équivaut à requérir l'absence de "contre", c'est-à-dire C(a P b) = $\varnothing$ (la condition de non veto (r.5.2.4) est alors automatiquement vérifiée). Dans (P, ~) comme dans (P, ~, R), lorsque $\rho > \rho^*$, il vient :

$$\begin{aligned} b\ P\ a \Leftrightarrow\ & g_j(b) > g_j(a) - q_j(g_j(a)),\ \forall\ j \in F \text{ et} \\ & \exists\ h \in F \text{ tel que } g_h(b) > g_h(a) + q_h(g_h(a)). \end{aligned}$$

Lorsqu'on abaisse le niveau exigé de concordance ρ, la relation P s'enrichit en ce sens que b ~ a peut être remplacée soit par b P a, soit par a P b.

Si tous les seuils q_j sont nuls, la relation P est transitive pour $\rho > \rho^*$. Lorsqu'on abaisse ρ, des intransitivités de deux formes peuvent apparaître :

- c P b, b P a, c ~ a (ou c R a) ;
- c P b, b P a, a P c.

Cette seconde forme a déjà été illustrée pour ρ = 1 par l'exemple numérique du tableau 3.2.2 avec $k_1 = k_2 = k_3 = 1$.

Le lecteur a probablement remarqué qu'en posant $\rho = 1$ dans les formules du a), on retrouve tout d'abord, avec le système de type (P, ~), la procédure concordance élémentaire de type Rochat (cf. 3.2.2 b)) ; ensuite, avec le système de type (P, ~, R), la procédure concordance-discordance élémentaire de type Rochat (cf. 3.2.2 c)). Toutefois, dans les deux paragraphes auxquels nous renvoyons, nous avons remplacé la relation de non préférence ~ par la relation d'indifférence I (cela en vue de nous conformer à la présentation de Rochat). En fait, aussi bien pour $\rho = 1$ que pour $\rho > 1$, la relation définie au a) ci-dessus (en l'absence ou en présence de veto, ceci importe peu) recouvre indistinctement des situations d'indifférence et d'incomparabilité. L'exemple suivant suffit à le bien montrer.

Supposons que $n = 2h$ et que, pour deux actions b et a, on ait :

$$g_j(b) - g_j(a) = u_j > q_j \text{ pour } j = 1, \ldots, h,$$
$$g_j(a) - g_j(b) = w_j > q_j \text{ pour } j = h + 1, \ldots, 2h.$$

Il s'ensuit que :

$$k[C(b\ P\ a)] = k_1 + \ldots + k_h,$$
$$k[C(a\ P\ b)] = k_{h+1} + \ldots + k_{2h}.$$

Supposons enfin que, compte-tenu de la valeur de ρ choisie, (r.5.2.11) ne soit vérifiée ni par le couple (b, a), ni par le couple (a, b). Si les écarts u_j et w_j sont tous de faible ampleur, même dans une procédure de type II qui ne se veut pas compensatoire, l'affirmation b I a peut paraître justifiée. Il en va tout autrement lorsque certains des écarts u_j et/ou w_j atteignent des valeurs élevées bien qu'inférieures à un éventuel veto : la seule affirmation possible est alors b R a (à moins d'introduire une information inter-critère plus riche et de remettre également en cause la manière de valider P).

5.2.2.2 Systèmes de préférences dans les procédures d'écrémage

Lorsque l'ensemble A contient un grand nombre d'actions (plusieurs centaines par exemple), on cherche généralement, avant l'application d'une PAMC plus sophistiquée, à éliminer de A toutes les actions qui sont manifestement mauvaises ou inadéquates (à propos desquelles il semble inutile de vouloir construire un effort d'analyse plus poussée). On a alors recours à des procédures dites d'**écrémage** [1]. Ces procédures visent à opérer une dichotomie de A : $A = B \cup C$ ($B \cap C = \emptyset$) avec :

$b \in B \Rightarrow$ b n'est pas éliminable à partir des critères de F,
$c \in C \Rightarrow$ c est éliminable à partir des critères de F.

De telles procédures prennent donc appui (de façon non nécessairement explicite mais il importe néanmoins d'en tenir compte lorsqu'on conçoit [2] F) sur un système de préférences de type (P, ~) défini par :

$$b \in B \text{ et } c \in C \Leftrightarrow b\ P\ c,$$
$$b \in B \text{ et } b' \in B \Rightarrow b \sim b',$$
$$c \in C \text{ et } c' \in C \Rightarrow c \sim c'.$$

Ces procédures, en raison du désir de simplicité qui est à leur origine, ne sont pas fondées sur une comparaison par paires [3] mais sur une comparaison des performances des actions à des **niveaux d'aspiration** [4].

Notons g_j^{asp} le niveau d'aspiration associé au critère j. Il est souvent difficile d'attribuer une valeur numérique à un tel niveau sans tenir compte de la manière dont il est combiné au niveau d'aspiration des critères autres que j pour définir le système de préférences (P, ~). Deux modes de combinaisons extrêmes, qualifiés de conjonctifs et disjonctifs, sont couramment pris en considération. Dans le mode conjonctif, $b \in B$ si et seulement si la performance de b sur chaque critère atteint ou dépasse le niveau d'aspiration. Dans le mode disjonctif, il suffit que, sur un critère, la performance de b atteigne ou

---

[1] En anglais "screening".

[2] Les conditions qui suivent autorisent en particulier l'emploi de critères assez frustes permettant un calcul des performances à peu de frais, ce qui importe eu égard au grand nombre d'actions à traiter.

[3] On verra au 6.1.2 la difficulté qu'il y a à fonder une procédure d'écrémage simple sur la base de comparaisons par paires.

[4] Cela dans la ligne des travaux de Simon sur le concept de "satisfecum" et de "rationalité limitée" (cf. Simon (1955)) ; voir aussi Jacquet-Lagrèze (1981). Ces niveaux d'aspiration ne sont pas sans liens avec les niveaux d'exigence minimale que nous introduirons au 7.2.

dépasse le niveau d'aspiration pour que l'on pose b ∈ B. Dans ces modes de comparaison, la relation P est donc telle que :

Mode conjonctif : $b \, P \, c \Leftrightarrow \forall j \in F : g_j(b) \geq g_j^{asp}$, $\exists j \in F : g_j(c) < g_j^{asp}$ (r.5.2.14)

Mode disjonctif : $b \, P \, c \Leftrightarrow \exists j \in F : g_j(b) \geq g_j^{asp}$, $\forall j \in F : g_j(c) < g_j^{asp}$ (r.5.2.15)

Faisons tout d'abord observer que les systèmes de préférences définis par (r.5.2.14) et (r.5.2.15) mettent en défaut l'axiome de cohésion (cf. 2.2.2) auquel doit normalement satisfaire une famille cohérente F. Cela souligne à nouveau le fait que F doit être conçue par référence au système de type (P, ~) sur lequel s'appuie la procédure d'écrémage.

Faisons ensuite remarquer que, dans les deux modes extrêmes considérés, le niveau d'aspiration g_j^{asp} opère de façon isolée, c'est-à-dire indépendamment des performances selon les critères autres que j. On peut contourner cette difficulté en définissant des **systèmes de niveaux d'aspiration g_J^{asp} pour diverses sous-familles $J \subset F$ et non pas, comme nous l'avons fait, uniquement pour les sous-familles réduites à un unique critère.** Toute une gamme de possibilités s'offrent alors selon que l'on choisit le mode conjonctif ou le mode disjonctif au niveau d'une part de chaque sous-famille, d'autre part de l'ensemble des sous-familles (cf. Fishburn (1978)). Ce faisant, on perd la simplicité recherchée et on ne facilite pas pour autant le raisonnement permettant de choisir, en pratique, les valeurs à attribuer aux niveaux d'aspiration.

Soulignons enfin que rien n'oblige à considérer les niveaux d'aspiration comme des données dont la valeur est fixée préalablement à l'application de la procédure d'écrémage. Ces procédures gagnent au contraire de l'intérêt lorsqu'on raisonne la valeur à donner aux niveaux d'aspiration dans le cadre d'une approche opérationnelle interactive (cf. 7.1), comme c'est par exemple le cas dans la méthode PRIAM (cf. 7.3.2 f)).

5.3 PROCÉDURES ABOUTISSANT À PLUSIEURS SYSTÈMES DE PRÉFÉRENCES

Les procédures d'agrégation dont il va être question font intervenir, comme au 5.2, des conditions à satisfaire pour valider des propositions telles que b S a ou b P a mais cette validation ne se fera plus en termes de vrai ou faux. Elle va être raisonnée par référence à une hiérarchie de crédibilité. Les divers niveaux qui caractérisent cette hiérarchie peuvent être imposés a priori : à chacun d'eux est associé un système de préférences d'autant plus pauvre en incomparabilité que le niveau de crédibilité s'abaisse (cf. 5.3.1). On peut, au contraire (cf. 5.3.2), chercher à apprécier directement, sur une échelle allant de 0 à 1, le niveau de crédibilité avec lequel l'affirmation en question est validée.

5.3.1 Cas où le nombre des systèmes est imposé

Le niveau exigé de concordance, s dans ELECTRE I ou IS, tout comme ρ dans TACTIC, est un paramètre qui, dans les procédures présentées au 5.2, recevait une valeur fixée (même si, ensuite, on peut être amené à la faire varier dans une analyse de robustesse). On peut définir une hiérarchie de crédibilité en fixant non plus une seule valeur mais une séquence telle que :

$$s^1 > s^2 > \dots > s^h.$$

En reportant successivement ces h valeurs dans une condition de concordance ((r.5.2.3) ou (r.5.2.8)), on obtient, après prise en compte des conditions de non veto correspondantes ((r.5.2.4) ou (r.5.2.9)), une séquence de h systèmes de préférences (de type ELECTRE I ou ELECTRE IS [1]) que l'on qualifiera d'**emboîtés** pour traduire le fait que (avec des notations évidentes) :

$$S^1 \subset S^2 \subset \dots \subset S^h.$$

On a vu en effet au 5.2.1 que, lorsque s diminue, la relation S ne peut que s'enrichir. La première des procédures dont il va être question ci-après découle directement des considérations précédentes.

Faire varier (comme dans ELECTRE II, cf. 5.3.1.1 ci-après) un niveau exigé de concordance n'est pas la seule façon d'introduire une hiérarchie de crédibilité. ELECTRE IV (cf. 5.3.1.2) fournira l'occasion d'en présenter une autre. Précisons dès à présent que cette dernière procédure se distingue aussi des autres par le fait que, sans prendre appui pour autant sur une hypothèse

[1] Faisons observer que tout ce qui précède se transpose intégralement à TACTIC en changeant s en ρ et S en P.

d'égale importance des n critères, elle ne fait pas intervenir de coefficients du type k_j pour codifier cette importance [1].

5.3.1.1 Systèmes de préférences dans ELECTRE II (cf. Roy et Bertier (1973))

Nous citons cette procédure en raison de sa simplicité et aussi pour des raisons historiques. Ce fut la première où l'aide à la décision prenait appui sur une séquence de systèmes de préférences emboîtés. Nous la présentons ci-après dans sa forme originelle bien que celle-ci demanderait à être révisée de façon à prendre en compte des pseudo-critères et à moduler l'effet de veto en fonction de l'importance plus ou moins grande de la coalition concordante. Signalons que, sous le nom d'ELECCALC, Nadeau et al. (1991) et Kiss et al. (1992) ont aménagé et enrichi ELECTRE II en vue de rendre cette méthode particulièrement conviviale.

a) Formules

Elles s'appliquent au cas où F ne comporte que des vrai-critères. Elles font intervenir, pour chacun d'eux :

– un coefficient d'importance $k_j > 0$;
– deux seuils de veto (constants ; on peut aménager simplement les formules ci-après pour prendre en compte des seuils de veto variant le long de l'échelle du critère) : $v_j^1 \leq v_j^2$, v_j^1 étant fixé de telle sorte que, lorsqu'il autorise le surclassement, celui-ci apparaisse comme absolument indiscutable ; le seuil v_j^2 vise à exploiter la marge d'indétermination de cette valeur du veto pour en atténuer l'effet restrictif.

La séquence d'un système de préférences emboîté est ici de la forme (S^i, R^i), $i \in \{1, 2\}$ et $S^1 \subset S^2$, $R^1 \supset R^2$. La relation S^1 est le **surclassement fort** (abréviation de fortement crédible) alors

[1] Leclercq (1984), avec MELCHIOR, a proposé une généralisation d'ELECTRE IV prenant en compte une relation d'importance T définie sur F : g_i T g_j signifie que le critère g_i est au moins aussi important que le critère g_j.

que la relation S^2 est le **surclassement faible** (abréviation de faiblement crédible). Pour bâtir ces relations, on fait intervenir deux niveaux exigés de concordance $s^1 > s^2$ (avec $1/2 \leq s^i \leq 1 - \min_{j \in F} k_j/k[F]$).

Dans ELECTRE II, la proposition b S^i a est regardée comme valide si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

Condition de concordance :

$$\frac{k[C(b\ S\ a)]}{k[F]} \geq s^i \text{ et } k[C(b\ S\ a)] \geq k[C(a\ S\ b)].$$

Condition de non veto : $\forall\ j \in F,\ g_j(b) + v_j^i \geq g_j(a)$.

b) Commentaires

Il est important d'observer que la définition du surclassement fort fait intervenir conjointement le niveau de concordance le plus élevé et les conditions de non veto les plus difficiles à satisfaire. C'est donc à la suite d'un double affaiblissement de la crédibilité que b S^2 a peut être validée alors que b S^1 a ne l'est pas.

Le lecteur aura sans doute remarqué que, si la condition de non veto est identique à celle d'ELECTRE I (cf. (r.5.2.4)), la condition de concordance diffère de (r.5.2.3) puisqu'elle requiert en plus que : $k[C(b\ S\ a)] \geq k[C(a\ S\ b)]$. Cette inégalité additionnelle a été introduite afin de n'aboutir à la configuration b S^i a et a S^i b (cas d'indifférence) que si $k[C(b\ P\ a)] = k[C(a\ P\ b)]$ [1]. Le fait d'avoir par exemple $k[C(b\ P\ a)] > k[C(a\ P\ b)]$ peut être pris comme argument pour justifier l'abandon de la symétrie, b S^i a paraissant plus solidement établie que a S^i b. On remarquera que si la présence d'un veto vient interdire b S^i a alors qu'aucun veto n'interdirait a S^i b, ce dernier surclassement n'en sera pas moins refusé en raison de l'inégalité additionnelle, laquelle conduira dans ce cas à a R^i b (et c'est là un effet pervers de cette façon de formuler la condition de concordance).

[1] Ce désir de réduire le nombre de paires d'actions à propos desquelles il y a surclassement dans les deux sens provient de la façon dont ELECTRE II exploite ensuite la séquence des deux s.r.p. emboîtés dans le cadre d'une problématique γ. En-dehors d'un tel désir, l'introduction de l'inégalité additionnelle ne paraît guère justifiée.

Précisons enfin que rien ne s'oppose à ce que la condition de concordance du a) ci-dessus (avec ou sans aménagement de l'inégalité additionnelle) soit formulée sur la base de (r.5.2.8) (au lieu de (r.5.2.3)) afin de prendre en compte des pseudo-critères. La condition de non veto peut également être formulée à partir de (r.5.2.9) afin de moduler l'effet de veto en fonction de k[C(b S a)].

5.3.1.2 Systèmes de préférences dans ELECTRE IV

a) Formules

Elles s'appliquent au cas où F comporte des pseudo-critères ; à chacun des critères de F, on peut en outre associer un seuil de veto (cf. 3.1.3).

A la différence des procédures précédentes, on ne fait pas intervenir ici de coefficients d'importance k_j. La prise en compte de seuils de veto (lesquels n'interviennent toutefois qu'au niveau le plus bas de la hiérarchie de crédibilité) constitue donc le seul moyen pour différencier le rôle (plus ou moins important) dévolu à chaque critère dans l'agrégation.

La séquence de systèmes de préférences emboîtés est de la forme (S^i, R^i), $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ (les relations S^i étant des relations de surclassement à quelques nuances près indiquées au b) ci-après). Chacune des relations S^i est en fait une extension de la dominance Δ_F fondée sur des hypothèses du type de celles introduites au 3.1.4 c) et d) pour asseoir $S_{\succ Q}$ (relation que l'on retrouve ci-après sous la notation S^3).

Les notations utilisées ci-après sont celles des 3.1.2, 3.1.3, 3.1.4. Dans le même esprit, introduisons, relativement à chaque paire d'actions (a, b), la coalition :

$$C(a\ S_>\ b) = \{j \in F : g_j(a) > g_j(b)\}. \qquad (r.5.3.1)$$

Introduisons deux nouvelles extensions de la dominance : la **quasi-dominance** notée Δ_q et la **dominance canonique** notée Δ_c. Par définition :

$$b\ \Delta_q\ a \Leftrightarrow C(a \succ b) = \varnothing,\ \mathrm{card}(b\ S_>\ a) > \mathrm{card}(a\ S_>\ b), \qquad (r.5.3.2)$$

$$b\ \Delta_c\ a \Leftrightarrow C(a\ P\ b) = \varnothing,\ \mathrm{card}(b\ P\ a) \geq \mathrm{card}(a\ Q\ b) \text{ et } \mathrm{card}(b\ S_>\ a) > \mathrm{card}(a\ S_>\ b). \qquad (r.5.3.3)$$

Introduisons enfin une dernière relation notée (dans l'esprit du 3.1.4) $S_{\Delta V}$ que nous appellerons le ΔV-surclassement. Par définition :

$$b\ S_{\Delta V}\ a \Leftrightarrow \begin{array}{l} \mathrm{card}(C(a\ P\ b)) = 0 \text{ ou} \\ [\mathrm{card}(C(a\ P\ b)) = 1 \text{ et} \\ \mathrm{card}(C(b\ P\ a)) \geq n/2 \text{ et} \\ g_j(b) + v_j(g_j(b)) \geq g_j(a),\ \forall\ j \in F]. \end{array} \qquad (r.5.3.4)$$

La séquence de systèmes de préférences emboîtés à l'origine d'ELECTRE IV [1] consiste à poser :

$$S^1 = \Delta_q,\ S^2 = \Delta_c,\ S^3 = S_{\succ Q},\ S^4 = S_{\Delta P},\ S^5 = S_{\Delta V} \qquad (r.5.3.5)$$

où $S_{\succ q}$ et $S_{\Delta P}$ sont respectivement définis par (r.3.1.14) et (r.3.1.15) (cf. fin du 3.1.4). Une variante consisterait à changer S^1 et S^2 comme suit :

$$S^1 = S_\Delta,\ S^2 = S_{PQ} \qquad (r.5.3.6)$$

(cf. (r.3.1.10) et (r.3.1.13)).

b) Commentaires

Commençons par observer que chacune des relations prises en considération dans ELECTRE IV (cf. (r.5.3.5) et (r.5.3.10)) repose sur la prise en compte simultanée d'une condition de concordance et d'une condition limitant la discordance. Cette dernière n'est autre que (toujours relativement à b S a) :

- pour S^1 : $C(a \succ b) = \varnothing$;
- pour S^2, S^3, S^4 : $C(a\ P\ b) = \varnothing$;
- pour S^5 : $C(a\ V\ b) = \varnothing$, $\mathrm{card}(a\ P\ b) \leq 1$ avec : $C(a\ V\ b) = \{j \in F : g_j(b) + v_j[g_j(b)] < g_j(a)\}$.

Ce sont là des conditions très limitatives. Bien qu'elles le soient de moins en moins lorsque i croît, celle de S^5 reste malgré tout plus exigeante que celle d'ELECTRE I, II ou III du fait de la condition $\mathrm{card}(a\ P\ b) \leq 1$.

[1] Cf. Roy et Hugonnard (1982a).

Pour comprendre ce que signifie b S^i a, il faut maintenant analyser, pour chacune des relations, la relation de concordance dans le cadre de la limitation de la discordance qui vient d'être précisée. Comme on va le mettre en évidence, le passage de S^i à S^{i+1} s'opère par relaxation de ces conditions, ce qui prouve le caractère emboîté des systèmes de préférences successifs ($S^i \subset S^{i+1}$).

La relation S^1 (la plus pauvre dans (r.5.3.5)) vérifie :

$\Delta_F \subset S^1 = \Delta_q \subset S_\Delta$.

La condition de concordance card(b $S_>$ a) > card(a $S_>$ a) est automatiquement vérifiée si b Δ_F a mais elle ne l'est pas nécessairement si b S_Δ a. C'est précisément le fait que cette condition de concordance soit ou ne soit pas vérifiée qui crée la différence entre Δ_q et S_Δ (puisque b S_Δ a $\Leftrightarrow$ C(a $\succ$ b) = $\varnothing$). Cette condition de concordance est une façon de prendre en compte ce que nous avons appelé (au 2.2.2 d)) des effets de cumul en les faisant intervenir pour refuser b Δ_Q a alors que l'on a b S_Δ a (et Non(b Δ_F a)). Il s'ensuit que (tout comme Δ_F) Δ_q n'est pas une relation de surclassement vérifiant la seconde partie de l'axiome 2.2.2. En effet, cette partie de l'axiome s'oppose (comme nous l'avons montré au 2.2.2 d)) à la prise en compte d'effets de cumul. En parlant de "quasi-dominance", on souligne cet écart vis-à-vis d'un surclassement conforme aux axiomes.

On passe de Δ_q à Δ_c :

– en affaiblissant la condition limitant la discordance puisque C(a Q b) peut ne plus être vide
– mais en imposant à la coalition C(a Q b) de ne pas contenir plus de critères que n'en a la coalition C(b P a) (condition dont les fondements ont été analysés au 3.1.4 à propos de S_{PQ}).

Il s'ensuit que $\Delta_c \subset S_{PQ}$, le fait que l'on puisse avoir b S_{PQ} a et Non(b Δ_c a) ne pouvant provenir que du non respect de card(b $S_>$ a) > card(a $S_>$ b). La présence de cette dernière condition dans la définition de Δ_c explique que $S_\Delta \not\subset \Delta_c$ et que l'on parle encore de dominance (canonique) pour marquer qu'il ne s'agit pas d'un surclassement vérifiant la seconde partie de l'axiome 2.2.2.

Si l'on ne souhaite pas prendre en compte d'effets de cumul et avoir affaire à une séquence de relations de surclassement (conformes à l'axiome 2.2.2), il suffit de supprimer, dans les définitions de S^1 et S^2, la condition card(b $S_>$ a) > card(a $S_>$ b), ce qui conduit précisément à la variante (r.5.3.6).

On passe de S_{PQ} à $S_{\succ Q}$ (cf. 3.1.4 d)) en limitant le nombre de critères de la coalition C(a Q b) non plus par celui de la coalition C(b P a) mais par celui de la coalition C(b $\succ$ a). C'est ensuite en supprimant totalement ce type de limitations que l'on passe de $S_{\succ Q}$ à $S_{\Delta P}$.

Enfin, la condition C(a P b) = $\varnothing$ (limitant la discordance dans S^2, S^3, S^4) est affaiblie pour passer à S^5. On peut avoir b $S_{\Delta V}$ a et Non(b $S_{\Delta P}$ a) si un seul critère discordant s'oppose à cette dernière affirmation. Toutefois, pour avoir b $S_{\Delta V}$ a, il faut en outre :

– que cet unique critère discordant ne mette pas son veto au surclassement ;
– que la coalition C(b P a) réunisse au moins la moitié des critères.

Achevons ce paragraphe en apportant quelques éléments de réponse à la question suivante : comment apprécier les hypothèses implicites sur l'importance relative des critères que renferme la définition de chaque relation S^i ? Rappelons (cf. 3.2.3) que la notion d'importance relative d'un critère g_j au sein d'une famille F n'a de sens que par référence à une procédure d'agrégation multicritère bien définie. Chacun des systèmes de préférences (S^i, R^i) est le fruit d'une PAMC explicite. Cette dernière (au moins pour i = 1, 2, 3, 4) ne fait intervenir aucune donnée intercritère venant conférer un rôle plus ou moins important à tel ou tel critère. Est-ce à dire que tous les critères ont la même importance ?

Le fait de traiter tous les critères de la même façon dans S_Δ comme dans $S_{\Delta P}$ ne peut, en aucune manière, laisser croire que les relations de surclassement prennent appui sur une hypothèse (implicite) d'égale importance des n critères. En ne différenciant pas l'importance du rôle dévolu à chacun, on parvient à fonder l'affirmation du surclassement de telle sorte qu'il demeure valide quelle que soit l'importance accordée par tel ou tel acteur aux différents critères. Il n'y a donc, dans la définition de ces deux relations, aucune hypothèse implicite (notamment d'équi-pondération) pas plus qu'il n'y en a dans la définition de la dominance (cf. remarque 1 du début du 3.1.4).

Il n'en va pas tout à fait de même pour les autres relations constituant la séquence des S^i (cf. (r.5.3.5) et (r.5.3.6)) car leur définition fait intervenir, dans la condition de concordance, des dénombrements de critères. Nous montrons ci-après, sur la base de deux types de considérations, que cela ne sous-entend nullement une équi-pondération des critères mais seulement certaines limitations sur le mode de différenciation du rôle dévolu à chaque critère pour fonder la résultante des conflits (cf. hypothèses 1 et 2 du 3.1.4 c)).

Une première façon d'aborder le problème consiste à analyser la signification et la portée des conditions qui font intervenir des dénombrements de critères. Comme nous l'avons déjà souligné, elles n'opèrent que dans un cadre relativement étroit délimité par la présence des autres conditions. C'est ainsi que Δ_q ne se différencie de S_Δ que par la prise en compte d'effets de cumul (et nous venons de voir que S_Δ n'impliquait aucune hypothèse implicite en matière d'importance de critères). C'est encore la même prise en compte des effets de cumul qui différencie Δ_c de S_{PQ}, relations dont nous avons explicité (cf. hypothèses 1 et 2 du 3.1.4 c)) ce qu'il fallait supposer quant à l'importance relative des critères pour en justifier la définition. Sur la base de considérations semblables, le lecteur pourra sans peine, en prenant appui sur l'analyse faite au début de ce paragraphe, situer, par rapport à $S_{\Delta P}$ (qui ne fait intervenir aucune hypothèse en matière d'importance relative des critères), d'une part $S_{>Q}$, d'autre part $S_{\Delta V}$. Il pourra formuler diverses hypothèses aptes à justifier l'un et l'autre de ces surclassements.

Une autre façon (peut-être plus éclairante) de chercher à répondre à la question posée plus haut consiste à comparer successivement chacune des relations S^i avec une relation de surclassement $S(\underline{k})$ dont la définition fait intervenir un vecteur $\underline{k} = (k_1, ..., k_n)$ des coefficients d'importance. On peut en effet mettre en évidence les hypothèses implicites auxquelles on s'intéresse en cherchant à cerner un sous-ensemble K^i "aussi grand que possible" tel que :

$$b\ S^i\ a \Rightarrow b\ S(\underline{k})\ a,\ \forall\ \underline{k} \in K^i.$$

K^i représente donc l'ensemble des "jeux possibles de coefficients d'importance" pour lesquels la relation de surclassement $S(\underline{k})$ est automatiquement validée dès que la relation S^i l'est. On peut donc dire que S^i suppose implicitement que $\underline{k} \in K^i$ dans la mesure où l'on admet que, si l'on avait su ou pu attribuer un coefficient d'importance k_j à chaque critère $j \in F$, on aurait effectivement fondé un système de préférences sur la relation $S(\underline{k})$.

La comparaison qui précède n'est pertinente que si $S(\underline{k})$ est, comme le sont les S^i, défini sur une famille F de pseudo-critères à partir des concepts de concordance et de discordance. Nous prendrons donc comme relation $S(\underline{k})$ (au moins pour commencer) la relation de surclassement de ELECTRE IS (cf. (r.5.2.8) et (r.5.2.9)). On peut, sans perte de généralité, se restreindre à :

$$\underline{k} \in K^* \text{ avec } K^* = \{\underline{k} : k_j \geq 0 \text{ et } \sum_{j=1}^{n} k_j = 1\}.$$

Le lecteur vérifiera sans peine que, aussi bien pour $S^1 = \Delta_q$ ((r.5.3.5)) que pour $S^1 = S_\Delta$ ((r.5.3.6)), on a : $K^1 = K^*$ (ce qui ne fait que confirmer les résultats ci-dessus). Soulignons que ces résultats ne dépendent pas de la valeur choisie pour le niveau exigé de concordance s.

Intéressons-nous maintenant à $S^4 = S_{\Delta P}$. Rappelons que $b\ S_{\Delta P}\ a \Leftrightarrow C(a\ P\ b) = \varnothing$. Cette définition ne fait intervenir aucun dénombrement de critères : comme nous l'avons déjà signalé (au même titre que la dominance), elle se fonde sur une logique qui n'affecte en rien l'idée que l'on peut se faire de l'importance de tel ou tel critère. On peut, dans ces conditions, être surpris de trouver, quelle que soit la valeur donnée à s : $K^4 = \varnothing$ (et non K^*). Cela souligne une fois de plus à quel point la notion d'importance des critères n'a de sens qu'au sein d'une PAMC donnée et combien il est délicat de vouloir comparer la manière dont cette importance est traitée dans deux PAMC différentes, même lorsque celles-ci se fondent sur des principes et des logiques très proches.

Considérons une relation $S(\underline{k})$ fondée sur une définition quelque peu modifiée afin d'en rendre la logique plus proche de celle qui prévaut dans $S_{\Delta P}$. La modification consiste tout simplement à changer dans (r.5.2.7) la définition de φ_j de telle sorte que φ_j décroisse depuis 1 jusqu'à 1/2 (au lieu de 0) lorsque $g_j(a)$ décrit l'intervalle : $[g_j(b) + q_j[g_j(b)]\ ;\ g_j(b) + p_j[g_j(b)]]$. Dans ces conditions, il vient, avec $s = 1/2$: $K^4 = K^*$. Dans les mêmes conditions, on trouve, en notant [n/2] la partie entière de n/2 :

$$K^3 = K^* \text{ pour } 1/2 \leq s \leq 1/2 \cdot (1 + \frac{1}{1 + [n/2]})$$

à condition d'introduire l'hypothèse suivante :

HYPOTHÈSE DE DISPARITÉ LIMITÉE : Aucun critère n'a, à lui seul, une importance supérieure ou égale à celle d'une coalition rassemblant au moins la moitié des critères.

Le résultat ci-dessus s'obtient aisément en prouvant que, du fait de cette hypothèse, toute coalition rassemblant au moins la moitié des critères a une importance $m > 1/(1 + [n/2])$ et que, du fait de la définition modifiée de φ_j, $k[C(b\ S\ a), C(a\ Q\ b)] \geq 1/2 + m/2$.

On obtient le même résultat pour K^2 avec $S^2 = S_{PQ}$ ou Δ_c (dans ce dernier cas, la borne supérieure de s peut être améliorée).

Enfin, sans avoir à faire intervenir l'hypothèse de disparité limitée mais toujours avec $\varphi_j \geq 1/2$ et en ne prenant pas en compte le renforcement de l'effet de veto dû au dernier terme de (r.5.2.9), on trouve: $K^s = K^*$ pour $s = 1/2$.

5.3.2 Cas où le nombre des systèmes est indéterminé

Intéressons-nous à un système de type (S, R) ou (P, ~). Jusqu'ici, pour le définir, nous avons énoncé des conditions qui, lorsqu'elles étaient satisfaites, conduisaient à regarder comme valide une affirmation du type b H a (H signifiant S ou P). Lorsque ni b H a ni a H b ne pouvaient être ainsi validées, on considérait qu'il y avait, selon le cas, incomparabilité ou non préférence entre a et b. En formulant des conditions de validation de moins en moins exigeantes, on a pu bâtir des séquences formées d'un nombre déterminé de tels systèmes relationnels de préférences. Ceux-ci étaient, par construction, emboîtés et renvoyaient chacun à un niveau donné d'une hiérarchie de crédibilité.

Dans le présent paragraphe, nous arrivons à un résultat très voisin : la seule différence provient de ce que la hiérarchie de crédibilité est ici définie à partir d'un "continuum de niveau" et non plus à partir de quelques niveaux dont le nombre a été déterminé a priori. Pour asseoir ce continuum de niveau, il nous faut introduire un nouveau concept, celui d'indice de crédibilité d'une affirmation de type b H a (on parlera, selon les cas, d'indice de crédibilité du surclassement ou d'indice de crédibilité de la préférence stricte [1]).

Une fonction σ_H à valeurs réelles est telle que $\sigma_H(b, a)$ peut être prise comme définition de l'**indice de crédibilité de la proposition b H a** dès lors qu'elle satisfait aux trois exigences suivantes :

EXIGENCE 1 : Les actions a et b n'interviennent dans le calcul de $\sigma_H(b, a)$ que par les seuls vecteurs de performances $\underline{g}(a)$ et $\underline{g}(b)$

[1] Rien n'interdit d'appliquer ce qui suit au cas H = ≻ et de parler d'indice de crédibilité de la préférence.

(le mode de calcul pouvant dépendre des caractéristiques des différents critères de F, notamment de divers seuils).

EXIGENCE 2 : $0 \leq \sigma_H(b, a) \leq 1$; on a :
– $\sigma_H(b, a) = 0$ lorsque la proposition b H a n'est appuyée par aucun argument significatif susceptible de la valider ;
– $\sigma_H(b, a) = 1$ lorsque la proposition b H a est appuyée par des arguments tout à fait convaincants permettant de ne pas douter de sa validité.

EXIGENCE 3 : On a : $\sigma_H(d, c) > \sigma_H(b, a)$ lorsque l'affirmation d H c est appuyée par des arguments qui la rendent plus crédible que l'affirmation b H a.

De l'exigence 3, il découle [1] que $\sigma_H(b, a)$ est une fonction monotone non décroissante de $g_j(b)$ et monotone non croissante de $g_j(a)$, $\forall j \in F$.

Revenons, afin d'illustrer ce qui précède, à certaines des procédures étudiées au 5.2. Plaçons-nous dans le cas particulier où les seuils de veto v_j sont suffisamment grands pour que les conditions de non veto soient automatiquement vérifiées. Tout se passe alors comme si :

– ELECTRE I prenait appui sur (cf. (r.5.2.3)) :

$$\sigma_S(b, a) = \frac{k[C(b\ S\ a)]}{k[F]} ;$$

– ELECTRE IS prenait appui sur (cf. (r.5.2.8)) :

$$\sigma_S(b, a) = \frac{k[C(b\ S\ a), C(a\ Q\ b)]}{k[F]} ;$$

– TACTIC prenait appui sur (cf. (r.5.2.11) ou (r.5.2.13)) :

[1] En effet, pour H = {S, ≻, P}, il est naturel de considérer que b′ H a est plus crédible que b H a dès lors que $b' \Delta_P b$.

$$\sigma_P(b, a) = \frac{k[C(b\ P\ a)]}{k[C(b\ P\ a)] + k[C(a\ P\ b)]}.$$

En effet, dans chacune de ces trois PAMC, la condition de concordance, qui définit à elle seule le système de préférences (compte-tenu de l'hypothèse faite sur les niveaux de veto), équivaut à :

$$b\ H\ a \Leftrightarrow \sigma_H(b, a) \geq \lambda. \qquad \text{(r.5.3.7)}$$

Dans ELECTRE I et ELECTRE IS, $\lambda = s$. Dans TACTIC [1], $\lambda = \frac{\rho}{1 + \rho}$.

Plus généralement, on remarquera que (r.5.3.7) définit un moyen simple et naturel pour passer d'un indice de crédibilité $\sigma_H(b, a)$ à une condition de validité de l'affirmation b H a (donc à un système de préférences de type (S, R) ou (P, ~) selon le cas). Ce moyen de passage est appelé **λ-coupe**. Cette terminologie est en particulier classique en théorie des sous-ensembles flous (cf. Dubois et Prade (1980)). Le lecteur un tant soit peu familiarisé avec cette théorie aura sans doute déjà interprété σ_H comme la fonction d'appartenance caractéristique d'une relation binaire floue. Par référence à cette théorie, on dit souvent que σ_S définit une relation de **surclassement floue** et σ_P une relation de **préférence stricte floue** (cf. Perny (1992)). Précisons que, dans la suite de cet ouvrage, nous ne supposons pas que la théorie en question est connue du lecteur.

Considérons la suite de valeurs réelles :

$$1 = \lambda^1 > \lambda^2 > \ldots > \lambda^h \geq 0$$

et les relations binaires $H^1, H^2, \ldots, H^h$ qui s'en déduisent par λ-coupe prenant appui sur une fonction σ_H. Il est clair que l'on a :

$$H^1 \subset H^2 \subset \ldots \subset H^h.$$

[1] En toute rigueur, le second membre de l'expression devrait être très légèrement majoré ou l'inégalité (r.5.3.7) rendue stricte.

Les valeurs choisies $\lambda^1, \lambda^2, \ldots, \lambda^h$ caractérisent donc une hiérarchie de niveau à laquelle on peut associer une séquence de systèmes de préférences emboîtés (de type (S, R) ou (P, ~) selon le cas) dès lors que l'on a construit un indice de crédibilité σ_S ou σ_P.

Inversement [1], étant donné une séquence de systèmes de préférences emboîtés (cf. (r.5.3.5) par exemple), on peut toujours la regarder comme obtenue (et ce de multiples façons) par une séquence de λ-coupes fondée sur un indice de crédibilité σ_H.

L'indice de crédibilité apparaît donc comme un moyen de repérer, sur une échelle de hiérarchie de crédibilité allant de 0 à 1, le niveau avec lequel l'affirmation b H a est validée. Ce repérage est, en général, purement ordinal. Il ne peut (sauf circonstances très exceptionnelles) être assimilé à une probabilité. En définissant un tel indice, on ne définit plus une relation binaire H (surclassement, préférence stricte, ...) mais un nombre quelconque (non limité a priori) de telles relations emboîtées, c'est-à-dire faisant apparaître de plus en plus de possibilités de comparaison (au fur et à mesure que l'on descend dans la hiérarchie de crédibilité) mais au prix de conditions de validité de moins en moins convaincantes. C'est précisément pourquoi on parle de relation de surclassement floue (resp. de préférence stricte floue) à propos de σ_S (resp. σ_P). En parlant ainsi, on fait en quelque sorte référence à la plus longue séquence de relations strictement emboîtées que l'on peut déduire de l'indice de crédibilité par λ-coupes successives [2].

Nous nous bornons à présenter ci-après les systèmes de préférences de PROMETHEE I, II et III, d'ELECTRE III et des procédures par compensation probante. D'autres auraient pu l'être (tels ceux de MAPPAC ou PRAGMA, cf. Matarazzo (1986 et 1988)). Nous y avons renoncé pour ne pas trop alourdir ce paragraphe.

[1] Sur tous ces points, nous renvoyons à Doignon et al. (1988).

[2] Le nombre des relations dans une telle séquence est borné par card(A)·(card (A) – 1).

5.3.2.1 Systèmes de préférences dans PROMETHEE I, II et III (cf. Brans et al. (1984))

a) Formules

Elles s'appliquent au cas où les n critères de F sont des pseudo-critères et/ou des critères prenant en compte autrement les situations de préférence stricte. Le ou les seuils (indifférence, préférence ou autres marquant la préférence faible) qui caractérisent les critères sont supposés constants [1]. Contrairement aux PAMC de type ELECTRE, la PAMC commune à PROMETHEE I, II et III repose exclusivement sur une analyse de la concordance. Il s'ensuit qu'aucun niveau de veto n'est introduit. Enfin, cette procédure fait intervenir, pour chaque critère, un coefficient d'importance $k_j > 0$ qui, comme dans TACTIC, sert à apprécier l'importance de la coalition concordante avec la proposition b P a. Nous noterons $\sigma_P(b, a)$ l'indice de crédibilité associé.

La définition de $\sigma_P(b, a)$ prend appui sur des grandeurs de même nature restreintes à un seul critère : $\sigma_{P_j}(b, a)$ est l'indice de crédibilité de la proposition b P_j a. La formule définissant cet indice dépend du type de critères considérés. A l'examen, ces formules s'avèrent conformes aux exigences 1, 2 et 3 énoncées ci-dessus pourvu qu'on les rapporte à l'affirmation b P_j a [2].

[1] Toutefois, les formules qui suivent peuvent se généraliser aisément au cas où les seuils varient avec la position de l'intervalle $[g_j(a) ; g_j(b)]$.

[2] C'est pourquoi nous parlons de crédibilité de la préférence stricte et non, comme le font Brans, Mareschal et Vincke, d'intensité de préférence. De surcroît, cette expression ne nous paraît pas bien adaptée car $\sigma_{P_j}(b, a)$ atteint la valeur 1 dès que le critère j valide b P_j a et ne dépasse pas cette valeur même si l'écart entre les performances de b et a augmente. Pour vérifier formellement la dernière exigence, certains axiomes, peu restrictifs mais difficiles à formuler, devraient être introduits.

De façon plus précise, Brans et al. (1984) définissent $\sigma_{P_j}(b, a)$ comme une fonction de la seule différence $g_j(b) - g_j(a)$ [1]. Dans le cas d'un pseudo-critère, on a :

$$\sigma_{P_j}(b, a) = \begin{cases} 0 \text{ si } j \in C(a\ S\ b) \\ 1 \text{ si } j \in C(b\ P\ a) \\ \dfrac{g_j(b) - g_j(a) - q_j}{p_j - q_j} \text{ si } j \in C(b\ Q\ a) \end{cases} \qquad (r.5.3.8)$$

(il est intéressant de rapprocher la définition de φ_j au (r.5.2.7) de la dernière des formules ci-dessus).

Les auteurs font intervenir deux autres [2] types de critères. Il s'agit en premier lieu du critère dit **de niveau** qui, au même titre que le pseudo-critère, conduit à cerner, à l'aide des seuils p_j et q_j, une zone de préférence faible mais à modifier l'indice de crédibilité relativement à cette zone comme suit :

$$\sigma_{P_j}(b, a) = 1/2 \text{ si } j \in C(b\ Q\ a).$$

Il s'agit en second lieu du critère dit **gaussien** ; celui-ci traduit le fait que :

– la préférence faible b Q_j a apparaît dès que $g_j(b)$ commence à dépasser $g_j(a)$;
– la préférence stricte b P_j a n'est jamais, en toute rigueur, atteinte.

Pour un tel critère, on a, par définition :

$$\sigma_{P_j}(b, a) = \begin{cases} 0 \text{ si } g_j(b) \leq g_j(a) \\ 1 - \exp\left(\dfrac{-(g_j(b) - g_j(a))^2}{2\gamma^2}\right) \end{cases}$$

où γ peut s'interpréter comme un seuil marquant d'une part la position du point d'inflexion de l'indice de crédibilité et, d'autre part, l'écart de performances auquel on associe la crédibilité $1 - \exp(-1/2) \approx 0{,}6$.

Dans PROMETHEE, l'**indice de crédibilité de la proposition b P a** est défini par :

[1] Pour prendre en compte des seuils variables, il faut faire intervenir un second argument, $g_j(a)$ par exemple.

[2] Ils en considèrent en tout six compte-tenu des cas de vrai-critères, pré-critères et quasi-critères. Ces trois cas sont en fait des cas particuliers de (r.5.3.8).

$$\sigma_P(b, a) = \frac{1}{k[F]} \cdot \sum_{j \in F} k_j \sigma_{P_j}(b, a) \qquad (r.5.3.9)$$

avec

$$k[F] = \sum_{j \in F} k_j.$$

b) Commentaires

Comme on l'a déjà souligné en adoptant la notation σ_P, PROMETHEE est fondée sur un indice de crédibilité qui a trait à la préférence stricte. Faisons observer que la crédibilité de b P a n'atteint son niveau maximum ($\sigma_P(b, a) = 1$) que si tous les critères conduisent à préférer strictement b à a. Dans tous les cas de dominance stricte [1] correspondant à :

$b\ P_j\ a, \forall\ j \in C\ (\subset F)$ et
$b\ I_j\ a, \forall\ j \in F \backslash C$,

on a :

$$\sigma_P(b, a) = \sum_{j \in C} k_j.$$

C'est dire que si C est réduit [2] au seul critère j, le niveau de crédibilité de l'affirmation b P a vaut seulement [3] $k_j/k[F]$. Cette position diffère de celle adoptée dans TACTIC où toute dominance stricte conduit à valider l'affirmation b P a quelle que soit la valeur attribuée au niveau de concordance (cf. 5.2.2 a2)).

En revanche, PROMETHEE ne prenant pas en compte les phénomènes de discordance, on peut fort bien avoir $\sigma_P(b, a) = 1$

---

[1] Comme la dominance, la dominance stricte $\not\Delta_F$ ne fait intervenir aucun seuil : $b\ \not\Delta_F\ a \Leftrightarrow b\ \Delta_F\ a$ et Non($a\ \Delta_F\ b$).

[2] Avec $b\ \not\Delta_F\ a$, $\sigma_P(b, a)$ peut descendre jusqu'à 0 si $C = \varnothing$; bien évidemment, $\sigma_P(a, b) = 0$.

[3] Dans une relation nette obtenue à partir de σ_P par λ-coupe, les critères de F ne sont donc pas, en général, inductifs, cf. 2.3.1.

– $k_j/k[F]$ (donc une crédibilité de l'affirmation b P a assez élevée) alors que, sur l'échelle du critère j, $g_j(a)$ est au maximum et $g_j(b)$ au minimum.

Faisons encore observer que (cf. figure 5.3.1), $\forall$ a, b $\in$ A :

$$\sigma_P(b, a) + \sigma_P(a, b) \leq 1.$$

L'inégalité ci-dessus découle simplement de (r.5.3.8) et du fait que :

$$\sigma_{P_j}(a, b) \neq 0 \Rightarrow \sigma_{P_j}(b, a) = 0.$$

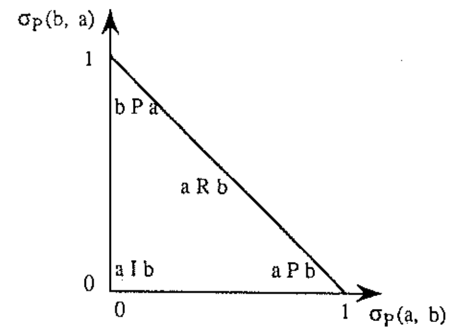

Figure 5.3.1. Comparaison des actions dans PROMETHEE

On en déduit que $\sigma_P(a, b)$ voisin de $\sigma_P(b, a)$ n'est possible que pour $\mathrm{Min}(\sigma_P(a, b), \sigma_P(b,a)) \leq 1/2$. Par conséquent, toute λ-coupe pour $\lambda > 1/2$ définit une relation P qui est asymétrique (comme doit l'être toute relation de préférence stricte). En revanche, les λ-coupes avec $\lambda \leq 1/2$ peuvent, pour certaines paires d'actions, conduire à a P b et b P a.

Posons $\lambda > 1/2$ et examinons comment peuvent se comparer deux actions a et b telles que :

$$\sigma_P(a, b) < \lambda,\ \sigma_P(b, a) < \lambda.$$

Supposons pour cela (ce qui n'est pas restrictif) $\sigma_P(b, a) \geq \sigma_P(a, b)$. On a :

$$0 \leq \sigma_P(b, a) - \sigma_P(a, b) < \lambda.$$

Lorsque la différence $\sigma_P(b, a) - \sigma_P(a, b) \geq 1/2$, cela signifie qu'il y a une présomption de préférence en faveur de b par rapport à a mais qu'elle n'est pas suffisamment crédible pour que b P a soit validée avec la λ-coupe considérée (toutefois, si une valeur plus faible de λ avait été choisie, b P a aurait été validée).

Plus la différence $\sigma_P(b, a) - \sigma_P(a, b)$ diminue et plus la présomption de crédibilité en faveur de b devient fragile, voire dépourvue de signification. Est-ce à dire que la proposition b I a gagne en crédibilité ? Cela n'est pas douteux si $\sigma_P(b, a)$ est voisin de 0 (car $\sigma_P(a, b)$ l'étant aussi, on a nécessairement $g_j(a)$ voisin de $g_j(b)$, $\forall j \in F$). En revanche, plus $\sigma_P(b, a)$ s'approche de 1/2 ($\sigma_P(a, b)$ faisant par conséquent de même) et plus b R a devient crédible (car $\sigma_P(b, a) = \sigma_P(a, b) = 1/2$ correspond à une partition de F en deux coalitions C(b P a) et C(a P b) d'égale importance).

5.3.2.2 Systèmes de préférences dans ELECTRE III (cf. Roy (1978)) [1]

a) Formules

Elles s'appliquent au cas où les critères de F sont des pseudo-critères [2]. Elles prennent en compte [3], pour chaque critère, un seuil de veto v_j qui, au même titre que les seuils d'indifférence q_j et de préférence p_j, peuvent varier avec la performance. Elles font enfin intervenir, pour chaque critère, un coefficient d'importance $k_j > 0$ qui, comme dans ELECTRE I, sert à apprécier l'importance de la coalition concordante avec la proposition b S a. On note $\sigma_S(b, a)$ l'indice de crédibilité de cette affirmation.

La définition de $\sigma_S(b, a)$ prend appui :

[1] Signalons que la définition de ce système de préférences peut être étendue au cas de données floues, cf. Perny (1992).

[2] Elles peuvent, sans difficultés, être étendues aux critères de niveau et aux critères gaussiens pris en compte dans PROMETHEE.

[3] Comme dans ELECTRE I, IS, II ou IV, la prise en compte de l'effet de veto est une possibilité que l'on peut fort bien ne pas vouloir utiliser pour tout ou partie des critères. Il suffit de poser $v_j = 100\cdot(g_j^* - g_{j*})$ (où g_j^* et g_{j*} désignent respectivement les performances maximum et minimum atteintes par le critère j sur A) pour rendre l'effet de veto inopérant dans les formules qui suivent.

– d'une part sur un **indice de concordance** c(b, a) qui fait intervenir les coalitions C(b S a) et C(a S b) ;

– d'autre part sur des **indices de discordance** $d_j(b, a)$ définis pour chaque critère $j \in F$.

Pour les mêmes raisons et de la même façon que dans ELECTRE IS, nous avons fait intervenir, dans ELECTRE III, au titre de la concordance, la quantité k[C(b S a), C(a Q b)] (cf. (r.5.2.7)) ; par définition, l'indice de concordance vaut [1] :

$$c(b, a) = \frac{k[C(b\ S\ a), C(a\ Q\ b)]}{k[F]}. \qquad \text{(r.5.3.10)}$$

L'indice de discordance du critère j vise à appréhender le fait que ce critère est plus ou moins discordant avec la proposition b S a. Cette discordance est maximum ($d_j(b, a) = 1$) lorsque le critère j met son veto au surclassement ; elle est minimum ($d_j(b, a) = 0$) lorsque le critère j n'est pas discordant ($j \notin C(a\ P\ b)$). Pour définir la valeur de l'indice dans la zone intermédiaire (cas d'un critère discordant ne mettant pas son veto au surclassement), nous avons tout simplement admis que cette valeur croissait proportionnellement à $(g_j(a) - g_j(b))$, d'où la définition suivante :

$$d_j(b, a) = \begin{cases} 1 \text{ si } g_j(a) > g_j(b) + v_j[g_j(b)] \\ 0 \text{ si } g_j(a) \leq g_j(b) + p_j[g_j(b)] \\ \dfrac{g_j(a) - g_j(b) - p_j[g_j(b)]}{v_j[g_j(b)] - p_j[g_j(b)]} \text{ sinon.} \end{cases} \qquad \text{(r.5.3.11)}$$

Dans ELECTRE III, l'indice de crédibilité de la proposition b S a est alors défini par :

$$\sigma_S(b, a) = c(b, a) \cdot \prod_{j \in D_c(b,a)} \frac{1 - d_j(b, a)}{1 - c(b, a)} \qquad \text{(r.5.3.12)}$$

avec $D_c(b, a) = \{j \in F : d_j(b, a) > c(b, a)\}$.

[1] Rappelons que la quantité c(b, a) intervient également dans ELECTRE IS (cf. (r.5.2.8)).

Notons que si $d_j(b, a) = 1$ pour $j \in F$, cette formule implique $\sigma_S(b, a) = 0$ puisqu'alors on a nécessairement $c(b, a) < 1$.

b) Commentaires

La formule (r.5.3.12) peut paraître un peu compliquée au lecteur qui la découvre. Nous lui suggérons, pour en approfondir le mécanisme, de se demander si l'indice de crédibilité du surclassement ainsi défini vérifie, "de toute évidence", les propriétés 1, 2 et 3 formulées en introduction du 5.3.2. Il constatera sans peine qu'il en est bien ainsi pour les exigences 1 et 2 mais que, pour la troisième, un minimum d'axiomes (semble-t-il peu restrictifs mais difficiles à formuler) devrait être introduit pour fonder le mode de comparaison dont il est question dans cette dernière exigence. Nous nous bornons [1] ici à énoncer quelques principes simples qui, si on les accepte, permettent de justifier la formule (r.5.3.12).

PRINCIPE n° 1 : En l'absence de critères discordants, l'indice de concordance $c(b, a)$ est choisi comme indice de crédibilité (il est évident que cet indice vérifie les propriétés 1 et 2 ; il est naturel d'admettre qu'il vérifie également la propriété 3 dès lors que l'on cherche à fonder σ_S sur une analyse de concordance et une analyse de discordance et que, dans le cas considéré, il n'y a aucun critère discordant).

PRINCIPE n° 2 : En présence d'un quelconque critère discordant mettant son veto au surclassement b S a, on pose $\sigma_S(b, a) = 0$ (ceci en conformité avec l'exigence n° 2).

PRINCIPE n° 3 : En présence d'un seul critère discordant j ne mettant pas son veto à b S a, on considère que le niveau de crédibilité de cette affirmation demeure égal à $c(b, a)$ si $d_j(b, a) \leq c(b, a)$ (le niveau de discordance est ici jugé insuffisant eu égard à celui de la concordance pour affecter la crédibilité de

[1] Pour une analyse formelle de cette formule, voir Roubens et Fodor (à paraître).

b S a) et que ce niveau de crédibilité est réduit [1], dans le rapport $\frac{1 - d_j(b, a)}{1 - c(b, a)}$, si $d_j(b, a) > c(b, a)$.

PRINCIPE n° 4 : Dans tous les cas, l'apparition d'un critère k discordant et tel que $d_k(b, a) > c(b, a)$ n'a pas d'autre effet sur la crédibilité du surclassement que celui pris en compte par la variation de $c(b, a)$.

PRINCIPE n° 5 : Dans tous les cas, lorsque le niveau d'un critère k discordant franchit la valeur $c(b, a)$, la crédibilité du surclassement s'en trouve réduite dans un rapport égal à $\frac{1 - d_k(b, a)}{1 - c(b, a)}$.

Faisons observer que, ici comme dans toutes les méthodes ELECTRE, on s'intéresse à l'affirmation d'un surclassement et non à celle d'une préférence stricte (comme dans PROMETHEE ou dans TACTIC). La crédibilité de b S a atteint son niveau maximum ($\sigma_S(b, a) = 1$) si et seulement si $b\ S_j\ a$ est vérifiée, $\forall j \in F$. On a donc (cf. 3.1.4 b)) :

$$\sigma_S(b, a) = 1 \Leftrightarrow b\ S_\Delta\ a.$$

Faisons encore observer que, avec ELECTRE III :

$$0 \leq \sigma_S(a, b) + \sigma_S(b, a) \leq 2,$$

chacune des deux bornes pouvant être atteinte (cf. figure 5.3.2).

Le cas $\sigma_S(a, b) + \sigma_S(b, a) = 2$ traduit une indifférence bien établie entre a et b puisque, alors, $a\ S_\Delta\ b$ et $b\ S_\Delta\ a$. Lorsque la somme considérée diminue avec $\sigma_S(a, b)$ voisine de $\sigma_S(b, a)$ (cas de "presque symétrie"), on passe de l'indifférence à l'incomparabilité, laquelle est d'autant plus crédible que $\sigma_S(b, a) + \sigma_S(a, b)$ est plus faible : l'analyse qui suit montre que, déjà pour $\sigma_S(a, b) + \sigma_S(b, a) = 1$, l'indifférence n'est plus acceptable. Précisons au

[1] Il n'est pas sans intérêt de chercher à interpréter cette position à la lumière de l'exigence n° 3.

préalable que la présence d'une dissymétrie $\sigma_S(b, a)$ "nettement" supérieure à $\sigma_S(a, b)$ traduit une présomption de préférence en faveur de b par rapport à a, laquelle correspond à une préférence d'autant mieux établie que la différence $\sigma_S(b, a) - \sigma_S(a, b)$ est plus proche de 1 (voir figure 5.3.2).

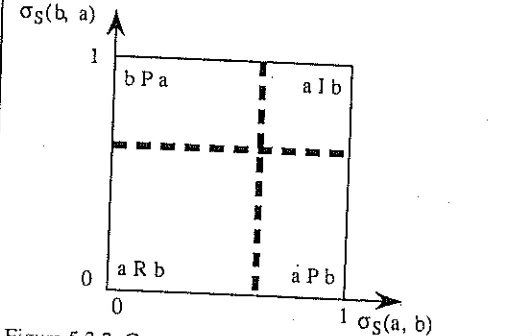

Figure 5.3.2. Comparaison des actions dans ELECTRE III

Le lecteur établira sans peine que si, $\forall\, j \in F$:

$d_j(a, b) \leq c(a, b)$ et
$d_j(b, a) \leq c(b, a)$,

alors

$$\sigma_s(a, b) + \sigma_s(b, a) = c(a, b) + c(b, a) \geq 1 + \frac{k[C(a\ I\ b)]}{k[F]}.$$

Dans ces conditions, $\sigma_S(a, b) + \sigma_S(b, a)$ ne peut être voisin de 1 que si $\frac{k[C(a\ I\ b)]}{k[F]}$ voisin de 0. D'autre part, l'indifférence a I b est d'autant moins crédible que $\frac{k[C(a\ I\ b)]}{k[F]}$ voisin de 0. Par conséquent, $\sigma_S(a, b) + \sigma_S(b, a)$ voisin de 1 conduit à regarder les situations d'indifférence comme non crédibles lorsque, comme on l'a supposé, aucun critère discordant n'est venu réduire la crédibilité de l'un des surclassements.

On peut montrer, par une analyse assez minutieuse, que la présence de critères discordants conduisant à $d_j(a, b) > c(a, b)$ et/ou $d_j(b, a) > c(b, a)$ ne modifient pas la conclusion ci-dessus. Ces conditions, jointes à $\sigma_S(a, b) + \sigma_S(b, a)$ voisin de 1, apparaissent en effet incompatibles avec une situation d'indifférence clairement établie. Cela tient au fait que la présence de discordances significatives conduit normalement à l'incomparabilité, sauf en cas

de nette dissymétrie, c'est-à-dire lorsque $\sigma_S(b, a) - \sigma_S(a, b)$ est significativement différent de 0.

Pour achever ce paragraphe, suggérons au lecteur de comparer les figures 5.3.1 et 5.3.2. Précisons que cette comparaison n'a de sens que si on se place dans les conditions suivantes :

– tous les critères sont des pseudo-critères avec seuils constants ;
– on ne se préoccupe pas de l'effet de veto (v_j suffisamment grand dans ELECTRE III).

Comme on l'a fait remarquer ci-dessus, on a alors $\sigma_S(a, b) + \sigma_S(b, a) \geq 1$. Ceci élimine tous les points du carré 5.3.2 situés au-dessous de la diagonale joignant les points (0, 1) et (1, 0). Ainsi réduite, la figure 5.3.2 devient semblable à la figure 5.3.1. Cela tient à l'existence, dans les conditions considérées, d'une relation fonctionnelle très simple (et facile à établir) liant, sous les deux hypothèses précédentes, les indices de crédibilité d'ELECTRE III et de PROMETHEE :

$$\sigma_S(b, a) = 1 - \sigma_P(a, b).$$

5.3.2.3 Systèmes de préférences dans les procédures par compensation probante

L'idée de compensation (faisant appel au concept de taux de substitution, cf. 3.1.5) semble, a priori, peu compatible avec une procédure de type II. Comme on va le voir, elle peut pourtant l'être si l'on fait intervenir des marges d'indétermination qui affectent les taux de substitution afin de raisonner en termes de "compensation probante". Nous allons tout d'abord présenter ce mode de raisonnement et discuter ensuite de la manière de l'utiliser pour bâtir des systèmes de préférences (emboîtées ou floues) de type (S, R) ou (P, ~). Rappelons que ce mode de raisonnement a été utilisé pour la première fois dans un problème d'aide à la décision au cours des années 1960 à propos d'un problème de tracé d'autoroute [1]. Quelques tentatives ultérieures ont ensuite eu lieu pour approfondir et développer cette voie [2].

Nous supposerons ci-après (comme au 3.1.5) que les performances $g_j(a)$ ont une signification quantitative qui autorise la comparaison des préférences sur la base des différences $g_j(b) - g_j(a)$ et donne un sens au calcul de la quantité [3] :

$$w(b, a) = \sum_{j \in F} k_j \cdot (g_j(b) - g_j(a)).$$

Elle correspond à un calcul de bilan par compensation (k_j étant de la forme $1/n_j$, c'est-à-dire l'inverse d'un taux de substitution (cf. 3.1.5)). Plus $w(b, a)$ est grand et plus des propositions telles que b S a, b P a pourraient être jugées crédibles si ce mode de calcul ne présentait pas certains points faibles qui en altèrent la probance. Rappelons (cf. 3.1.5) les deux plus importants :

– k_j est mal déterminé, en particulier parce qu'il est souvent arbitraire de traiter le taux de substitution comme une constante ;
– des écarts de performances différents de 0 (aussi bien positifs que négatifs) mais suffisamment faibles pour refléter une situation d'indifférence sont pris en compte dans le bilan par compensation.

Une façon possible de remédier au second de ces deux points faibles sera abordée en fin de paragraphe.

Chaque coefficient k_j est destiné à valoriser, en vue du bilan, la différence $g_j(b) - g_j(a)$ sur une dimension de référence. Supposons que celle-ci soit définie. Il est alors possible d'appréhender la marge d'indétermination de k_j en définissant un minimum k_j^m

[1] Cf. Roy (1973), Bertier et al. (1972), de Montgolfier et Bertier (1978) et Roy (1974a).

[2] Cf. Siskos (1984) et Bana e Costa (1989).

[3] Rappelons que l'utilisation de cette quantité implique des propriétés bien précises à la nature des nombres k_j et $g_j(a)$.

et un maximum k_j^M réalistes. On peut en déduire facilement le minimum $w^m(b, a)$ et le maximum $w^M(b, a)$ de $w(b, a)$ lorsque les k_j varient sur les intervalles ainsi définis. On a en effet :

$$w^m(b, a) = w_>^m(b, a) - w_>^M(a, b),$$
$$w^M(b, a) = w_>^M(b, a) - w_>^m(a, b) \qquad \text{(r.5.3.13)}$$

avec :

$$w_>^m(b, a) = \sum_{j \in C(bS_> a)} k_j^m \cdot (g_j(b) - g_j(a)),$$
$$w_>^M(b, a) = \sum_{j \in C(bS_> a)} k_j^M \cdot (g_j(b) - g_j(a)) \text{ et} \qquad \text{(r.5.3.14)}$$

$C(a\ S_>\ b) = \{j \in F : g_j(a) > g_j(b)\}$ (cf. (r.5.3.1)).

On est ainsi conduit, pour renforcer la probance du raisonnement par compensation, à substituer au nombre $w(b, a)$ l'intervalle $[w^m(b, a) ; w^M(b, a)]$. Faisons observer que :

$$[w^m(a, b) ; w^M(a, b)] = [- w^M(b, a) ; - w^m(b, a)].$$

Pour fonder des indices de crédibilité $\sigma_S(b, a)$ ou $\sigma_P(b, a)$, il faut, de toute évidence, faire intervenir la position du 0 par rapport aux bornes de l'intervalle $[w^m(b, a) ; w^M(b, a)]$. Il est naturel de considérer que :

– $w^m(b, a) > 0$ est un argument suffisant pour valider b P a (donc b S a) ;
– $w^M(b, a) < 0$ suffit pour prouver qu'aucun argument significatif ne peut valider b S a (donc b P a).

Il n'y a donc matière à discussion (cf. début du 5.3.2, exigence 2) que si :

$$w^m(b, a) \leq 0 \leq w^M(b, a). \qquad \text{(r.5.3.15)}$$

Les auteurs cités en référence en début de ce paragraphe ont proposé diverses solutions. Nous en présentons ci-après quelques unes.

Il découle de ce qui précède et de l'exigence 2 imposée aux indices de crédibilité (cf. début du 5.3.2) que, pour $H \in \{P, S\}$:

$$\sigma_H(b, a) = 0 \text{ si } w^M(b, a) < 0,$$
$$\sigma_H(b, a) = 1 \text{ si } w^m(b, a) > 0. \qquad \text{(r.5.3.16)}$$

Les définitions de σ_H qui figurent ci-après supposent donc les inégalités (r.5.3.15) satisfaites. Posons :

$$\rho(b, a) = \frac{w^M(b, a)}{w^M(b, a) - w^m(b, a)}. \qquad \text{(r.5.3.17)}$$

La longueur $w^M(b, a) - w^m(b, a)$ de l'intervalle $[w^m(b, a) ; w^M(b, a)]$ étant supposée fixe, la force des arguments susceptibles de valider une proposition du type b H a croît avec $w^M(b, a)$, donc aussi avec $\rho(b, a)$. Cela signifie que l'exigence 3 des indices de crédibilité (cf. début du 5.3.2) est également satisfaite, du moins lorsqu'on raisonne avec une longueur d'intervalle fixe. La valeur $\rho(a, b)$ semble donc pouvoir être prise comme définition d'un indice de crédibilité. Il ne peut s'agir que d'un indice de crédibilité de préférence et non de surclassement. On a en effet, quelles que soient les actions considérées :

$$\rho(b, a) + \rho(a, b) = 1.$$

Il s'ensuit que, si l'on opère une λ-coupe (cf. (r.5.3.7)) de la relation floue définie par l'indice ρ, la relation non floue qui en découle est automatiquement antisymétrique dès lors que $\lambda \geq 1/2$. Aucune situation d'indifférence clairement identifiée ne peut donc apparaître sous la forme b S a et a S b.

Bana e Costa et Vincke (à paraître) ont étudié la relation floue de préférence stricte définie par :

$$\sigma_P(b, a) = \rho(b, a). \qquad \text{(r.5.3.18)}$$

Ils ont en particulier montré que toute relation non floue P_λ qui s'en déduit par λ-coupe (cf. (r.5.3.7)) est transitive.

Ils ont proposé et étudié un autre indice fondé non pas sur les seules différences que sont $w^m(b, a)$ et $w^M(b, a)$ (cf. (r.5.3.13) et (r.5.3.14)) mais sur leurs quatre composantes. Ils considèrent pour cela le rectangle montré figure 5.3.3. Il n'y a ici matière à discussion que si la première bissectrice coupe ce rectangle. L'indice en question est défini comme le rapport de la surface de la

portion favorable à la surface totale du rectangle. Ils ont montré que ce second indice possédait la même propriété de transitivité que le précédent.

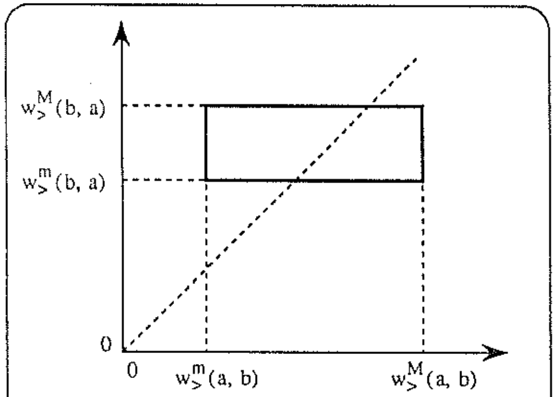

Figure 5.3.3. Procédure par compensation probante

Revenons sur la restriction implicite qui figure plus haut quant à la façon dont l'indice de crédibilité $\sigma_P(b, a) = \rho(b, a)$ satisfait l'exigence 3 des indices de crédibilité. Posons :

$$L(b, a) = w^M(b, a) - w^m(b, a).$$

Supposons $L(b, a)$ voisin de 0 avec $\rho(b, a) = 0{,}5$. Considérons un autre couple (d, c) tel que $L(d, c)$ est voisin de L^*, L^* étant définie comme la longueur maximum que peut atteindre l'intervalle L.

L'affirmation d P c est-elle réellement appuyée par des arguments qui la rendent plus crédible que l'affirmation b P a si on a $\rho(d, c) = 0{,}6$? L'embarras que suscite une telle question provient, à notre avis, pour une large part, du fait que l'affirmation porte sur une préférence stricte. Il nous semble que, dans le cas considéré, l'affirmation d S c est moins crédible que l'affirmation b S a bien que $\rho(d, c) > \rho(b, a)$. Cela tient au fait que, pour ρ voisin de 1/2 et L voisin de 0, l'indifférence s'impose alors que c'est l'incomparabilité qui s'impose si L est voisin de L^* et ρ voisin de 1/2. Nous suggérons donc l'étude d'un indice de la forme :

$$\sigma_S(b,a) = f[L(b, a), \rho(b, a)] \qquad \text{(r.5.3.19)}$$

avec :

$f(L, 0) = 0$, $f(L, 1) = 1$ pour $0 \leq L \leq L^*$,
$f(0, \rho)$ = fonction croissante de 0 jusqu'à 1 devenant très voisine de 1 dès que ρ n'est pas très voisin de 0,

$f(L^*, \rho)$ = fonction croissante de 0 jusqu'à 1 restant très voisine de 0 aussi longtemps que ρ n'est pas très voisin de 1,
$f(L, \rho)$ = fonction décroissante de L et croissante de ρ.

Il semble peu arbitraire de poser :

$$f(L, \rho) = f(0, \rho) - \frac{f(0, \rho) - f(L^*, \rho)}{L^*} \cdot L,$$
$$f(L^*, \rho) = 1 - f(0, 1 - \rho).$$

Pour achever de définir $f(L, \rho)$, il ne reste plus qu'à fixer $f(0, \rho)$ conformément à l'hypothèse de décroissance indiquée ci-dessus. Une solution possible est :

$$f(0, \rho) = \frac{\rho}{\alpha + (1 - \alpha)} \rho \text{ avec } \alpha \approx 0.$$

Pour interpréter α (et lui donner une valeur en pratique), on remarquera que :

$$f(0, \alpha) = \frac{1}{2 - \alpha} \approx 1/2.$$

α est donc la valeur qu'il faut donner à ρ pour que la crédibilité du surclassement tombe à 1/2 lorsque L est voisin de 0.

Comme nous l'avons indiqué au début de ce paragraphe c), les formules (r.5.3.14) présentent un point faible qui altère la probance du bilan par compensation et dont il n'a pas été tenu compte jusqu'ici. Il s'agit de la non prise en compte des seuils d'indifférence et/ou de préférence. Nous terminons ce paragraphe en proposant quelques voies susceptibles d'y remédier.

On peut se demander comment modifier les composantes du bilan défini par (r.5.3.14) de telle sorte que, sans changer (r.5.3.13), (r.5.3.16) ainsi que tout ce qui suit demeure valable. Il nous faut distinguer le cas H = P du cas H = S.

Pour H = P, on peut songer à remplacer (dans (r.5.3.14)) C(b $S_>$ a) par C(b P a) (ou éventuellement C(b $\succ$ a)). Cette façon de faire présente cependant un inconvénient. En effet (avec C(b P a)), un critère j tel que $g_j(b) - g_j(a) = p_j$ ne contribue ni à $w_>^m(b, a)$, ni à $w_>^M(b, a)$ alors qu'un critère h tel que $g_h(b) - g_h(a) = p_h + \varepsilon$ y contribue, pour une quantité ne tendant pas vers 0 lorsque ε tend vers 0. On échappe à cet inconvénient si l'on modifie (r.5.3.14) comme suit :

$$w_>^m(b, a) = \sum_{j \in C(bPa)} k_j^m \cdot [g_j(b) - g_j(a) - p_j(g_j(a))],$$

$$w_>^M(b, a) = \sum_{j \in C(bPa)} k_j^M \cdot [g_j(b) - g_j(a) - p_j(g_j(a))].$$

Pour H = S, il est exclu, dans le cas de quasi-critères, de simplement substituer C(b S a) à C(b $S_>$ a) car la présence, dans C(b S a), de certains critères vérifiant b I_j a pourrait contribuer à réduire les valeurs de $w_>^m(b, a)$ et de $W_>^m(b, a)$. On peut encore remédier à cet inconvénient en modifiant (r.5.3.14) comme suit :

$$w_>^m(b, a) = \sum_{j \in C(bIa)} k_j^m \cdot [q_j(g_j(a)] + \sum_{j \in C(b \succ a)} k_j^m \cdot [g_j(b) - g_j(a) + q_j(g_j(a))],$$
$$w_>^M(b, a) = \sum_{j \in C(bIa)} k_j^M \cdot [q_j(g_j(a)] + \sum_{j \in C(b \succ a)} k_j^M \cdot [g_j(b) - g_j(a) + q_j(g_j(a))].$$

Ce sont ces formules qui doivent alors intervenir dans (r.5.3.13) et (r.5.3.17) pour fonder (r.5.3.19). Le lecteur peut se demander pourquoi faire intervenir des seuils q_j comme on l'a fait dans les sommations ci-dessus et pourquoi n'avoir pas tout simplement procédé comme au 3.2.2 d) pour calculer le bilan par compensation dans le cas de quasi-critères. La réponse tient à l'influence que doivent avoir (puisqu'il s'agit d'un surclassement) les critères de la coalition C(b I a) sur la détermination des quantités $w^m(b, a)$ et $w^M(b, a)$. Ceci explique l'addition de la constante q_j dans tous les termes de la sommation.

Dans le cas de pseudo-critères (toujours pour H = S), la même remarque vaut par rapport à la solution préconisée au 3.2.2 d) à partir des fonctions $f_j(x)$. Les formules doivent s'écrire ici en opérant la même translation que dans le cas des quasi-critères, c'est-à-dire en faisant intervenir $f_j(x) + q_j$.

5.4 COMPLÉMENTS PRATIQUES

5.4.1 Généralités

Dans cette section, nous nous plaçons du point de vue d'un homme d'étude qui, confronté à un contexte concret d'aide à la décision, souhaite prendre appui sur une PAMC de type II. Nous supposerons qu'il en a choisi une, ce choix allant habituellement de pair avec celui d'une méthode alliant une procédure d'exploitation à cette PAMC (cf. 5.1.1 et 6.1.1). Nous n'aborderons qu'au 6.1.5 les aspects pratiques de ce choix sur la base des considérations du 5.1.2.

Quelle que soit la PAMC choisie, la mise en œuvre effective de celle-ci fait appel, comme nous l'avons montré au 3.1.6, à des informations inter-critères que nous avons qualifiées de numériques [1]. Ces informations doivent permettre d'attribuer une valeur à un certain nombre de paramètres qui, dans les PAMC qui nous intéressent ici, sont [2] d'une part les coefficients d'importance k_j et, d'autre part, les seuils de veto v_j. Les deux paragraphes qui suivent sont consacrés aux difficultés pratiques que peut rencontrer l'homme d'étude pour attribuer des valeurs à de tels paramètres.

Soulignons que les informations qu'il lui faut rechercher (le plus souvent contribuer à élaborer) visent à traduire en termes numériques [3], dans le cadre de la logique d'agrégation retenue, les positions de nature volontariste que peuvent avoir un ou plusieurs acteurs quant au rôle qu'il souhaite voir dévolu à chaque critère dans la formation des préférences globales. Comme nous l'avons vu (cf. 3.2.3), les informations dont il est question ici ont trait à ce qu'il est convenu d'appeler l'importance (relative) des critères [4].

Les valeurs qu'il convient d'attribuer aux k_j et aux v_j sont habituellement désignées sous le terme (impropre) de "données". Tout comme dans les PAMC de type I abordées au chapitre 4, les valeurs qui permettent de différencier l'importance du rôle dévolu à chaque critère ne sont pas naturellement données. Il peut arriver qu'un décideur soit amené à proposer spontanément ses propres valeurs numériques mais, même dans ce cas (nous y reviendrons au 5.4.2), une discussion critique s'impose, laquelle peut conduire à modifier les chiffres initiaux. Ces chiffres sont l'expression d'opinions, de systèmes de valeurs qui ne sont ni très explicites,

[1] Les informations inter-critères logiques font partie intégrante de la PAMC.

[2] A l'exception de quelques PAMC très particulières que nous n'avons fait qu'évoquer et sur lesquelles nous ne reviendrons pas ici.

[3] Le qualificatif "numérique" doit être pris ici dans un sens large, les nombres en question pouvant n'avoir, dans certains cas, qu'une signification ordinale (comme dans ORESTE ou MELCHIOR).

[4] Pour une définition plus précise de cette notion, voir Roy et Mousseau (à paraître).

ni naturellement quantifiés, ni toujours compatibles avec la logique d'agrégation. Cela sera d'autant plus vrai que le décideur sera peu accessible, non réduit à un seul individu ou mal identifié.

Considérons un instant le cas (exceptionnel) où l'homme d'étude peut raisonnablement vouloir chercher à décrire, le plus fidèlement possible, les préférences existantes d'un décideur individuel avec lequel il a un contact direct ne risquant pas de perturber ces préférences. Il peut alors concevoir son travail pour attribuer une valeur aux k_j et aux v_j dans une optique d'ajustement [1], les valeurs à attribuer étant celles qui permettent au modèle de rendre compte, au mieux, des préférences pré-existantes. En-dehors de ce cas, le caractère hypothétique et mal déterminé du système de préférences (provenant du contenu parfois vague des opinions, de leur diversité selon l'acteur considéré, de la possibilité de les faire évoluer sous l'effet des questions posées) rend cette optique d'ajustement (et, a fortiori, d'estimation) sans objet. L'attribution des valeurs aux k_j et aux v_j doit alors être conçue dans le cadre d'une démarche constructive [2] ayant pour objet de définir une ou plusieurs hypothèses de travail jugées pertinentes pour apporter des éléments de réponse aux questions étudiées.

Pour les raisons qui précèdent, il est souvent difficile de se contenter d'un seul jeu de valeurs pour les k_j et pour les v_j. Le concept d'analyse de robustesse, introduit dans le dernier paragraphe de cette section, permet de prendre effectivement en considération le caractère mal déterminé des k_j et des v_j, de même d'ailleurs que d'autres grandeurs de nature également économique ou, au contraire, plus technique (spécifiques de la PAMC ou de la procédure d'exploitation).

[1] S'il doit faire l'hypothèse qu'il existe, dans la tête du décideur, des "vraies valeurs" qu'il lui faut approcher au mieux, il pourra même parler d'estimation.

[2] Cf. 1.7 ou Roy (1992).

5.4.2 Attribution de valeurs aux coefficients d'importance k_j

a) Quelques rappels

La signification des coefficients k_j dans les PAMC auxquelles on s'intéresse ici [1] se fonde sur les considérations développées au 3.1.2. Dans ce qui suit, il importe d'avoir présent à l'esprit le caractère intrinsèque de ce mode d'appréciation de l'importance des critères : la valeur attribuée à k_j est intrinsèquement liée à ce que le critère g_j a pour objet d'appréhender (c'est-à-dire essentiellement les conséquences qui confèrent un sens à son axe de signification) mais nullement à la façon dont il l'appréhende (c'est-à-dire essentiellement la façon de coder les conséquences prises en compte sur l'échelle du critère). C'est dire qu'un changement d'unité ou, plus généralement, l'adoption d'un codage différent revenant à substituer à g_j une transformée monotone croissante du critère initial [2] n'affecte pas la valeur de k_j (il en va généralement autrement dans les PAMC de type I [3], cf. 3.2.3). Toutefois, l'importance accordée à un critère n'ayant de sens que relativement à celle accordée aux autres critères de F, l'attribution d'une valeur à k_j ne peut se faire indépendamment des valeurs attribuées aux autres coefficients d'importance, ceci restant vrai même si l'on ne norme pas à 1 la somme de ces coefficients.

Accroître la valeur de k_j conduit, toutes choses égales par ailleurs, à accroître l'importance accordée au critère g_j. De plus (contrairement à ce qui se passe dans les PAMC de type I, cf.

[1] à savoir les PAMC de type ELECTRE fondées sur les concepts de concordance et de discordance. Le lecteur qui souhaite replacer ce qui suit dans un cadre plus général relira, avec profit, le 3.2.3.

[2] De façon très locale et seulement dans le cas de pseudo-critères, certains modes de comparaison peuvent se trouver légèrement modifiés sous l'effet d'une telle transformation dans des PAMC telles qu'ELECTRE III du fait de l'hypothèse de linéarité qui sous-tend la définition du coefficient φ_j dans (r.5.2.7).

[3] ou encore dans une PAMC de type II faisant intervenir des taux de substitution, cf. 5.3.2.3.

3.2.3 a)), l'inégalité $k_j > k_i$ s'interprète comme : "g_j a une importance supérieure à celle de g_i" en ce sens que g_j se voit conférer un rôle plus décisif ("il pèse plus lourd") dans la définition des préférences globales que le critère g_i. Parler de "poids" pour désigner les k_j ne fait donc courir ici aucun risque de confusion : l'image que véhicule ce terme constitue une métaphore qui ne recèle pas d'effets pervers comme dans le cas de la somme dite pondérée (cf. 3.2.3 a)).

b) Quelques constatations empiriques [1]

Bien que vague, la notion d'importance apparaît comme familière à la plupart des intervenants dans les processus de décision. Ils parlent spontanément du poids élevé ou négligeable de tel ou tel critère ; ils font volontiers la comparaison de ces poids avec tel ou tel autre. Pour la plupart d'entre eux, cette notion a un caractère qualitatif. Pourtant, ils n'éprouvent aucune gêne à attribuer une valeur aux k_j, même sans qu'on le leur demande. Cette dernière constatation appelle quelques commentaires.

Lorsqu'un intervenant d'un processus de décision s'exprime sur cette notion vague d'importance et, a fortiori, lorsqu'il tente de la quantifier, il n'est généralement pas conscient des points suivants [2].

– Toute valeur attribuée à k_j n'a de sens que relativement à une PAMC définie (cf. 3.2.3 b)).

– Si des valeurs sont attribuées aux k_j seulement par référence à la signification de chaque critère (autrement dit en ignorant ou en ne tenant aucun compte de la définition précise des échelons des différentes échelles ou des unités associées et, plus généralement, de tous les aspects du codage des $g_j(a)$), alors le jeu de poids qui en résulte est impropre à un calcul de somme pondérée.

[1] Ces constatations sont fondées sur l'expérience personnelle des auteurs ainsi que sur d'autres travaux menés au LAMSADE et ailleurs.

[2] Pour plus de précisions, voir notamment Mousseau (1993).

– Le fait que les actions réelles confèrent aux critères g_j des performances dispersées d'un bout à l'autre de son échelle E_j ou, au contraire, regroupées dans un voisinage restreint situé à tel ou tel endroit de E_j concerne le caractère plus ou moins discriminant du critère mais en aucun cas la valeur qu'il convient d'attribuer à k_j.

On peut donc affirmer que si les différents intervenants d'un processus de décision perçoivent en général, sans difficultés, le lien qui existe entre leur propre système de valeurs et le poids plus ou moins élevé qu'il convient d'attribuer à chaque critère, ils n'ont pas pour autant conscience de la complexité que cache cette notion d'importance. C'est pourquoi :

– il est déconseillé de retenir, sans examen critique et éventuelles modifications, les valeurs des k_j qu'un "décideur" propose ou même tente d'imposer ;
– il est souhaitable que l'homme d'étude fournisse un minimum d'explications sur la nature de ce lien compte-tenu de la PAMC retenue, même si de telles explications perturbent fréquemment les praticiens ; il peut les rassurer en faisant valoir que l'aide à la décision peut prendre appui non pas sur un seul mais sur plusieurs jeux de poids : cela peut permettre de prendre en compte les difficultés qu'il y a à traduire (en termes numériques dans le cadre de la PAMC), de façon volontariste, la notion vague d'importance ou encore le fait que cette notion d'importance doit exprimer des systèmes de valeurs qui ne sont pas les mêmes pour tous les intervenants.

Tout ce qui s'est passé antérieurement à la prise en charge d'un problème, la culture des principaux intervenants concernés par le problème, la nature des enjeux qui lui sont attachés et bien d'autres facteurs sont susceptibles d'influencer la façon de procéder pour attribuer une valeur aux k_j. Il nous paraît donc vain de chercher à mettre au point une méthode systématique susceptible de donner satisfaction dans tous les cas [1]. C'est pourquoi

[1] Le lecteur trouvera dans Mousseau (1993) une abondante bibliographie sur les méthodes proposées.

nous nous bornons à présenter ci-après quelques principes qui nous semblent avoir une portée relativement générale et, finalement, une façon de faire conforme à ces principes qui a fait ses preuves dans plusieurs cas concrets.

c) Quelques principes généraux

PRINCIPE n° 1 : Seule une interaction comportant une part non négligeable de dialogue entre homme d'étude et intervenants dans le processus de décision (décideur ou personne agissant en son nom) est susceptible de permettre l'élaboration (il serait impropre ici de parler de recueil et, encore moins, d'extraction) d'informations à partir desquelles un ou plusieurs jeux de poids pourront être conçus et justifiés.

PRINCIPE n° 2 : Pour que l'interaction ci-dessus ne risque pas de reposer sur des malentendus (mauvaise interprétation de certains termes entrant dans les questions, présence d'hypothèses implicites particulièrement gênantes dans la formulation des réponses, ...), il convient d'éviter d'interroger directement sur la valeur des poids ; l'objectif étant la construction d'un ou plusieurs s.r.p., il semble préférable de formuler les questions en termes d'actions à comparer.

PRINCIPE n° 3 : Les actions à comparer doivent être réalistes mais non réelles ; faire comparer :
– des actions trop irréalistes (caractérisées par exemple par des niveaux de performances jamais observés ou encore des combinaisons de performances invraisemblables) risquerait d'aboutir à des réponses relativement arbitraires de la part de la personne interrogée qui se verrait confrontée à des situations tout-à-fait nouvelles vis-à-vis desquelles elle n'a jamais eu l'occasion, ni de façonner au contact d'une pratique, ni d'argumenter auprès d'autrui, des préférences quelconques ;
– des actions trop réelles risquerait d'aboutir à des réponses faisant intervenir certains aspects trop spécifiques de ces actions volontairement laissés de côté dans l'aide à la décision telle qu'elle a été conçue en relation avec la famille cohérente de critères adoptés.

PRINCIPE n° 4 : Lorsqu'un jugement de préférence est demandé relativement à deux actions (comparaison par paires), il importe d'une part de clairement caractériser chacune de ces actions par son vecteur de performances et, d'autre part, de limiter à trois (exceptionnellement à quatre) le nombre des critères sur lesquels ces deux actions ont des performances distinctes (au-delà de quatre, les difficultés de comparaison deviennent trop grandes et rendent les réponses peu fiables) ; sur chacun des critères conduisant à des performances distinctes, il importe que leur différence soit un peu supérieure au seuil de préférence sans toutefois l'être trop afin d'éviter tout phénomène de type veto.

PRINCIPE n° 5 : Afin de réduire l'effort cognitif demandé à la personne interrogée et d'éviter de susciter de sa part des modes de raisonnement faisant intervenir des considérations de type II [1], il est conseillé de faire jouer un rôle privilégié, pour définir les actions à comparer, à une action b_0 dite **action de référence** caractérisée par des performances $g_j(b_0)$ se situant au voisinage de la médiane des performances des actions réelles susceptibles d'intervenir dans l'aide à la décision.

PRINCIPE n° 6 : Même avec des questions relativement simples (comparaison par paires) prenant appui sur une action de référence afin de réduire la variété des actions à considérer, il importe de chercher à limiter, autant que faire se peut, le nombre des questions à poser de façon à ne pas provoquer une lassitude chez l'interviewé, laquelle serait néfaste à la qualité des réponses ; il faut toutefois poser assez de questions non seulement pour élaborer une information suffisamment riche mais aussi pour permettre des contrôles de cohérence.

d) Une façon de procéder

La façon de procéder pour attribuer une valeur aux poids k_j dont nous traçons les grandes lignes ci-après opère de façon indirecte. Elle consiste à poser une série de questions conformé-

[1] Cf. 3.1.1, lesquelles n'ont pas leur place dans les PAMC qui nous intéressent ici, cf. 5.1.1.

ment aux principes ci-dessus à un intervenant qui peut être soit un individu, soit un groupe d'individus. Elle vise non pas à obtenir une valeur unique pour chaque k_j mais à délimiter un domaine $D(\underline{k})$ renfermant les jeux de poids $\underline{k} = (k_1, ..., k_n)$ convenables pour conduire l'aide à la décision. Précisons que :

– cette façon de faire a été expérimentée dans divers contextes concrets [1] ;

– lorsque l'intervenant interrogé est un groupe d'individus, il peut apparaître des divergences irréductibles quant à la réponse à apporter à certaines questions ; dans ce qui suit, nous n'envisagerons pas cette éventualité ; lorsqu'elle se produit, la procédure demeure applicable mais au prix de quelques complications assez évidentes ;

– nous nous bornons ci-après à indiquer les grandes lignes de cette façon de faire ; pour une présentation plus systématique, nous renvoyons à Mousseau (1993).

Avant d'expliciter plus avant la nature des questions et leur enchaînement, il nous faut présenter un résultat élémentaire montrant de quelle façon la réponse apportée à une comparaison par paires dans le cadre du principe n° 4 contribue à délimiter $D(\underline{k})$. Nous achèverons ce paragraphe en expliquant comment le système d'inégalités finalement obtenu pour définir $D(\underline{k})$ peut être utilisé pour mettre en évidence une série de jeux de poids contrastés aptes à servir de point de départ pour une analyse de robustesse.

Soit a et b deux actions caractérisées par leurs vecteurs-performances $\underline{g}(a)$ et $\underline{g}(b)$. Notons H le sous-ensemble des critères pour lesquels les performances de a et b diffèrent (autrement dit, $g_j(a) = g_j(b)$, $\forall j \notin H$). Supposons que, pour chacun des critères de H, les conditions du principe n° 4 soient vérifiées. Il existe alors une unique partition {I, J} de H telle que :

$$\forall i \in I : g_i(a) > g_i(b) + p_i(g_i(b)),$$
$$\forall j \in J : g_j(b) > g_j(a) + p_j(g_j(a)).$$

Examinons à quelles conditions doivent satisfaire les poids k_j pour qu'une PAMC fondée sur l'analyse de la concordance, comme le sont presque toutes celles envisagées dans le présent chapitre, soit apte à rendre compte d'un jugement de préférence du type "entre a et b, je préfère a". Cela justifie de

[1] On en verra un exemple au chapitre 8. Pour une autre illustration plus détaillée de sa mise en œuvre sur un cas concret, voir Roy et al. (1983).

chercher à accepter, dans le s.r.p., a S b et Non(b S a). Ceci implique (dans la quasi-totalité des PAMC auxquelles on s'intéresse) :

$$k[C(a\ S\ b)] > k[C(b\ S\ a)],$$

ce qui équivaut à :

$$\sum_{i \in I} k_i > \sum_{j \in J} k_j. \qquad \text{(r.5.4.1)}$$

Une réponse du type "entre a et b, je suis indifférent" conduit à poser (selon un raisonnement identique) :

$$\sum_{i \in I} k_i \sim \sum_{j \in J} k_j. \qquad \text{(r.5.4.2)}$$

Enfin, une réponse du type "entre a et b, je ne sais pas ou je ne veux pas me prononcer" n'apporte aucune information quant à l'importance relative qu'il convient d'accorder respectivement à la coalition I des critères favorables à a et à la coalition J de ceux favorables à b.

Supposons maintenant définie une action de référence b_0 conformément au principe n° 5. Notons b_I une action caractérisée par le vecteur-performances suivant :

$$g_j(b_I) = g_j(b_0),\ \forall\ j \notin I,$$
$$g_j(b_I) = g_j(b_0) + e_j,\ \forall\ j \in I$$

où e_j désigne un écart de performance choisi de façon à être légèrement supérieur à $p_j(g_j(b_0))$. Lorsque $I = \{i_1, i_2, \ldots\}$, b_I sera également notée $b_{i_1 i_2 \ldots}$.

Tout jugement en termes de préférence stricte ou d'indifférence entre deux actions b_I et b_J conduit alors à restreindre le domaine $D(\underline{k})$. Compte-tenu du principe n° 6, il serait peu réaliste de chercher à faire comparer de telles actions pour toute coalition I et J. Afin de limiter autant que faire se peut le nombre de questions à poser, on peut procéder en suivant les étapes ci-après. Elles ont été conçues de manière à enchaîner les questions de telle sorte que chacune soit susceptible d'apporter un supplément d'information effectif. Si la numérotation des étapes indique un ordre logique de progression, il n'est pas exclu (en particulier lors des étapes 2, 3 et 4) que certaines réponses amènent à revenir à une étape antérieure ou, au contraire, à sauter une étape [1].

[1] Pour plus de précisions, voir Mousseau (1993).

1) Etape n° 1 : Recherche d'un préordre sur les coefficients k_j

Afin d'initialiser la procédure, l'homme d'étude doit tout d'abord choisir, en collaboration avec le ou les individus questionnés (désormais désignés sous le sigle Z), les caractéristiques de l'action de référence b_0. Il présente ensuite à Z les actions $b_1, \ldots, b_n$ (correspondant respectivement à $I = \{1\}, \ldots, I = \{n\}$).

La première question posée a pour objet de savoir laquelle (ou lesquelles) des actions $b_1, \ldots, b_n$ est la meilleure (ou sont les meilleures ex æquo). Si b_n est la seule meilleure, il vient, d'après (r.5.4.1) :

$$k_n \geq k_j,\ \forall\ j \in F.$$

Si b_n est jugée la meilleure ex æquo avec b_h, il vient, d'après (r.5.4.2) (et en simplifiant quelque peu) :

$$k_n = k_h \geq k_j,\ \forall\ j \in F.$$

L'homme d'étude élimine ensuite la (ou les) action(s) sélectionnée(s) par Z et renouvelle la même question sur les actions restantes. Il parvient ainsi à ordonner, selon un préordre complet, les poids $k_1, \ldots, k_n$. Dans ce qui suit, on supposera, de façon non restrictive :

$$k_n \geq k_{n-1} \geq \ldots \geq k_1. \qquad \text{(r.5.4.3)}$$

Si ce préordre contient des ex æquo, l'homme d'étude devra s'assurer que les critères correspondants ont bien une égale importance aux yeux de Z.

A l'issue de cette première étape, les questions posées par l'homme d'étude ne portent plus que sur des comparaisons par paires. Ces dernières sont de la forme (b_I, b_J). Les réponses de Z doivent être de l'un des trois types envisagés ci-dessus à propos de la paire {a, b}. Les réponses successives génèrent des inégalités de la forme (r.5.4.1) ou des pseudo-égalités de la forme (r.5.4.2) qui contribuent, avec (r.5.4.3), à cerner le domaine $D(\underline{k})$.

Les trois étapes suivantes visent à enrichir progressivement le préordre complet (r.5.4.3) en intercalant [1], à l'endroit approprié, des sommes de la forme $k_h + k_l$. Dans ce qui suit, on supposera qu'il n'existe pas de critères

[1] Cet enrichissement progressif ne conduit pas, à proprement parler, à un préordre complet car il pourrait être abusivement restrictif et générateur d'incohérences artificielles de systématiquement réduire à des égalités les conditions (r.5.4.2). Pour les prendre formellement en compte, on peut par exemple interpréter une pseudo-égalité de la forme $k_j \sim k_h + k_l$ comme une double inégalité du type $-k_1 \leq k_j - (k_h + k_l) \leq k_1$.

ayant même poids ; lorsqu'il en est autrement, on peut raisonner sur un sous-ensemble des critères formé d'un seul représentant par classe d'ex æquo.

Etape n° 2 : Trouver des valeurs de i et j telles que $k_j <$ (ou voisin de) $k_i + k_{i+1} < k_{j+1}$

En tout premier lieu, il convient de s'intéresser au cas i = 1. La valeur de j (si elle existe) s'obtiendra aisément en faisant comparer successivement les paires $\{b_n, b_{1,2}\}$, $\{b_{n-1}, b_{1,2}\}$, ... Si $b_{1,2}$ est préférée à b_n, c'est la preuve qu'il n'existe aucun couple (i, j) répondant à l'objectif de l'étape 2. On a en effet (condition pertinente pour cerner $D(\underline{k})$:

$$k_n < k_1 + k_2 < k_i + k_{i+1},\ \forall\ i > 1.$$

Ce cas correspond à des critères dont l'importance est relativement voisine puisque l'écart entre les poids extrêmes $k_n - k_1$ est borné par k_2, c'est-à-dire par le second des poids dans l'ordre croissant. Le lecteur vérifiera sans peine que toute question ayant trait à l'étape n° 3 est alors sans intérêt. Il parviendra à des résultats similaires si b_n est indifférente à $b_{1,2}$.

Si, au contraire, b_n est préférée à $b_{1,2}$, il faut successivement soumettre à Z les paires $\{b_{n-1}, b_{1,2}\}$, $\{b_{n-2}, b_{1,2}\}$, ... jusqu'à obtenir soit une indifférence, soit une préférence en faveur de $b_{1,2}$ [1]. Soit b_{j_1} la première action avec laquelle cette transformation des préférences est observée. Il vient, d'après (r.5.4.1) et (r.5.4.2) (selon la réponse fournie par Z) :

$$\begin{aligned} &k_{j_1} \text{ voisin de } k_1 + k_2 \text{ ou} \\ &k_{j_1} < k_1 + k_2 < k_{j_1+1}. \end{aligned} \qquad (r.5.4.4)$$

Arrêtons-nous un instant sur la solution $j_1 = n - 1$. C'est la preuve qu'il n'existe qu'un seul couple (i, j) répondant à l'objectif de l'étape n° 2 : celui concerné par (r.5.4.4) avec $j_1 = n - 1$. Nous verrons qu'alors l'étape n° 3 n'a qu'une portée limitée. Dans ce qui suit, jusqu'à la fin de l'étape n° 3, nous nous intéresserons surtout au cas $j_1 < n - 1$.

La plus petite valeur possible pour j_1 est 3. Il se peut toutefois que l'on ait b_3 préférée à $b_{1,2}$. La transformation des préférences envisagée plus haut ne se produit donc pas et il n'y a pas de solution en j_1 pour i = 1. L'inégalité $k_1 + k_2 < k_3$ obtenue dans ces conditions montre la faible importance accordée aux critères g_1 et g_2.

[1] Faisons observer que la nature des actions à comparer rend ici peut vraisemblable le troisième type de réponse envisagé plus haut à propos de a et b.

Le cas i = 2 peut être étudié exactement selon les mêmes modalités que le cas i = 1. Il conduira de la même façon :

– soit à $k_n - k_2 <$ (ou voisin de) k_3 et l'intérêt de l'étape n° 2 sera épuisé ;
– soit à la mise en évidence d'une valeur $j_2 \geq j_1$ vérifiant des conditions similaires à (r.5.4.4) : selon la valeur de la différence $n - j_2$, l'homme d'étude poursuivra ou non dans le cadre de l'étape n° 2 ;
– soit à $k_2 + k_3 < k_4$; si cette éventualité se produit (de même que si $n - j_2$ est élevée), l'homme d'étude pourra envisager le cas i = 3.

Etape n° 3 : Trouver des valeurs de h, i et j telles que $k_i + k_{h-1} < k_j <$ (ou voisin de) $k_i + k_h$ $(h \neq i + 1)$

En tout premier lieu, il convient de poser i = 1. La solution en j vérifie alors nécessairement $j > j_1$. Pour $j_1 = n - 1$, ceci implique $j = n$ et la seule information à rechercher concerne alors la plus petite valeur de h (si elle existe) telle que $k_n < k_1 + k_h$ (laquelle permet de borner supérieurement $k_n - k_1$). Il faut pour cela faire intervenir successivement les paires $\{b_n, b_{1,3}\}$, $\{b_n, b_{1,4}\}$, ...

Pour $j_1 < n - 1$, il est intéressant de commencer en posant j = n : en faisant comparer les mêmes paires que ci-dessus, on obtiendra (si elle existe) la plus petite valeur de h telle que $k_n - k_1 < k_h$. En adoptant une valeur de j intermédiaire entre n et j_1, on pourra mettre en évidence la plus petite valeur de h (si elle existe) telle que $k_j - k_1 < k_h$.

Les cas i = 2, 3, ... peuvent être étudiés de la même façon. Ils sont respectivement limités aux valeurs de j vérifiant $j \geq j_2$, $j \geq j_3$, ... Etant donné que $j_1 \leq j_2 \leq j_3 \leq ...$, le champ de variation de j se restreint progressivement et s'annule après $j_i = n - 1$. Cela montre que seules les petites valeurs de i présentent normalement de l'intérêt sauf si j_i est proche de son maximum $j_{n-2} = n - 1$. Cette situation extrême correspond à $k_{n-2} + k_{n-1} < k_n$, ce qui révèle une forte disparité des poids les plus élevés.

Tous les cas évoqués ci-dessus ne pouvant être examinés (cf. principe n° 6), l'homme d'étude a intérêt à exploiter l'information successive qu'il acquiert sur les différences de type $k_j - k_i$ (borne inférieure de valeur élevée ou, au contraire, borne supérieure de valeur faible) pour choisir les zones-cibles de ses questions ultérieures. Il est clair que sa stratégie doit être différente selon la façon dont il a pu borner $k_n - k_1$ ou encore selon qu'il existe ou non certaines valeurs de i telles que $k_{i+1} - k_i$ se trouve être bornée inférieurement par une valeur élevée ou supérieurement par une valeur faible.

Etape n° 4 : Pour des valeurs de $i < r < s < j$ judicieusement choisies, connaître la position relative de $k_i + k_j$ et $k_r + k_s$

Par valeurs judicieusement choisies, on entend des valeurs telles que la position relative en question ne peut être logiquement déduite des relations déjà établies. Dès qu'une inégalité de la forme $k_r + k_s < k_h$ (avec $r > 1$) aura été établie, il deviendra inutile de s'intéresser à des quadruplets (i, r, s, j) vérifiant $j \geq h$.

Des quadruplets pourront être judicieusement choisis à partir de résultats de la forme $k_r + k_s > k_h$ avec $1 < r < s < h$. Les valeurs $i = 1, 2, ..., r - 1$ peuvent alors être successivement envisagées en faisant comparer les paires $\{b_{i,j}, b_{r,s}\}$.

Il est clair que les réponses de Z peuvent (ne serait-ce que sous l'effet de la fatigue) engendrer des contradictions avec le modèle. Dans ce cas, le domaine $D(\underline{k})$ défini par les conditions recueillies sera vide. Il n'est donc pas sans intérêt pour l'homme d'étude de pouvoir détecter, aussitôt qu'elle est formulée, toute réponse incompatible avec celles qui l'ont précédé. La technique de description segmentée (cf. Roy (1969-1970, ch. 10)) dont il va être question ci-après permet d'y parvenir aisément (elle a été programmée par Mousseau (1993)). A quelque moment qu'elle soit décelée, la séquence de réponses qui recèlent une contradiction peut être montrée à Z. Il est en général simple de lui faire comprendre en quoi consiste cette contradiction. Il convient alors de savoir laquelle des réponses mérite d'être modifiée.

Considérons désormais un domaine $D(\underline{k})$ défini par un ensemble de conditions de type (r.5.4.1), (r.5.4.2), (r.5.4.3). Il n'est pas restrictif de poser $k_1 = 1$ (cf. 3.2.3 c)). La technique de description segmentée a pour objet de délimiter (grâce à un algorithme décrit dans la référence qui vient d'être citée) des segments successifs sur lesquels les différents poids $k_2, ..., k_n$ définissant un élément de $D(\underline{k})$ (supposé non vide) peuvent librement varier. Ces segments sont respectivement de la forme :

$$f_2^m \leq k_2 \leq f_2^M \qquad \text{(r.5.4.5)}$$
$$f_3^m(k_2) \leq k_3 \leq f_3^M(k_2) \qquad \text{(r.5.4.6)}$$
$$f_4^m(k_2, k_3) \leq k_4 \leq f_4^M(k_2, k_3) \qquad \text{(r.5.4.7)}$$
$$\dots$$
$$f_n^m(k_2, k_3, ..., k_{n-1}) \leq k_n \leq f_n^M(k_2, k_3, ..., k_{n-1}) \qquad \text{(r.5.4.8)}$$

où les bornes inférieure f_j^m et supérieure f_j^M sont des nombres pour $j = 2$ et des fonctions de plus en plus complexes lorsque j croît jusqu'à n. Ces bornes, que la procédure de description segmentée permet de calculer, sont telles que $\underline{k} \in D(\underline{k})$ si et seulement si les composantes de $\underline{k}$ vérifient le système d'inégalités (r.5.2.5) à (r.5.2.8). Ce système constitue, par définition, la **description segmentée** de $D(\underline{k})$. Précisons enfin que l'algorithme qui permet de construire les bornes f_j^m et f_j^M permet également de déceler les séquences de conditions contradictoires lorsqu'il en existe.

La description segmentée de $D(\underline{k})$ présente de l'intérêt car elle permet une exploration rapide et facile du domaine. En attribuant successivement, à chacun des poids $k_2, ..., k_n$, une valeur voisine du milieu de l'intervalle qui lui est imparti, on définit un jeu de poids que nous qualifierons de central. On peut, de la même façon, définir des jeux de poids dans lesquels certains des k_j sont positionnés au voisinage de l'une ou de l'autre de l'extrémité du segment. Il est aisé de générer, sur ces bases, une famille de jeux de poids relativement contrastés dont on verra l'intérêt pour l'analyse de robustesse. Climaco (1992) a récemment exploré une autre voie pour tirer parti de cette description segmentée en vue de mettre en évidence l'impact sur certains types de conclusions du jeu de poids retenu.

Attirons, pour terminer, l'attention sur l'intérêt qu'il y a à obtenir, dans le cadre de l'étape n° 4, des inégalités de la forme $k_i + k_j < k_r + k_s$. Elles sont souvent utiles pour compléter celles de la forme $k_j < k_i + k_h$ obtenues dans le cadre des étapes n^{os} 2 et 3 en vue d'affaiblir les bornes supérieures f_j^M grâce à $k_j < k_r + k_s - k_i$. L'absence de telles contraintes peut conduire à un domaine $D(\underline{k})$ trop ouvert, laissant la place à des jeux de poids qui s'étirent sur un intervalle $[k_1 = 1 ; k_n]$ peu réaliste. Pour cette raison et pour d'autres, il est recommandé de soumettre à l'appréciation de Z, outre le jeu de poids central, un certain nombre de jeux de poids extrêmes afin d'en discuter l'intérêt. Cela peut amener l'homme d'étude à formuler quelques questions supplémentaires [1] permettant de justifier certaines inégalités additionnelles pertinentes pour réduire $D(\underline{k})$.

5.4.3 Attribution de valeurs aux seuils de veto v_j

La signification des seuils de veto v_j se fonde sur les considérations développées au 3.1.3 dont nous conserverons ici les notations. Ce concept permet d'appréhender la notion d'importance sous une autre facette que celle concernée par les poids. Comme on l'a vu dans les sections 5.2 et 5.3, toutes les PAMC de type II ne font pas intervenir ce concept. Ce qui suit concerne donc essentiellement les PAMC utilisées dans les méthodes ELECTRE.

Cette facette de l'importance, appréhendée grâce au veto, n'apparaît pas avec la même évidence, aux yeux des intervenants d'un processus de décision, que celle appréhendée par les poids.

[1] Voir à ce sujet le 8.4.1 qui fait intervenir une description segmentée très simple en raison du grand nombre d'égalités que comportent les conditions recueillies.

Toutefois, l'idée de veto, qui renvoie elle aussi aux procédures de vote, est familière et généralement facile à faire admettre comme étant pertinente. Il n'en demeure pas moins plus facile d'attribuer une valeur aux k_j qu'aux v_j. Cela tient en partie au fait que le praticien ressent fréquemment les premières comme moins arbitraires que les secondes.

Rappelons (cf. 3.1.6) que v_j, comme k_j, est une donnée de type I. Contrairement aux poids, les veto ne sont pas invariants lorsqu'on modifie l'unité du critère g_j ou lorsqu'on lui substitue un autre codage par transformation monotone. Rappelons enfin que v_j (contrairement aux k_j) n'est pas obligatoirement un nombre mais peut varier avec l'une des deux performances concernées. Dans (r.3.1.6), le seuil de veto a été rapporté à la plus mauvaise des deux performances (ce qui en fait un seuil direct [1]) mais rien n'interdit de le faire varier en fonction de la meilleure (seuil inverse).

Pour attribuer des valeurs aux v_j, il convient tout d'abord de se demander, pour chaque critère g_j, si, compte-tenu de sa nature et de l'importance qui lui est accordée, on (c'est-à-dire l'homme d'étude, en concertation avec l'intervenant Z) juge souhaitable ou convenable d'attribuer à g_j le pouvoir de s'opposer à un surclassement unanime de la part des autres critères. Pour raisonner ce jugement, on peut faire intervenir deux actions a et b telles que (comme dans (r.3.1.6)) tous les critères autres que le $j^{ème}$ sont nettement favorables à b tandis que $g_j(b)$ est une des plus mauvaises performances envisageables et $g_j(a)$ une des meilleures. L'homme d'étude peut ensuite faire réagir Z vis-à-vis de la paire {b, a}. Deux cas sont alors possibles [2] :

[1] Cf. MMCAD, 9.3.2.

[2] Dans la logique non totalement compensatoire qui est celle des PAMC de type II, aucun autre cas n'est possible à moins que le critère g_j ait, à lui seul, une importance prépondérante ($k_j \geq \sum_{i \neq j} k_i$), ce qui pourrait conduire à a préféré ou indifférent à b. Dans ce cas, la valeur de v_j est sans grande importance. Nous n'envisagerons pas cette situation dans la suite.

1er cas : Z considère, sans hésitation, b comme préférable à a.
2e cas : Z éprouve des difficultés pour porter un jugement de comparaison entre a et b.

Dans le premier cas, il convient de ne reconnaître aucun pouvoir de veto à g_j. Cela équivaut à attribuer à v_j une valeur suffisamment élevée eu égard à l'étendue L_j de l'échelle E_j (v_j légèrement supérieur à L_j convient, sauf dans ELECTRE III, comme nous l'expliquerons en fin de paragraphe). Ce cas se rencontre principalement avec les critères de faible poids. Il n'est cependant pas exclu de reconnaître un pouvoir de veto effectif à un critère de très faible poids alors qu'un critère de poids égal ou supérieur n'aura pas ce pouvoir (cf. 8.4.2).

Dans le second cas, g_j doit se voir reconnaître un pouvoir de veto effectif : $v_j \leq (g_j(a) - g_j(b))$. Pour en fixer la valeur, on peut prendre appui sur les considérations qui suivent.

Partant des deux actions a et b considérées ci-dessus, on peut réduire progressivement la performance $g_j(a)$ (sans modifier aucune autre performance) de façon à appréhender une borne supérieure du veto notée $v_j^M[g_j(b)]$. En posant $g_j(a) = g_j(b) + p_j[g_j(b)]$ et en faisant croître $g_j(a)$, on peut, de la même façon, mettre en évidence une borne inférieure notée $v_j^m[g_j(b)]$.

L'homme d'étude doit chercher à savoir s'il convient de concevoir v_j comme dépendant ou indépendant de $g_j(b)$. Il peut pour cela chercher les raisons capables de justifier une influence sur v_j^M et v_j^m de la valeur initialement choisie pour $g_j(b)$. S'il n'en trouve pas, v_j peut être regardé comme constant. S'il en trouve, leur analyse doit permettre de prendre en compte analytiquement l'influence qu'il souhaite faire intervenir. Il peut par exemple poser (comme c'est le cas dans la plupart des logiciels) :

$$v_j[g_j(b)] = \alpha_j \cdot g_j(b) + \beta_j \text{ avec } \alpha_j \geq -1 \text{ (cf. (r.3.1.7))}$$
$$\text{et } \alpha_j \cdot g_j + \beta_j \geq p_j(g_j).$$

Le plus fort pouvoir de veto envisageable est obtenu en posant $g_j(b) = p_j[g_j(b)]$: dans ces conditions, dès que le critère g_j est discordant, le surclassement b S a est rejeté. Comme on l'a déjà suggéré au 3.1.3, il peut être pertinent de chercher à raisonner la plus ou moins grande force qu'il convient de conférer à ce pouvoir de veto en prenant appui sur le rapport $\frac{v_j}{p_j}$ (lorsque $p_j \neq 0$) : plus ce rapport est proche de 1 et plus cette force est élevée. On peut également souhaiter faire intervenir, dans cette analyse, l'étendue L_j de l'échelle du critère j puisqu'il n'y a pouvoir de veto effectif que si :

$$p_j \leq v_j \leq L_j.$$

Ceci montre l'intérêt que peut avoir l'indicateur $\frac{v_j - p_j}{L_j - p_j}$ (qui prend la valeur 0 pour une force maximum et 1 pour une force minimum). Rappelons que, quel que soit l'indicateur choisi, il ne faut pas chercher une liaison trop rigide entre l'ordre des critères qui en découle et celui défini par l'ordre des poids k_j. Si les seuils de veto et les poids concernent la même notion d'importance, ils se rapportent à deux facettes (cf. 3.1.2 et 3.1.3) qui peuvent faire apparaître des différences.

Soulignons que, en renforçant le pouvoir de veto d'un critère, on tend à appauvrir le s.r.p. découlant de la PAMC : certains surclassements peuvent disparaître (dans le cas de systèmes nets), la crédibilité de certains surclassements peut être réduite (dans le cas de systèmes flous). En attribuant des valeurs particulièrement faibles au veto, on court donc le risque de voir apparaître un très grand nombre de paires d'action incomparables. Dans ELECTRE III, il importe en particulier de ne pas perdre de vue l'aspect suivant : le mécanisme du veto (cf. (r.5.3.11) et (r.5.3.12) et principes n° 3 et n° 5 au 5.3.2 b)) peut affaiblir (sans toutefois l'annuler) la crédibilité d'un surclassement avant même que le seuil de veto ne soit atteint. Il peut de ce fait être prudent d'admettre qu'une hésitation de Z pour porter un jugement de préférence entre b et a (cf. second cas envisagé plus haut) peut correspondre, dans certains cas, à un degré de crédibilité non strictement égal à 0.

Les considérations qui précèdent expliquent que, dans bien des cas, pour certains des critères tout au moins, il serait arbitraire de n'attribuer qu'une seule valeur au veto $v_j[g_j(b)]$. C'est pourquoi on juge souvent plus satisfaisant de lui attribuer un intervalle $[v_j^m[g_j(b)] ; v_j^M[g_j(b)]]$ en cherchant toutefois à cerner une valeur centrale jugée comme étant la plus satisfaisante. Sur ces bases, il sera ensuite facile de générer (en vue de l'analyse de robustesse, cf. 5.4.4) un certain nombre de jeux de veto. Faisons observer que les intervalles $[v_j^m ; v_j^M]$ n'ont aucune raison d'être dépendants les uns des autres, contrairement à ce qui se passe avec les k_j (cf. fin du 5.4.2 d)).

5.4.4 Analyse de robustesse

Avant même de présenter ce concept, soulignons qu'il n'est pas propre aux PAMC de type II : il concerne de la même façon les PAMC de type I comme on l'a vu au 4.6. Il s'ensuit que, pour l'essentiel, ce qui est dit dans ce paragraphe dépasse le cadre du présent chapitre (seules les modalités de mise en œuvre qui figurent en fin de paragraphe lui sont véritablement spécifiques).

Comme on l'a vu à maintes reprises dans ce livre, si rigoureuse et scientifique que veuille être une démarche d'aide à la décision, l'homme d'étude se heurte à des sources d'arbitraire qui l'obligent à attribuer à certaines grandeurs une valeur conventionnelle (parce que les grandeurs en question sont mal connues, difficilement prévisibles ou encore mal déterminées). Il doit également prendre des options de modélisation qui font intervenir des éléments techniques, lesquels lui laissent une certaine marge de liberté (elle aussi source d'arbitraire) pour achever de définir son modèle. Tout cela amène fréquemment l'homme d'étude à hésiter sur la valeur à attribuer à ce que nous appellerons :

– des **paramètres économiques** : coefficients d'importance, seuils de veto, seuils de préférence, moyennes ou écarts-types dans une distribution de probabilités, coefficients caractérisant l'attitude face au risque dans une fonction d'utilité, ... ;

– des **paramètres techniques** : valeurs du niveau de concordance dans ELECTRE I ou IS (cf. 5.2.1), relations à retenir dans ELECTRE IV (cf. 5.3.1 b)), forme analytique à adopter pour une distribution de probabilités ou encore pour une fonction d'utilité (cf. 4.2.1.3 et 4.5.3).

Il peut lever ces hésitations simplement en attribuant, à chacun de ces paramètres, une valeur que nous qualifierons de centrale en ce sens que, dans la marge d'arbitraire qui lui est laissée, elle occupe une position aussi peu extrême que possible. Il peut aussi chercher à l'encadrer en appréhendant des valeurs par excès et par défaut (cf. 5.4.2 et 5.4.3) qui, tout en demeurant acceptables, ne peuvent plus être regardées comme centrales.

En fixant la valeur de chaque paramètre à sa valeur centrale, l'homme d'étude définit, en relation avec la PAMC retenue, un système relationnel de préférences particulier que nous désignerons désormais sous le nom de **système relationnel de référence** (ou, plus brièvement, **système de référence**). En appliquant une procédure d'exploitation à ce système de référence, il obtiendra des résultats lui permettant d'élaborer des recommandations. Ces dernières peuvent être plus ou moins tributaires des valeurs particulières attribuées à chaque paramètre. Des valeurs différentes auraient pu conduire à d'autres systèmes relationnels (sensiblement distincts du système de référence) aboutissant éventuellement à d'autres résultats et, peut-être, à d'autres recommandations. N'auraient-elles pas été, apparemment, tout aussi valables ?

Il est classique d'affronter cette question grâce à ce qu'il est convenu d'appeler une **analyse de sensibilité**. Elle consiste à analyser l'influence de chacun des paramètres sur le résultat de la procédure d'exploitation. Elle permet notamment de mettre en évidence ceux des paramètres dont la valeur, lorsqu'elle varie autour de sa position centrale, affecte le plus fortement les résultats. Une analyse de sensibilité ainsi conçue est loin d'être sans intérêt. Toutefois, les informations qu'elle fournit ont souvent un intérêt plus théorique que pratique. Pour le décideur, savoir qu'avec un jeu de paramètres J_1 telle décision paraît être la mieux adaptée et qu'elle doit être modifiée comme ceci ou comme cela selon que l'on augmente ou diminue la valeur de tel ou tel paramètre, n'aura souvent une portée concrète qu'assez restreinte. Il lui faut en effet décider, de façon unique, sans savoir s'il est

"réaliste de parier" sur J_1 ou sur des valeurs différentes de tel ou tel paramètre, sources d'instabilité des résultats. Ce qu'il attend en général, c'est de pouvoir connaître si une décision D_1, justifiée à partir de J_1, s'avèrera encore relativement satisfaisante ou, au contraire, tout-à-fait inadaptée si, dans le futur, on constatait que J_1 n'était pas un jeu convenable pour raisonner. Un catalogue détaillé indiquant, de façon nuancée, la recommandation la mieux adaptée aux diverses hypothèses de travail caractérisées par J_1, J_2, ... susceptibles de la modifier ne répond que très imparfaitement à une telle attente.

La réponse de l'homme d'étude sera, au contraire, plus satisfaisante s'il parvient à élaborer des recommandations très synthétiques, acceptables pour une vaste gamme de valeurs des paramètres économiques et techniques. De telles recommandations doivent être étayées à partir de conclusions que nous qualifierons de robustes. Par définition, une conclusion C sera dite **robuste** face à un domaine $\mathfrak{J}$ de variation de certaines paramètres s'il n'existe aucun jeu $J \in \mathfrak{J}$ qui invalide clairement C. Par **analyse de robustesse**, on désigne toute façon de faire qui concourt à l'élaboration de recommandations synthétiques fondées sur des conclusions robustes.

Le concept d'analyse de robustesse, tel qu'il vient d'être esquissé, mériterait d'être précisé mais cela sortirait du cadre de ce livre. Ce concept s'est déjà avéré très fécond dans divers travaux d'aide à la décision comme on le verra notamment dans les trois derniers chapitres de ce livre [1]. Nous schématisons ci-après une façon possible de conduire une analyse de robustesse. C'est celle que nous avons adoptée dans la plupart de nos travaux. D'autres façons de faire peuvent être cependant envisagées.

Notons J_0 le jeu de valeurs centrales sur lequel se fonde le système de référence. La mise en œuvre d'une procédure d'exploitation fournit divers résultats bruts (noyaux, affectations, préordres, ... comme on le montrera au chapitre 6). Sur de telles bases, l'homme d'étude tire des conclusions provisoires C_0. Il peut

[1] Voir aussi Valbon-Sutour (1993) et Roy et al. (1983).

ensuite chercher à les mettre à l'épreuve en examinant si ces conclusions C_0 demeurent toujours, sinon parfaitement valides, du moins à peu près acceptables, lorsqu'il substitue à J_0 un autre jeu de valeurs. Les jeux substituables possibles sont évidemment très nombreux car, même s'il ne retient, pour chaque paramètre, que trois valeurs (la valeur centrale et les valeurs par excès et par défaut), la combinatoire qui en découle conduit à 3^m jeux, m désignant le nombre des paramètres pour lesquels la marge d'arbitraire mérite d'être prise en considération. Il peut donc, pour débuter l'analyse de robustesse, procéder à cette substitution en ne faisant intervenir que les jeux d'une première famille, en nombre restreint (quelques dizaines), choisis de façon à être suffisamment contrastés pour être en mesure de déceler les variations auxquelles les conclusions C_0 résistent le moins bien. Cela doit lui permettre :

– D'affiner les conclusions C_0, éventuellement de les affermir ou, au contraire, de les transformer ; cela peut l'amener, dans certains cas, à remettre en question le choix des valeurs centrales, autrement dit à remplacer J_0 par J_1 ; notons C_1 les conclusions révisées sur la base de la première famille prise en considération.

– De considérer les conclusions C_1 comme suffisamment robustes et d'interrompre l'analyse ou, au contraire, d'être amené à introduire une seconde famille pour éprouver plus précisément les conclusions C_1 (toujours selon le même schéma).

– Dans le cas où le domaine initial $\mathfrak{I}$ considéré globalement aboutirait à des conclusions trop pauvres, de délimiter quelques sous-domaines $\mathfrak{I}_1$, $\mathfrak{I}_2$, ... (formant un recouvrement de $\mathfrak{I}$) afin d'obtenir des conclusions robustes suffisamment riches pour chacun d'eux : cela s'avère nécessaire lorsque des renversements de préférences ont lieu quand certains paramètres franchissent des valeurs critiques en entraînant un impact très marqué sur les résultats qui empêche d'aboutir à des conclusions robustes (non triviales) sur un domaine de variation s'étendant assez loin de part et d'autre des valeurs critiques.

Terminons ce paragraphe par quelques considérations pratiques utiles pour conduire une analyse de robustesse dans le cas des PAMC qui nous intéressent

dans ce chapitre.

Concernant les principaux paramètres économiques que sont les k_j et les v_j, nous avons vu, aux 5.4.2 et 5.4.3, comment on peut cerner la marge d'arbitraire qui affecte leurs valeurs. Comme on le verra au 6.2.2, la procédure d'exploitation d'ELECTRE IS prend en charge une part de l'analyse de robustesse concernant ces paramètres. Pour conduire aisément jusqu'au bout cette analyse de robustesse, que ce soit dans cette dernière méthode ou dans les autres méthodes de type ELECTRE, il est particulièrement utile de disposer d'un accès facile, pour n'importe quel couple (b, a), à la liste des critères discordants, chacun d'eux étant accompagné de la valeur de l'écart des performances. Cette liste est en effet invariante face à une modification des k_j et des v_j ainsi que face à celle de certains paramètres techniques tel le niveau de concordance. Elle facilite par conséquent l'interprétation des résultats de la procédure d'exploitation obtenus relativement à une famille de jeux de valeurs des paramètres. Elle aide également à déceler les valeurs critiques les plus pertinentes.

La valeur à attribuer au niveau de concordance s (qui intervient dans ELECTRE I, IS, II ainsi que dans TACTIC [1]) est fréquemment source d'embarras. En effet, bien que les considérations développées au début du 5.2.1 a2) (à propos de l'exigence n° 1) donnent une signification claire à la valeur choisie pour s, celle-ci ne s'impose pas pour autant de toute évidence. Ce paramètre technique peut théoriquement varier dans un intervalle $[1/2, s^*]$ qui est, en général, suffisamment large pour conduire à des transformations profondes du système de préférences lorsque s le décrit. Il est presque toujours légitime de réduire cet intervalle théorique à une portion pertinente notablement plus étroite. On peut pour cela :

– Prendre appui sur l'ordre de grandeur des k_j pour établir une courte liste de coalitions concordantes "minimales" en ce sens qu'une coalition concordante qui serait strictement incluse dans l'une d'entre elles ne devrait pas entraîner l'acceptation d'un surclassement. Cela permettra fréquemment d'élever la borne inférieure nettement au-dessus de 1/2.

– Examiner, pour le jeu de valeurs centrales considéré, la manière dont se distribuent les valeurs de l'indice de concordance. Si (comme c'est fréquemment le cas), à de rares exceptions près, elles sont significativement inférieures à s^*, il faut s'attendre à ce que des valeurs s proches de cette borne ne présentent guère d'intérêt, ce qui peut justifier de retenir une borne supérieure plus faible. Dans tous les cas, il peut être intéressant d'analyser la composition des coalitions qui attribuent, à l'indice, des valeurs voisines de la borne

[1] Ce qui suit, bien que rédigé par référence directe aux méthodes ELECTRE, se transpose très simplement à TACTIC.

supérieure que l'on souhaite adopter. On doit en effet se demander si des sous-coalitions (donc de poids moindre) ne seraient pas suffisantes pour accepter le surclassement : ceci peut amener à réduire encore la valeur de la borne supérieure de s.

L'examen de la distribution des valeurs prises par l'indice de concordance, pour un jeu de poids donné, peut également permettre de déceler d'étroites zones critiques telles que si s les franchit vers le haut, plusieurs surclassements sont refusés alors que le franchissement vers le bas amène à accepter tous ces surclassements. Il importe alors d'examiner séparément les résultats de part et d'autre d'une telle zone et d'interpréter leur variation pour formuler des conclusions synthétiques robustes.

5.5 COMPLÉMENTS THÉORIQUES

On a présenté, au 5.2 et au 5.3, un certain nombre de PAMC visant à construire un ou plusieurs systèmes de préférences sur un ensemble d'actions. Cette présentation en a été faite avec un souci d'opérationnalité en détaillant avant tout le mécanisme et le bien-fondé de ces PAMC.

Cette section aborde un certain nombre d'interrogations théoriques à propos de ces PAMC. Ces interrogations sont, pour la plupart, issues d'une littérature récente et de nature assez technique. On cherchera avant tout ici à attirer l'attention du lecteur sur ces travaux, sans chercher à présenter, de façon formelle, les concepts et résultats qu'ils contiennent. Ceci obligerait en effet à des développements techniques qui sortiraient du cadre du présent ouvrage. De plus, ces travaux récents concernent une recherche toujours en cours et sont loin d'apporter des réponses à toutes les questions que l'on est en droit de se poser à propos de ces PAMC.

Nous structurerons cette section autour de trois interrogations :

a) Peut-on obtenir une relation quelconque avec une PAMC de type II ?

b) A quelles conditions une relation obtenue avec une PAMC de type II peut-elle posséder des propriétés remarquables de transitivité ou de complétude ?

c) Peut-on axiomatiser des PAMC de type II ?

a) Peut-on obtenir une relation quelconque avec une PAMC de type II ?

On a souligné, au 5.2 et au 5.3, que le ou les systèmes de préférences issus des PAMC présentées dans ce chapitre ne possédaient pas, en général, des propriétés remarquables de transitivité ou de complétude. A l'exception des procédures par compensation probante [1] présentées au 5.3.2 c), les systèmes de préférence dont il a été question dans ce chapitre ont été obtenus par application d'un principe général de concordance-discordance. Il est tentant de croire que même si ces systèmes ne possèdent pas de propriétés remarquables de transitivité ou de complétude, ceux-ci ne sont pas pour autant quelconques. Une façon, détournée, de s'en assurer consiste à se demander si les résultats possibles des PAMC présentées dans ce chapitre possèdent ou non certaines "propriétés structurelles".

La réponse à cette question pour une PAMC donnée sera négative si, étant donné un système de préférences quelconque sur un ensemble d'actions, on peut toujours bâtir un "jeu de données", c'est-à-dire :

– un tableau de performances évaluant ces actions sur une famille de critères et

– un jeu de paramètres (coefficients d'importance, seuil de veto, etc.) de telle sorte que l'application de la PAMC sur le tableau de performances avec le jeu de paramètres construit fournisse comme résultat le système de préférences donné au départ [2].

Déterminer, pour une PAMC donnée, si l'ensemble de ses résultats possibles possède ou non certaines "propriétés structurelles" soulève, dans le cas général, des questions difficiles [3]. Contentons-nous ici de leur apporter une

[1] Pour une étude théorique des systèmes de préférences dans les procédures par compensation probante, nous renvoyons à Bana e Costa et Vincke (à paraître). Dans la suite de cette section, on ne s'intéressera pas plus avant à ces PAMC.

[2] Si tel est le cas pour une PAMC donnée, ceci ne traduit nullement une quelconque réserve quant à son intérêt pour l'aide à la décision. Un tel résultat signifierait simplement que les principes utilisés par cette PAMC pour déterminer la résultante des conflits entre critères peuvent conduire à tout système de préférences.

[3] Notons qu'il est néanmoins important d'y faire face si l'on souhaite tenter une analyse théorique des procédures d'exploitation présentées au chapitre suivant. La difficulté de ce problème tient à ses liens avec la question classique des "probabilités binaires de choix". Ces liens sont précisés dans Bouyssou (1992a). On trouvera une vue d'ensemble du problème des "probabilités binaires de choix" dans Fishburn (1992b) et dans Bouyaux (1990).

réponse dans le cas d'ELECTRE I et d'ELECTRE III, c'est-à-dire avec respectivement la PAMC la plus simple et la PAMC la plus complexe que nous avons présentées dans ce chapitre.

Soit S une relation binaire nette et réflexive sur un ensemble fini A contenant m actions. Est-il possible de bâtir un jeu de données de telle sorte que l'application d'ELECTRE I à ce jeu de données fournisse comme résultat la relation S donnée au départ ? Il est facile de constater que la réponse à cette question est positive. Il suffira, pour s'en convaincre, de bâtir un jeu de données tel que :

– toutes les actions soient indifférentes sur un critère de poids fort de manière que la condition de concordance (r.5.2.3) soit vérifiée pour tout couple (a, b) d'actions ;

– un critère de poids faible soit introduit pour chaque couple d'actions (a, b) tel que Non(a S b) et sur lequel les actions sont évaluées de telle sorte que $g(b) > g(a) + v(g(a))$, la condition de non veto (r.5.2.4) étant satisfaite pour tous les autres couples d'actions.

Moyennant un choix adéquat du niveau exigé de concordance, il est immédiat de constater que l'application d'ELECTRE I à un tel jeu de données redonnera bien la relation S fixée au départ [1] [2].

En s'inspirant d'un résultat classique en théorie du choix social (cf. Mc Garvey (1953)), on peut de plus montrer qu'il en va de même en ne considérant que la partie concordance d'ELECTRE I en ne faisant pas usage de l'idée de veto (sur ce point, voir Bouyssou (1992a)).

Les relations de surclassement bâties avec ELECTRE I ne possèdent donc aucune "propriété structurelle" puisque toute relation binaire (réflexive) peut

[1] Le jeu de données ainsi exhibé est bien entendu peu "réaliste". Mais il ne s'agit ici que de montrer qu'il est possible de retrouver, en sortie d'ELECTRE I, toute relation binaire réflexive. La technique proposée nécessite, dans le pire des cas, l'introduction de $m \cdot (m - 1) + 1$ critères sur un ensemble de m actions. La détermination de la borne inférieure de ce nombre de critères soulève des problèmes combinatoires difficiles.

[2] L'intérêt d'un tel résultat tient au fait que, dans l'étude des procédures d'exploitation d'une relation de surclassement construite avec ELECTRE I, il sera légitime de considérer que l'on aura à faire face à toutes les relations réflexives envisageables, y compris celles pouvant apparaître les plus "curieuses".

être obtenue avec cette PAMC [1].

En est-il de même avec ELECTRE III ? Un premier exemple simple permet de constater que les indices de concordance utilisés dans ELECTRE III (cf. (r.5.3.10)) ne sont pas quelconques. Soit en effet la relation floue T définie sur A = {x, y, z} par le tableau 5.5.1 (que l'on lira de ligne en colonne).

Imaginer un jeu de données tel que la relation T du tableau 5.5.1 puisse être vue comme une relation de concordance issue d'ELECTRE III reviendrait à supposer que tous les critères de ce jeu de données sont unanimes pour déclarer : x est strictement préféré à y, y est strictement préféré à z et z est strictement préféré à x, ce qui est contradictoire.

Il est cependant possible de montrer que toute relation valuée réflexive peut être obtenue par application d'ELECTRE III sur un jeu de données adéquatement conçu [2]. Nous nous contentons ici de donner, sans démonstration, un algorithme permettant de bâtir un tel jeu de données.

Tableau 5.5.1 : Exemple numérique

σ_T	x	y	z
x	1	1	0
y	0	1	1
z	1	0	1

Soit S une relation floue réflexive [3] sur un ensemble fini A contenant m actions. Si $S(a, b) = 1, \forall a, b \in A$, on retrouvera la relation S en utilisant un jeu de données constitué d'un unique critère donnant, à toutes les actions de A, une performance identique.

Dans le cas contraire, notons :

[1] Il est aisé de montrer qu'il en va de même avec TACTIC pour ce qui concerne les relations binaires asymétriques.

[2] Les méthodes PROMETHEE n'utilisant pas l'idée de veto, la situation est différente pour ce qui les concerne. La caractérisation des relations valuées pouvant être obtenue avec ces méthodes est un problème difficile. On trouvera quelques éléments à ce sujet dans Bouyssou (1992a).

[3] c'est-à-dire telle que $\sigma_S(a, a) = 1, \forall a \in A$.

$$R^* = \max_{\{(a,b) \in A^2 : \sigma_s(a,b) \neq 1\}} \sigma_s(a, b)$$

et

$$k = \mathrm{card}\{(a, b) \in A^2 : \sigma_s(a, b) \neq 1\}.$$

Par hypothèse, on a $R^* \in [0, 1[$ et $k \in \{1, 2, ..., m(m-1)\}$.

Si $R^* = 0$, il est facile de bâtir un jeu de données comportant deux critères g_1, g_2 tels que $d_1(a, b) = 1$ et $d_2(b, a) = 1$ pour toute paire d'actions distinctes $\{a, b\}$. On retrouvera donc bien la relation S après application d'ELECTRE III à ce jeu de données.

Si $R^* \neq 0$, on bâtit un jeu de données comportant $k + 1$ critères tel que :

– sur le premier critère, de poids R^*, toutes les actions soient indifférentes ;

– chacun des k autres critères a un poids $\dfrac{1 - R^*}{k}$ et correspond à un couple d'actions (a, b) tel que $\sigma_s(a, b) < 1$.

Considérons le critère g_j correspondant au couple (a, b). On choisira, sur ce critère, les évaluations et les seuils d'indifférence et de préférence de telle sorte que :

– b soit indifférente à toutes les actions à l'exception de a,
– a soit indifférente à toutes les actions à l'exception de b,
– toutes les autres actions soient indifférentes entre elles,
– b soit strictement préférée à a,

ce qui est toujours possible avec un pseudo-critère.

L'application d'ELECTRE III à un tel jeu de données donne un indice de concordance tel que :

$$c(a, b) = 1 \text{ si } \sigma_S(a, b) = 1,$$

$$c(a, b) = R^* + (k - 1)\cdot\left(\frac{1 - R^*}{k}\right) > \sigma_S(a, b) \text{ sinon.}$$

Sur le critère j introduit à propos du couple (a, b), on a b P_j a. On a alors $d_j(a, b) > 0$ d'après (r.5.3.11). Il est de plus aisé de constater que ce critère est le seul pour lequel l'indice de discordance est strictement positif à propos du couple (a, b).

Pour retrouver la relation floue S fixée au départ, il suffit alors de choisir, sur le critère j introduit à propos du couple (a, b), un seuil de veto qui permette exactement d'affaiblir $c(a, b) = R^* + (k - 1)\cdot\dfrac{1 - R^*}{k}$ en $\sigma_S(a, b)$ via

(r.5.3.12). Il est aisé de constater qu'un tel choix est toujours possible [1]. Les relations de surclassement bâties avec ELECTRE III ne possèdent donc, en général, aucune "propriété structurelle".

b) A quelles conditions une relation obtenue avec une PAMC de type II peut-elle posséder des propriétés remarquables de transitivité ?

Comme nous l'avons vu au a), les structures de préférence issues des PAMC présentées dans ce chapitre sont, en général, quelconques. On conçoit bien cependant qu'un choix judicieux des divers paramètres intervenant dans ces PAMC [2] puisse conduire à des structures ayant des propriétés remarquables de transitivité et même de complétude. Ce sera par exemple le cas avec ELECTRE I, ELECTRE III, TACTIC ou PROMETHEE si un poids très important est donné à un critère, les autres ne jouant que de façon marginale. La structure de préférence obtenue reflètera alors la structure de préférence sur le critère "dominant" qui, elle, possède des propriétés remarquables de transitivité et de complétude. En-dehors de cette situation, est-il possible de parvenir tout de même à de telles propriétés par un choix judicieux de paramètres (poids, veto, niveau de concordance, etc.) ? La réponse à cette question présente des points communs avec les nombreux travaux en théorie du choix social issus du célèbre théorème d'Arrow [3]. Dans ce cadre, on se préoccupe d'agréger les préférences de n individus sur un ensemble d'objets en une préférence collective de manière à respecter trois conditions :

– une condition d'universalité stipulant que toutes les configurations possibles de structures de préférences individuelles doivent pouvoir être agrégées ;

---

[1] Sur tous ces points, nous renvoyons à Bouyssou (1992a). Ici encore, le jeu de données exhibé peut apparaître comme peu réaliste. Rappelons cependant que, de même qu'avec ELECTRE I, l'intérêt de ce résultat tient avant tout à ses conséquences sur l'étude des procédures d'exploitation.

[2] Ce sera également le cas si l'on n'applique ces PAMC que sur des tableaux de performances particuliers, par exemple ne présentant pas ou peu de conflits entre critères. Les conditions sur les tableaux de performances permettant de toujours aboutir à des structures ayant des propriétés remarquables de transitivité sont de plus assez restrictives et de peu d'intérêt dans le domaine du multicritère. On trouvera une analyse détaillée de ces conditions dans Arrow et Raynaud (1986).

[3] Cf. Arrow (1963) et, pour une vue d'ensemble récente, Sen (1986), Suzumura (1983), Fishburn (1987, 1990b). Pour une bibliographie récente, voir Kelly (1991).

– une condition d'unanimité imposant que l'unanimité de la préférence stricte soit reflétée dans la préférence collective ;

– une condition d'indépendance imposant que, dans la structure de préférence collective, les liens unissant deux objets dépendent uniquement des liens unissant ces deux objets dans les structures de préférences individuelles.

Sous ces trois conditions [1], on peut montrer que toujours parvenir à une structure de préférence collective [2 3] ayant des propriétés remarquables de transitivité (et, éventuellement, de complétude) impose de recourir à des mécanismes d'agrégation répartissant le "pouvoir" de manière très inégale entre les divers individus (existence d'un dictateur, d'une oligarchie, d'un individu avec pouvoir de veto selon les cas), ce qui semble peu satisfaisant.

Comme on l'a déjà évoqué au 3.2.4, on doit se garder d'une transposition trop rapide de ces résultats au cadre multicritère. En effet :

– les PAMC de ce chapitre intègrent une idée de discordance qui n'est pas prise en compte par les mécanismes d'agrégation traditionnellement étudiés en théorie du choix social ;

– la notion de propriété remarquable de transitivité pour les PAMC

---

[1] avec parfois certaines conditions techniques additionnelles portant, par exemple, sur le nombre d'objets ou le nombre d'individus.

[2] On suppose généralement que cette structure est une relation binaire nette. Les propriétés remarquables de transitivité consistent alors à imposer que cette relation binaire soit négativement transitive, transitive, que sa partie asymétrique soit sans circuit, etc. Outre à Arrow (1963) (cas d'une relation complète et transitive), on pourra se reporter à Weymark (1983) (cas d'une relation transitive non nécessairement complète) ; Gibbard (1969), Mas-Collell et Sonnenschein (1972) (cas d'une relation complète dont la partie asymétrique est transitive) ; Blair et Pollak (1982, 1993), Blau et Deb (1977), Kelsey (1984a et b, 1985) (cas d'une relation complète dont la partie asymétrique est sans circuit) ; Blau (1979), Blair et Pollak (1979) (cas d'un ordre d'intervalle ou d'un quasi-ordre complet). Pour une vue d'ensemble très claire de tous ces résultats, voir Sen (1986).

[3] Dans le cas où la relation de préférence collective peut être floue, la définition des propriétés remarquables de transitivité est plus délicate (cf. infra). L'essentiel des résultats valables dans le cas net est néanmoins préservé. Parmi le grand nombre de travaux se rapportant à ce cas, mentionnons : Barrett et al. (1986, 1990a, 1992), Ovchinnikov (1991), Dutta (1987), Leclerc (1984), Perny (1990), Billot (1991).

conduisant à une relation valuée n'est pas toujours simple à définir [1 2].

En dépit de ces difficultés, on constatera sans peine que les PAMC présentées dans ce chapitre satisfont bien à l'esprit des trois conditions traditionnellement utilisées en théorie du choix social [3]. On peut alors montrer [4], de même qu'en théorie du choix social, que demander systématiquement d'aboutir avec ces PAMC à des structures ayant des propriétés remarquables de transitivité impose de donner, à un ou à un groupe de critères, un rôle considérable dans la procédure d'agrégation. Utiliser de telles procédures reviendrait pratiquement à négliger certains critères, ce qui apparaît comme peu satisfaisant. Cette impossibilité de parvenir, de manière raisonnable, à des structures ayant systématiquement des propriétés remarquables de transitivité explique l'attention qui sera portée, au chapitre suivant, à la manière de tirer parti de structures quelconques pour construire des recommandations dans

---

[1] Sur les difficultés qu'il y a à définir, pour des relations valuées, des propriétés remarquables de transitivité ainsi que des parties symétriques et asymétriques, nous renvoyons à : Perny (1992), Barrett et Pattanaik (1985), Fodor (1991), Fodor et Roubens (1992), Montero et Tejada (1986), Ovchinnikov et Roubens (1991, 1992), Ovchinnikov (1981, 1990), Perny et Roy (1992). Pour une vue générale de l'intérêt et des difficultés soulevées par une modélisation floue des préférences, on pourra également consulter : Basu et al. (1992), Barret et Pattanaik (1989).

[2] Avec ELECTRE III ou PROMETHEE, on cherche à agréger des relations de préférence floues. La condition d'universalité demande alors à être reformulée pour prendre en compte le caractère spécifique de la modélisation des préférences sur chaque critère dans ces méthodes. Ceci ne va pas sans soulever de difficultés. Sur ce point, voir Perny (1992).

[3] Prenons ELECTRE I à titre d'exemple. Une condition de type universalité est bien respectée puisque l'on peut appliquer ELECTRE I à tout tableau de performances. L'unanimité est également respectée puisque l'on constatera facilement que a P_i b, $\forall$ i $\in$ F, implique, avec (r.5.2.3) et (r.5.2.4), indépendamment du choix des poids et des seuils de veto, que a S b et Non(b S a). Dans la partie concordance d'ELECTRE I, la relation de surclassement liant a à b ne dépend que des relations de surclassement liant a à b au niveau de chaque critère. Toute autre paire d'actions liée par les mêmes relations sur chacun des critères se comparera de même que a et b. Une condition de type indépendance est donc également satisfaite pour la partie concordance d'ELECTRE I. L'introduction de la condition de non discordance préserve l'esprit de cette condition.

[4] Cf., dans le cas de relations nettes, Bouyssou (1992b) et, dans le cas de relations valuées, Perny (1990 et 1992).

diverses problématiques.

c) Peut-on axiomatiser des PAMC de type II ?

De même qu'au chapitre 4 à propos des PAMC conduisant à un critère unique de synthèse, on peut s'intéresser à l'analyse axiomatique des PAMC présentées dans ce chapitre.

Considérons, à titre d'exemple, la PAMC ELECTRE I. Soit S une relation de surclassement sur un ensemble [1] d'actions évaluées sur une famille F de n vrai-critères. L'analyse axiomatique de la PAMC ELECTRE I vise à donner des conditions nécessaires et suffisantes sur S pour qu'il existe un jeu de paramètres comprenant :

– n coefficients d'importance $k_1, k_2, ..., k_n$,
– n seuils de veto $v_1, v_2, ..., v_n$ et
– un niveau exigé de concordance s tel que, pour toutes actions a et b :

$$a \, S \, b \Leftrightarrow \sum_{\{i \in F : g_i(a) \geq g_i(b)\}} k_i \Big/ \sum_{i \in F} k_i \geq s$$

et

$$g_j(b) < g_j(a) + v_j(g_j(a)), \; \forall \, j \in F.$$

Une telle analyse axiomatique [2] permettrait de plus de discuter l'unicité du jeu de paramètres ainsi exhibé [3].

Même dans des cas simples comme celui d'ELECTRE I, peu de résultats concernant une telle analyse axiomatique sont disponibles à ce jour. On

[1] De même qu'au chapitre 4, on supposera ici que l'on raisonne sur un ensemble d'actions suffisamment riche d'actions fictives pour que l'ensemble des vecteurs de performances de ces actions soit confondu avec le produit cartésien $E_1 \times E_2 \times ... \times E_n$ des échelles des n critères.

[2] Notons que le problème de l'analyse axiomatique d'une PAMC diffère de celui de la caractérisation des résultats possibles d'une PAMC abordé au a). Dans ce dernier problème, il s'agit de bâtir un tableau de performances sur un nombre non précisé de critères ainsi qu'un jeu de paramètres de telle sorte que l'application dans la PAMC, sur le tableau de performances construit avec le jeu de paramètres exhibé, redonne pour résultat une relation de surclassement fixée au départ. Dans le premier problème, on spécifie dès le départ la relation de surclassement ainsi que le tableau de performances.

[3] c'est-à-dire, par exemple, en déterminant l'ensemble des jeux de coefficients d'importance permettant de retrouver la relation de surclassement fixée au départ.

trouvera, dans Bouyssou et Vansnick (1986), une analyse axiomatique détaillée de TACTIC. Si cette analyse a permis de faire ressortir certaines caractéristiques cruciales des PAMC fondées sur un principe de concordance-discordance et de discuter l'unicité des coefficients d'importance, elle utilise également des conditions difficilement interprétables du même type que celles rencontrées à propos de l'analyse axiomatique de la PAMC additive au 4.2.1.2 b). Nous ne la présenterons donc pas en détail ici, nous contentant d'indiquer la démarche générale suivie qui vaut également pour toutes les PAMC de ce chapitre conduisant à une relation nette [1] (cf. 5.2).

Considérons une relation (asymétrique) P sur un ensemble d'actions évaluées sur une famille cohérente F de n vrai-critères $g_1, g_2, ..., g_n$. Soit deux actions a et b telles que a P b. Notons I = C(a P b), J = C(b P a).

Une condition nécessaire pour pouvoir trouver des coefficients d'importance k_i et un seuil ρ de telle sorte que l'on puisse regarder P comme ayant été obtenue avec TACTIC est donc, d'après (r.5.2.11), que :

$$\sum_{i \in I} k_i > \rho \cdot \sum_{j \in J} k_j.$$

Puisque ρ doit être supérieur ou égal à 1, l'existence de deux actions c et d telles que :

d P c,
C(c P d) = I et
C(d P c) = J

interdira donc à P de pouvoir s'obtenir avec TACTIC.

On a donc exhibé une condition nécessaire [2] sur P pour être représentable

[1] A ce jour, l'analyse axiomatique des PAMC conduisant à une relation valuée semble être un problème ouvert. On trouvera, dans Suppes et al. (1989, ch. 17), des résultats importants pouvant se rattacher à ce problème.

[2] Cette condition est connue, dans la littérature, sous le nom de "non compensation généralisée". Sur ce point et sur la motivation de ce nom, voir Plott et al. (1975), Fishburn (1975, 1976), Bouyssou (1986), Bouyssou et Vansnick (1986), Vansnick (1986 a et b, 1988). Si l'on ne considère que la partie concordance de TACTIC, la relation ainsi construite satisfait à une condition plus forte, connue sous le nom de "non compensation" :
[C(a P b) = C(c P d) et C(b P a) = C(d P c)] ⇒ [a P b ⇒ c P d].
Cette condition de non compensation entretient des liens étroits avec la condition d'indépendance en théorie du choix social. Sur ce point, voir Parks (1976), Pollack (1979), Roberts (1980), Bouyssou (1992b). La généralisation

avec TACTIC pour toutes actions a, b, c et d :

$$[C(a\ P\ b) = C(c\ P\ d) \text{ et } C(b\ P\ a) = C(d\ P\ c)] \Rightarrow [a\ P\ b \Rightarrow \text{Non}(d\ P\ c)]. \qquad (r.5.5.1)$$

Définissons, sur l'ensemble des sous-familles disjointes de critères, une relation ▹ au contenu sémantique "plus important que" en posant, $\forall$ I, J $\subset$ F, I $\cap$ J = $\varnothing$:

I ▹ J $\Leftrightarrow$ il existe deux actions a et b telles que a P b, C(a P b) = I et C(b P a) = J.

La condition (r.5.5.1) impose à ▹ d'être asymétrique. Axiomatiser complètement la partie concordance de TACTIC revient alors à trouver des conditions permettant de s'assurer de l'existence de coefficients $k_1, k_2, ..., k_n$ et ρ tels que, pour toute sous-famille disjointe de critères I et J, on ait :

$$I \triangleright J \Leftrightarrow \sum_{i \in I} k_i >\rho \sum_{j \in J} k_j.$$

Ces conditions sont classiques [1] [2].

La détermination des seuils de veto s'effectue en examinant les situations pour lesquelles

---

de ces deux conditions au cas flou n'est pas une tâche aisée. Perny (1992) montre pourquoi on peut parler de "non compensation avec possibilité de compensation locale" avec ELECTRE III et PROMETHEE. Ceci tient au fait qu'avec ces deux méthodes, accroître la différence $g_j(b) - g_j(a)$ ne peut faire croître $\sigma_S(b, a)$ ou $\sigma_P(b, a)$ que si la différence $(g_j(b) - g_j(a))$ n'est pas déjà supérieure au seuil de préférence. Un tel accroissement ne pourra donc pas nécessairement compenser une augmentation des performances de a par rapport à b sur un autre critère.

[1] On notera qu'elles sont tout-à-fait semblables à celles utilisées pour garantir l'existence d'une mesure de probabilité représentant une relation de vraisemblance entre événements (cf. Krantz et al. (1971), Roberts (1979) et Suppes et al. (1989)). Elles sont du même type que celles rencontrées au Résultat 4.2.1 et donc peu attrayantes.

[2] Ce qui précède montre que la connaissance de ▹ permet d'inférer la relation de concordance de TACTIC. Connaissant ▹, on peut bâtir cette relation sans avoir à donner une valeur numérique aux coefficients d'importance. Cette idée a été exploitée, couplée à des techniques inspirées de l'intelligence artificielle pour construire ▹ à partir d'un nombre limité de questions, par Pasche (1987, 1991) et Rommel (1989).

I ▹ J, C(a P b) = I, C(b P a) = J et Non(a P b)

qui, lorsque (r.5.5.1) est vérifiée, traduisent l'existence de critères dans C(b P a) interdisant le fait d'avoir a P b et donc pour lesquels un effet de veto est à l'œuvre. Un tel raisonnement se transpose sans difficultés au cas d'ELECTRE I.

Mentionnons enfin que des développements théoriques récents [1] sur la représentation numérique de structures de préférences non nécessairement transitives permettent d'espérer arriver à un cadre formel commun rassemblant les PAMC présentées aux chapitres 4 et 5. Ces travaux reposent sur l'idée simple suivante : il est possible de reformuler la plupart des PAMC des chapitres 4 et 5 comme opérant des comparaisons par paires où l'on "pèse le pour et le contre" pour accepter une proposition en termes de préférence. De plus, le calcul de ce "pour et contre" se fait généralement en sommant "les pour" et "les contre" au niveau de chaque critère. C'est cette "sommation" des pour et des contre qui semble constituer le noyau commun à toutes les PAMC présentées aux chapitres 4 et 5.

---

[1] Sur ces développements, voir Bouyssou (1986), Fishburn (1990a, 1991, 1992a), Vind (1991) et Suppes et al. (1989, ch. 17.2.5).