

Chapitre 6

AIDE À LA DÉCISION FONDÉE SUR UNE PAMC DE TYPE ELECTRE

RÉSUMÉ

Dans ce chapitre, on explique comment tirer parti, en vue de l'aide à la décision, des modèles de préférences étudiés au chapitre 5. Cela conduit, au 6.1, à introduire le concept de procédures d'exploitation, procédures qui complètent celles d'agrégation. L'origine des difficultés auxquelles se heurte la conception de telles procédures d'exploitation est successivement mise en évidence pour les problématiques du choix, du tri et du rangement (cf. 6.1.A). Des conseils pratiques pour choisir une méthode achèvent cette première section.

Dans les trois sections suivantes, on présente les procédures d'exploitation qui ont été proposées dans le cadre des principales méthodes ELECTRE et apparentées (et on achève corrélativement la présentation de ces méthodes). Dans le même souci d'opérationnalité qu'au chapitre 5, chacune des procédures (et méthodes) étudiées donne lieu tout d'abord à une présentation à caractère essentiellement algorithmique, les commentaires théoriques et pratiques faisant l'objet de deux paragraphes ultérieurs.

Les procédures et méthodes étudiées sont successivement :

- au 6.2 (problématique du choix : procédure dite de sélection) : ELECTRE I et IS ;
- au 6.3 (problématique du tri : procédure dite d'affectation) : ELECTRE TRI ;
- au 6.4 (problématique du rangement : procédure dite de classement) : PROMETHEE I et II, ELECTRE II, III et IV.

Diverses considérations théoriques relativement à ces procédures sont présentées au 6.5.

6.1.1 Précisions sur l'objet du chapitre

Dans ce chapitre, nous supposons qu'un modèle de préférences globales fondé sur un système relationnel de synthèse (résultat d'une PAMC de type II, cf. chapitre 5) a été élaboré. On s'intéresse à la façon de l'exploiter dans une perspective d'aide à la décision. Rappelons que le modèle de préférences dont il s'agit de tirer parti pour asseoir une recommandation ou, plus simplement, pour communiquer, argumenter au sein d'un processus de décision peut faire intervenir une ou plusieurs relations de synthèse. Il peut par exemple prendre l'une des formes (S, R) ou (P, \sim), S et P étant des relations nettes ou floues.

Quelle que soit la nature des relations retenues pour modéliser un jugement de préférences globales entre une action b et une action a, ce jugement est directement fondé sur la comparaison des vecteurs de performances $g(b)$ et $g(a)$. Cette façon de procéder, paire d'actions par paire d'actions, pour apprécier la force des arguments capables d'asseoir un surclassement ou une préférence stricte n'est soumise à aucune contrainte visant à assurer la transitivité des relations S ou P. De surcroît, dans le système ainsi élaboré, figure, en complément des relations S ou P, au moins l'une des relations R ou \sim . La structure qui est de la sorte définie sur l'ensemble A des actions potentielles ne se prête pas à une exploitation immédiate, évidente pour l'aide à la décision, contrairement à ce qui est le cas avec une PAMC de type I qui définit, sur A, une structure de préordre complet, voire de pseudo-ordre (cf. 3.2.1, remarque 2). En effet, nous aurons l'occasion de mettre en évidence (cf. 6.1.2, 6.1.3 et 6.1.4) que la façon de tirer parti de telles structures pour élaborer une recommandation va naturellement de soi, sans risque d'être entravée (quelle que soit la problématique) par des difficultés d'ordre méthodologique. Nous avons déjà eu l'occasion (cf. 5.1) d'attirer l'attention du lecteur sur le fait qu'il en va tout autrement avec les PAMC de type II. Les méthodes qui utilisent ces PAMC doivent alors comporter une autre procédure, dite **procédure d'exploitation**, destinée à tirer parti, pour l'aide à la décision, du résultat de la procédure d'agrégation. Le présent chapitre est consacré à

l'étude de telles procédures d'exploitation.

Dans le titre, il est fait référence aux PAMC de type ELECTRE. Dans ce qui suit, nous mettons en effet l'accent sur les procédures d'exploitation qui ont été conçues dans le cadre des méthodes ELECTRE ou qui se veulent du même type, comme PROMETHEE¹. Toutefois, les développements qui suivent dans la présente section (ainsi que les considérations du 6.5) valent pour toute méthode prenant appui sur une PAMC de type II.

Les sections 2, 3 et 4 de ce chapitre sont consacrées à une présentation, dans un esprit opérationnel, des principales procédures d'exploitation conçues dans le cadre des méthodes de type ELECTRE. Chacune de ces procédures est ainsi originellement couplée à l'un des modèles de préférences globales présentés soit au 5.2, soit au 5.3. Il est cependant possible dans bien des cas, moyennant des aménagements mineurs, de coupler une procédure d'exploitation avec un modèle de préférences globales issu d'une PAMC différente de celle prise en compte dans la méthode originelle. Des précautions s'imposent cependant pour que les opérations qu'implique la procédure d'exploitation restent cohérentes avec les propriétés du modèle de préférences (point de vue de la "significativité", cf. Roberts (1979) ou Vansnick (1990)). La section 6.5 abordera un certain nombre de questions théoriques relativement à ces procédures d'exploitation.

Avant de présenter ces diverses procédures d'exploitation, nous mettons en évidence, au 6.1, ce qui les rend nécessaires ainsi que l'origine des difficultés auxquelles se heurte leur conception. Cela nous conduira à aborder quelques uns des points de vue que l'on peut adopter pour apprécier la qualité, la validité, la fiabilité d'une telle procédure et/ou de l'ensemble de la méthode couplant procédure d'agrégation et procédure d'exploitation.

Nous ne reviendrons pas, dans ce chapitre, sur ce qui peut conduire à concevoir l'aide à la décision à partir d'une PAMC de

¹ En ce sens qu'elles fondent les relations S ou P sur l'analyse de la concordance et de la discordance (cf. 3.1.2 et 3.1.3).

type ELECTRE plutôt que sur la base d'un critère unique de synthèse. A ce sujet, nous renvoyons le lecteur au 5.1.2 (conditions 1 à 4 notamment) ainsi qu'aux cas concrets présentés aux chapitres 8, 9 et 10.

A partir d'un modèle de préférences globales défini sur A , l'aide à la décision peut être envisagée de différentes manières. Celles-ci dépendent avant tout des termes dans lesquels le problème est abordé, de ceux dans lesquels on souhaite formuler une éventuelle recommandation ou de ce sur quoi on souhaite prendre appui pour simplement participer à un processus de décision. Sur ces bases, nous avons montré (cf. 1.7) qu'il convenait de distinguer quatre problématiques de référence pour caractériser ces différentes manières d'envisager l'aide à la décision. Les procédures d'exploitation ayant pour objet d'aider à tirer parti d'un modèle de préférences globales (soit en vue d'élaborer une recommandation, soit en vue de contribuer à une bonne communication et argumentation au sein d'un processus de décision) ont naturellement été conçues en relation directe avec ces problématiques. En fait, trois ¹ d'entre elles seulement sont concernées : il s'agit des problématiques du choix, du tri, du rangement (dont nous rappelons ci-après les principales caractéristiques). Une procédure d'exploitation prendra le nom de **procédure de sélection, d'affectation ou de classement** selon que l'objectif visé relève de la première, de la seconde ou de la troisième de ces problématiques. Les trois paragraphes qui suivent leurs sont respectivement consacrés. Ils feront ressortir que, pour chacune de ces problématiques, la procédure d'exploitation devient triviale si S (ou P) est transitive, ce qui est le cas avec une PAMC de type I conduisant à un vrai-critère unique de synthèse. On peut alors se demander si, malgré ce qui a été dit au 5.1, il ne serait pas plus judicieux de chercher à bâtir d'emblée une relation transitive. A ce sujet, nous renvoyons le lecteur au 5.5 où ont été mises en évidence les difficultés profondes que pouvait présenter cette voie.

¹ La quatrième problématique, celle de la description (cf. 1.7), n'a pas pour ambition d'élaborer un modèle formel de préférences globales et donc, encore moins, d'en proposer une exploitation systématique.

Pour conclure la présente section, on donnera, au 6.1.5, des indications destinées à guider le choix d'une méthode en fonction du contexte d'aide à la décision concerné.

6.1.2 Cas de la problématique du choix (P.c)

La problématique du choix suppose que le problème soit posé en termes de **choix final d'une seule meilleure action**. A cette fin, on cherche à déterminer un sous-ensemble A' de A qui, étant donné un s.r.p. sur A :

1°) justifie que soit éliminée, en vue du choix final, toute action $a \notin A'$,

2°) soit aussi restreint que possible.

Une façon classique d'aborder ce problème consiste à adopter une **problématique d'optimisation**. Etant donné un s.r.p. (S, R) sur A , notons :

$$A^* = \{a^* \in A : a^* S b, \forall b \in A\},$$

l'ensemble des actions optimales a^* dans A .

Trois cas peuvent alors se produire :

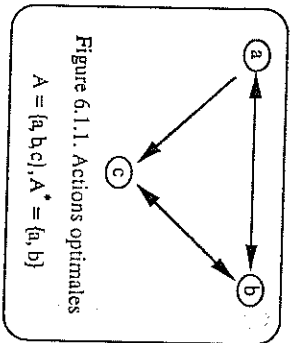
a) $\text{card}(A^*) = 1$. Il existe alors une unique action optimale a^* dans A étant donné le s.r.p. (S, R) . Cette action constitue alors un bon candidat pour le choix final. Notons cependant que le choix final de a^* ne sera pleinement justifié qu'après une analyse de robustesse.

b) $\text{card}(A^*) > 1$. Il existe alors plusieurs actions optimales dans A étant donné le s.r.p. (S, R) . Il découle de la définition de A^* que, $\forall a^*, b^* \in A^*$, $a^* S b^*$ et $b^* S a^*$, autrement dit $a^* I b^*$ et toutes les actions de A^* sont indifférentes. Notons cependant que la définition de A^* n'implique nullement que toutes les actions optimales soient de véritables ex aequo, autrement dit que, $\forall a^*, b^* \in A^*$, $\forall c \in A$:

$$a^* S c \Leftrightarrow b^* S c \text{ et}$$

$$c \ S \ a^* \Leftrightarrow c \ S \ b^*$$

comme le montre l'exemple de la figure 6.1.1.



Il est légitime, si le s.r.p. a été établi avec suffisamment de probance, d'éliminer les actions de $A \setminus A^*$ en vue du choix final. Si l'on souhaite retenir, en vue de ce choix, un ensemble aussi restreint que possible, rien n'interdit de sélectionner un sous-ensemble A' strictement inclus dans A^* . Ainsi, sur l'exemple de la figure 6.1.1, il semble raisonnable (après analyse de robustesse) de poser $A' = \{a\}$ puisque b, tout en étant optimale, se compare moins favorablement à c que a.

c) $A^* = \emptyset$. Ce cas est le plus vraisemblable dès lors que, dans le s.r.p. (S, R) considéré, S ne jouit pas de propriétés remarquables de transitivité et $R \neq \emptyset$, ce qui est généralement le cas avec des s.r.p. obtenus par application d'une PAMC de type II.

La problématique du choix est un élargissement de la problématique de l'optimisation. Elle permet de faire face aux cas, fréquents, où $A^* = \emptyset$ ou $\text{card}(A^*) > 1$.

Dans le cas général, les actions de A' se présentent comme pouvant être préconisées en vue d'une sélection sur la base de laquelle sera ultérieurement effectué le choix final. Une telle **procédure de sélection** (conçue selon P.α) doit permettre de justifier l'élimination de chacune des actions $a \notin A'$ par référence à la sélection faite. Cette justification ne peut pas faire abstraction des éléments de probance et, a contrario, de fragilité de la PAMC avec laquelle cette procédure d'exploitation est couplée. Si $\text{card}(A') > 1$, le choix final, parmi les actions sélectionnées ou

représentées, nécessitera ultérieurement une étude plus poussée, sur la base d'informations additionnelles, voire de critères complémentaires, des conséquences et du mode de comparaison des actions sélectionnées. Ceci doit faire l'objet d'une ultime phase d'étude portant sur un ensemble d'actions aussi restreint que possible. Le sous-ensemble A' ne doit donc comporter aucune action b dont l'élimination pourrait être justifiée par la sélection d'un ensemble plus restreint tel que $A' \setminus \{b\}$. C'est dire que si b est un tant soit peu, mais sans contestation possible, moins bonne, moins adaptée ou moins prioritaire que a, alors il est légitime d'éliminer b, même si l'écart de préférence entre a et b est si faible ou si peu probant que la modélisation aurait pu conduire à poser a I b. Nous nous référerons par la suite à une telle action b en la qualifiant de "brillant second". Il est important de conserver à l'esprit, aussi bien en vue des applications pratiques que pour l'étude du présent chapitre, cette logique de l'élimination systématique des brillants seconds.

Les procédures de sélection telles qu'elles viennent d'être définies ont pour objet d'isoler, sans nuance possible, un sous-ensemble A' dont les caractéristiques ont été précisées plus haut. Cette absence de nuance conduit à penser qu'il n'y a probablement pas grand intérêt à chercher à concevoir une procédure de sélection en relation avec une PAMC aboutissant à plusieurs systèmes de préférences (cf. 5.3). Les deux seules qui sont présentées au 6.2 (celle d'ELECTRE I et celle d'ELECTRE IS) exploitent le résultat d'une PAMC aboutissant à un unique système de type (S, R) (cf. 5.2). Toutefois, comme nous l'avons souligné plus haut, il est nécessaire, pour justifier la sélection et/ou l'élimination des actions, de faire référence aux éléments de probance du modèle de préférences globales, résultat de la PAMC. En vue d'apprécier cette plus ou moins grande probance, nous verrons qu'il peut être intéressant de faire appel à certains des concepts (indices de crédibilité notamment) introduits au 5.3.

Nous consacrons le reste de ce paragraphe à des explications visant à faire comprendre l'origine des difficultés qu'on rencontre pour concevoir des procédures de sélection (ainsi que pour apprécier les qualités d'une procédure proposée) en relation avec

un système de préférences de type (S, R) ¹. On commence pour cela par examiner le problème dans le cas simple où R serait vide et S transitive, ce qui est notamment le cas avec un vrai-critère unique de synthèse. On abandonne ensuite la première de ces hypothèses et enfin la seconde. On voit ainsi surgir, pas à pas, les difficultés.

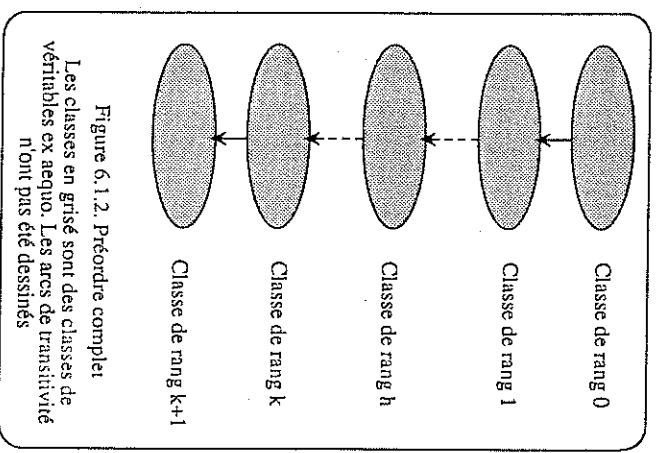
a) S est transitive et $R = \emptyset$

Un tel système (réduit à une seule relation transitive S) définit sur A une structure de préordre complet (cf. 1.4.2). Il peut toujours, dans les problèmes réels, être vu comme le résultat d'une PAMC de type I conduisant à un vrai-critère de synthèse. Avec un tel préordre complet :

- 1°) l'ensemble A peut être partitionné en classes d'indifférence, deux actions quelconques a et b appartenant à une même classe vérifiant à S b et b S a (donc a I b),
- 2°) ces classes d'indifférence sont des classes de véritables ex aequo,
- 3°) les classes d'indifférence ainsi obtenues peuvent être rangées et numérotées les unes à la suite des autres le long d'un axe² de telle sorte que, si a_h et a_k appartiennent respectivement à des classes ayant pour numéro de rang h et k , on ait (cf. figure 6.1.2) : $a_h S a_k$ et $\text{Non}(a_k S a_h) \Leftrightarrow h < k$.

Par convention, nous affectons le rang 0 à la classe qui renferme les actions qui ne sont surclassées par aucune action appartenant à une autre classe. D'après les remarques ci-dessus, les actions de la classe de rang 0 surclassent toutes les autres. Celles de la classe 1 sont surclassées par toutes les actions de la

classe 0 et elles surclassent toutes celles des classes 2, ..., h , ..., k , ..., $k + 1$, ... Précisons que chacune de ces classes contient au moins une action. Rappelons que, dans le cas particulier où chaque de classe est réduite à une seule action, on dit que S définit sur A une structure d'ordre complet.



Notons c_0 l'ensemble des actions de rang 0. Il est aisé de constater que :

$$A^* = c_0.$$

Lorsque $\text{card}(c_0) = 1$, il est alors naturel de poser :

$$A' = A^* = c_0.$$

Lorsque $\text{card}(c_0) > 1$, toutes les actions optimales de c_0 sont nécessairement de véritables ex aequo. Sur la base du s.r.p. considéré, rien ne permet de différencier de telles actions. L'objectif d'une procédure de sélection étant d'aboutir à un

¹ Le problème est sensiblement différent avec un modèle de préférences de type (P, \sim) .

² Dans tout ce qui suit, nous supposons que les classes d'indifférence sont en nombre fini. A bien des égards, cette hypothèse n'est pas essentielle mais elle simplifie considérablement l'exposé sans être restrictive en pratique ; pour plus de précisions sur les structures de préférences ordonnées dans le cas général, nous renvoyons à Fishburn (1970a).

ensemble A' aussi restreint que possible, il semble raisonnable de ne retenir, dans A' , que l'une des actions de c_0 . Cette action est appelée **représentant** de c_0 et renvoie à l'ensemble des actions de cette classe. Le choix du représentant des actions de c_0 peut utilement prendre appui sur des considérations ayant trait à la façon dont S a été élaborée (probance, fragilité de certains surclassements). Ces considérations peuvent conduire à justifier, dans le cadre de l'information et des critères pris en compte, le fait de choisir telle action de c_0 plutôt que telle autre.

La procédure de sélection s'impose donc naturellement dans le cas d'un s.r.p. (S, R) ayant une structure de préordre complet. On la met implicitement en œuvre lorsque l'on cherche à élaborer une recommandation sur la base d'une PAMC de type I conduisant à un vrai-critère de synthèse ¹.

b) S est transitive et $R \neq \emptyset$

Il en est ainsi lorsque S est confondue ² avec A_F mais également dans bien d'autres cas. Le système (S, R) définit alors, sur A , une structure de **préordre partiel** ³. Cela revient à dire que :

- 1°) l'ensemble A peut être partitionné en classes d'indifférence (comme précédemment),
- 2°) ces classes d'indifférence sont des classes de véritables ex æquo,
- 3°) les classes d'indifférence ainsi obtenues peuvent être rangées selon un ordre partiel (cf. figure 6.1.3) : celui-ci est

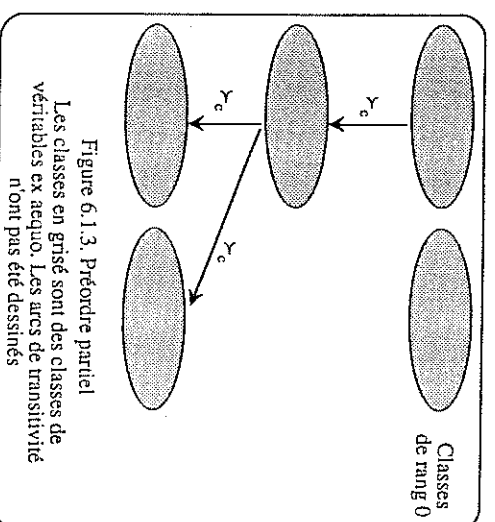
¹ Ces mêmes principes se transposent sans grandes difficultés au cas où il s'agit d'élaborer une recommandation sur la base d'un s.r.p. issu d'un critère de synthèse au pouvoir discriminant plus nuancé (quasi-critère ou pseudo-critère). On pourra notamment chercher à tirer parti du préordre complet sous-jacent aux structures de quasi-ordres ou de pseudo-ordres modélisées par ces critères (cf. MMCAD, 7.2 ou Roubens et Vincke (1985)).

² ce qui n'est pas possible lorsque l'on travaille avec une famille de vrais-critères, cf. 3.1.4.

³ Cf. MMCAD, 7.2.3.2 et 1.4.2 c).

caractérisé par la relation asymétrique et transitive \succ_c définie sur l'ensemble C des classes d'indifférence par, $\forall c, c' \in C$:

$$c' \succ_c c \Leftrightarrow [c \neq c' \text{ et } \forall a \in S, \forall a' \in c' \text{ et } \forall a \in c].$$



En prenant appui sur la transitivité de S , il est facile de démontrer que si deux classes d'indifférences $c, c' \in C$ sont telles que :

$$\text{Non}(c' \succ_c c) \text{ et } \text{Non}(c \succ_c c'),$$

alors

$$a' \in c' \text{ et } a \in C \Rightarrow a' R a.$$

Ces remarques peuvent être résumées comme suit : dans un système (S, R) avec S transitive, étant donné deux actions a et b appartenant à une même classe d'indifférence et une troisième, a' , non située dans cette classe, a se compare à a' exactement comme b se compare à a' .

Le rangement que constitue l'ordre partiel \succ_c (cf. figure 6.1.3) ne permet pas de définir (comme dans le cas $R = \emptyset$) un alignement des classes d'indifférence le long d'un axe. Il permet

cependant de mettre en évidence l'existence d'une ou plusieurs classes d'indifférence renfermant des actions qui ne sont surclassées par aucune action appartenant à une autre classe. Ici encore, nous nous référerons à de telles classes d'indifférence en disant qu'elles sont de **rang 0**. Dire qu'une action b appartient à une classe de rang 0 équivaut à dire qu'aucune action $a \in A$ ne peut être telle que $a S b$ et $\text{Non}(b S a)$. Nous dirons encore d'une telle action b qu'elle est **S-efficace**¹.

S'il n'existe qu'une seule classe c_0 de rang 0 (ce qui est nécessairement le cas lorsque $R = \emptyset$ mais peut se produire même si $R \neq \emptyset$), alors il est aisé de constater que :

$$c_0 = A^*$$

c_0 regroupant l'ensemble de toutes les actions optimales. On est alors ramené à la situation du a).

S'il existe plusieurs classes de rang 0 (cf. figure 6.1.3), il est facile de constater qu'alors, nécessairement, $A^* = \emptyset$ puisqu'aucune action appartenant à une classe de rang 0 ne peut surclasser une action se situant dans une autre classe de rang 0. En raison de la transitivité de S , il est cependant facile de montrer que si une action a n'appartient pas à une classe de rang 0, il existe nécessairement au moins une action S -efficace b telle que $b S a$.

Cette dernière remarque invite à opérer la sélection en prenant appui en priorité sur le sous-ensemble C_0 de C formé des classes de rang 0.

Lorsque $C_0 = \{c_0\}$, on a vu que la présence d'incomparabilités ne change rien par rapport à ce qui a été dit au a).

Considérons donc le cas $\text{card}(C_0) > 1$. Le sous-ensemble A' auquel conduit la procédure de sélection doit nécessairement

contenir au moins une action de chacune des classes de C_0 . En effet, rien ne peut justifier que toutes les actions d'une même classe de rang 0 soit éliminées puisqu'aucune de celles qui seraient sélectionnées ne pourrait les surclasser. Les éléments de C_0 sont des classes de véritables *ex aequo*. De même qu'au a), on est alors amené à retenir, dans A' , un représentant de chacune des classes de C_0 . Le choix de ces représentants s'effectue comme on l'a vu au a).

Tout ensemble A' constitué comme il vient d'être dit possède les deux propriétés suivantes :

- l'élimination de chacune des actions non sélectionnées est justifiée par le fait que A' est **surclassant**, ce qui signifie que si $a \notin A'$, alors il existe au moins une action $b \in A'$ telle que $b S a$;
- deux actions quelconques appartenant à A' sont incomparables selon le modèle (S, R) ; il est impossible, sur la base de l'information prise en compte, de restreindre davantage cet ensemble en éliminant davantage d'actions.

Il répond donc bien aux deux propriétés requises de la problématique du choix (cf. passage introductif du 6.1.2).

Nous avons donc mis en évidence le fait que, lorsque S est transitive, une procédure de sélection bien définie s'impose. Elle consiste :

- à rechercher l'ensemble C_0 des classes d'indifférence de rang 0 ;
- à choisir, dans chacune de ces classes, un représentant.

c) S est quelconque

Lorsque S n'est pas transitive, il n'existe pas nécessairement une unique partition de A en classes d'indifférence et les classes d'indifférence ne regroupent pas nécessairement des actions véritablement *ex aequo*, c'est-à-dire se comparant de la même façon à chacune des autres. L'existence d'actions optimales ou même de classes de rang 0 (c'est-à-dire d'actions S -efficaces)

¹ Cette terminologie généralise le concept d'actions efficaces (cf. MMCAD, 10.4) qui apparaissent comme des actions A_F -efficaces avec A_F relation de dominance.

n'est pas non plus assurée (cf. figure 6.1.4). La procédure décrite au b) n'est donc plus nécessairement applicable.

On peut cependant remarquer que l'ensemble A' auquel conduit la procédure de sélection dans le cas transitif jouit d'un certain nombre de propriétés qui s'énoncent indépendamment de la transitivité de S :

PROPRIÉTÉ $\alpha.1$: A' est surclassant.

PROPRIÉTÉ $\alpha.2$: Aucun des sous-ensembles stricts de A' ne possède la propriété $\alpha.1$. Un ensemble A' qui possède les propriétés $\alpha.1$ et $\alpha.2$ est dit **surclassant minimal**.

PROPRIÉTÉ $\alpha.3$: Deux actions quelconques de A' sont incomparables.

PROPRIÉTÉ $\alpha.4$: Toute action de A' est S -efficace.

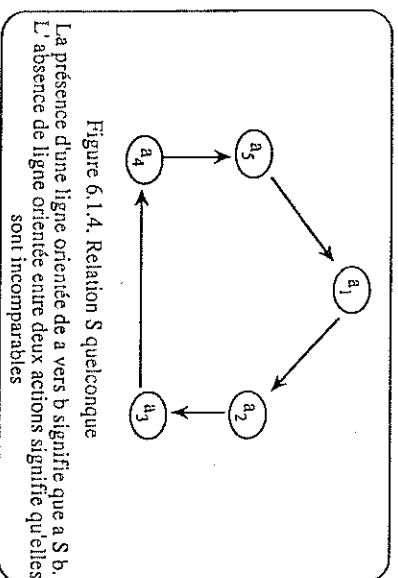
PROPRIÉTÉ $\alpha.5$: A' jouit de propriétés qui définissent ce sous-ensemble de façon unique à des substitutions près d'actions jugées *ex æquo*.

Rappelons que les propriétés $\alpha.1$ et $\alpha.2$ ne font qu'exprimer, en termes formels, les deux exigences fondamentales de la problématique du choix. La propriété $\alpha.3$ interprète¹, de manière un peu restrictive, le fait que A' doit être aussi restreint que possible. Cette interprétation est néanmoins pertinente car, dans la phase d'étude ultérieure qui doit mener de A' au choix final, il est justifié de faire porter l'effort sur des actions incomparables (ou très difficilement comparables) avec les informations dont on dispose dans la présente phase d'étude. Les propriétés $\alpha.4$ et $\alpha.5$ paraissent devoir être naturellement vérifiées par le résultat de toute "bonne" procédure de sélection.

Pour définir une "bonne" procédure de sélection valable dans le cas général (S quelconque), on pourrait être tenté d'exiger

¹ Il est facile de prouver que si A' vérifie $\alpha.1$ et $\alpha.3$, alors il vérifie $\alpha.2$.

qu'elle aboutisse obligatoirement à un ensemble A' jouissant des cinq propriétés ci-dessus. Malheureusement, une telle procédure ne peut exister. L'exemple de la figure 6.1.4 montre que la propriété $\alpha.4$ ne peut être exigée. Il en est de même de $\alpha.3$ puisque, sur le même exemple, il n'existe aucun ensemble surclassant ne contenant que des actions deux à deux incomparables (tout ensemble surclassant contenant au moins trois actions). On pourrait se limiter à n'exiger que $\alpha.1$ et $\alpha.2$ (lesquelles sont toujours compatibles, comme il est facile de le prouver). Malheureusement, dans bien des cas, une très large indétermination demeure si l'on s'en tient là (dans l'exemple de la figure 6.1.4, il existe cinq ensembles surclassants minimaux).

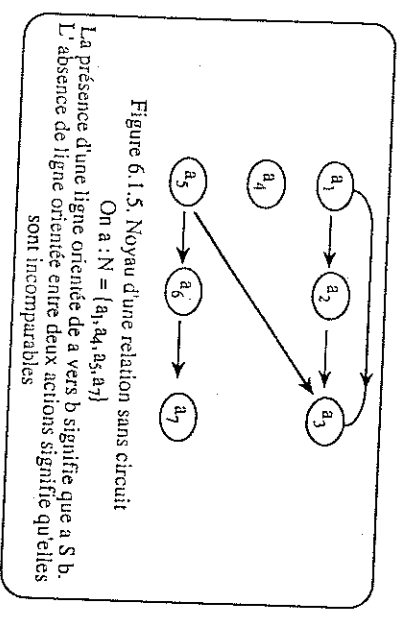


L'analyse précédente amène à penser que la présence d'un circuit tel que celui de la figure 6.1.4 peut être à l'origine de difficultés importantes. Afin d'approfondir cette hypothèse, examinons ce que deviennent les cinq propriétés ci-dessus relativement à une relation S sans circuits, c'est-à-dire telle qu'il soit impossible de trouver une suite d'actions a_1, \dots, a_p telle que :

$$a_1 S a_2, \dots, a_1 S a_{p-1}, \dots, a_{p-1} S a_p, a_p S a_1.$$

Un résultat classique en théorie des graphes (cf. Roy (1969-1970)) permet d'affirmer que si S est sans circuits, il existe (cf. figure 6.1.5) un sous-ensemble unique $N \subset A$, appelé **noyau** de S , jouissant des propriétés $\alpha.1$ et $\alpha.3$ (donc aussi de $\alpha.2$). Le sous-ensemble N étant unique, la propriété $\alpha.5$ est également

vérifiée. Il est enfin facile de prouver qu'il satisfait de plus à la forme affaiblie suivante de la propriété $\alpha.4$:



PROPRIÉTÉ $\alpha.4$ bis : Le nombre d'actions non S-efficaces sélectionnées est égal au nombre minimum d'actions non S-efficaces que renferme n'importe quel ensemble surclassant.

Il nous semble donc légitime d'exiger d'une bonne procédure de sélection qu'elle aboutisse à $A' = N$ lorsque S est sans circuit. Lorsque S est transitive et ne contient pas de circuits (c'est-à-dire lorsque S est un ordre partiel), le lecteur vérifiera sans peine que, dans ce cas, la procédure de sélection préconisée au b) aboutit bien au noyau de S.

En conclusion, nous avons montré que la procédure de sélection s'impose dans deux cas remarquables : S transitive ou S sans circuits. Il serait possible (mais sans doute un peu fastidieux) de montrer que la procédure s'impose encore dans le cas où les éventuels circuits regroupent chacun des actions véritablement *ex aequo*. La solution est alors obtenue en sélectionnant un représentant de chacune des classes du noyau d'une relation \succ définie à partir de telles classes d'*ex aequo*. Les propriétés $\alpha.1$, $\alpha.2$, $\alpha.3$, $\alpha.4$ bis et $\alpha.5$ demeurent vérifiées. Nous verrons au 6.2 comment, avec ELECTRE IS, on peut surmonter la seule difficulté non examinée ici : celle qui provient de l'existence de circuits passant par des actions n'apparaissant pas comme de véritables *ex aequo*.

6.1.3 Cas de la problématique du tri (P.β)

On s'intéresse ici au cas où le problème est posé en termes de tri des actions de A, ce tri consistant à les répartir entre des catégories B, C, D, ... définies au préalable. Affecter une action a à une catégorie C signifie que l'on oriente, de façon bien définie, ce que doit devenir a. Autrement dit, chaque catégorie est caractérisée par la suite qui est réservée aux actions qui lui sont affectées. Soulignons enfin que, dans cette problématique, l'affectation d'une action à une catégorie donnée s'effectue indépendamment de l'affectation des autres actions à cette catégorie ou à d'autres catégories. C'est dire que la manière dont les actions de A se comparent entre elles n'influence en rien l'affectation. Voici brièvement évoquées¹ trois situations concrètes dans lesquelles l'aide à la décision peut être abordée selon cette problématique.

— **Diagnostic médical :** les actions sont ici les patients et les catégories correspondent aux maladies répertoriées ; l'examen, en affectant un patient dans une catégorie, amène à lui prescrire un traitement bien défini.

— **Localisation d'usines :** dans une première phase d'étude, A peut comporter un très grand nombre de sites. On peut vouloir procéder à un premier tri en deux catégories, l'une C devant regrouper tous les sites qui présentent une insuffisance notable et B tous les autres (à retenir en vue d'une seconde phase d'étude). Le très grand nombre de sites conduit, dans cette première phase, à ne faire intervenir que des critères faciles à évaluer ; l'affectation en classe B ou C repose sur la comparaison des performances des sites sur ces critères à des normes d'acceptabilité fixées pour l'affectation en catégorie B. Si le nombre des sites qui se trouvent ainsi affectés en catégorie B est jugé insuffisant, ceci peut soit conduire à réviser les normes, soit à entreprendre une nouvelle investigation pour découvrir de nouveaux sites. On remarquera que, dans cet exemple, la problématique conduit à une "sélection"

¹ Pour d'autres exemples et davantage de précisions sur cette problématique, voir MMCAD, chapitre 6 et Yu (1992).

mais l'ensemble B qui découle de la procédure d'affectation ne peut pas être confondu avec l'ensemble A' qui serait obtenu au terme d'une procédure de sélection correspondant à la problématique du choix. Dans ce dernier cas en effet, la comparaison entre actions de A jouerait un rôle capital.

— **Octroi de crédit** : l'ensemble A est ici constitué par des demandes de prêt d'un type donné qui parviennent à un organisme bancaire ; il s'agit de décider de la suite à donner à chaque demande. Sur la base d'un dossier, certaines de ces demandes peuvent être rejetées sans appel (catégorie J), d'autres peuvent être immédiatement acceptées (catégorie B). Pour d'autres enfin, un certain nombre de catégories intermédiaires C, D, ... peuvent être introduites (prêts susceptibles d'être acceptés moyennant un supplément de garantie ou une réduction du montant du prêt, dossiers nécessitant une étude plus approfondie ou un complément d'information, ...).

Cette problématique du tri conduit à mettre en place une **procédure d'affectation**. Celle-ci prend appui sur un modèle de préférences non pas pour comparer les actions de A entre elles mais pour les comparer à des normes qui servent à définir les conditions que doivent remplir les performances $g_1(a), \dots, g_n(a)$ pour que l'action a soit affectée en catégorie B, C, ou ... Nous supposons ici que de telles normes peuvent être définies en termes d'**actions de référence** b^h caractérisant la (ou les) action(s) centrale(s) ou encore les actions limites qu'il paraît justifié de devoir affecter dans une catégorie donnée C^h . Que l'action de référence b^h apparaisse comme devant caractériser une action centrale ou une action limite de la classe C^h , elle est toujours définie par les performances qu'elle obtient sur les n critères de F :

$$g(b^h) = (g_1(b^h), \dots, g_n(b^h))$$

encore appelée **profil de référence** b^h (central ou limite). L'affectation est par conséquent fondée sur la manière dont le modèle de préférence conduit à comparer les actions de A aux différentes actions ou profils de référence.

Nous commencerons par rappeler la façon à la fois naturelle et classique de procéder à l'affectation lorsqu'on prend appui sur un critère unique de synthèse. Nous examinerons ensuite pourquoi il n'existe plus de procédure naturelle lorsque le système de préférences, toujours supposé de type (S, R), fait intervenir une relation S non nécessairement transitive et complète ainsi que des profils b^h non réductibles à un seul nombre.

a) *Affectation en présence d'un vrai-critère unique de synthèse g*

A l'issue d'un examen (baccalauréat par exemple), il est habituel d'affecter le candidat à l'une des catégories "admis sans mention", "mention assez bien", "mention bien", "mention très bien" en comparant sa performance $g(a)$ (moyenne pondérée des performances obtenues dans diverses disciplines) à des normes telles que 10/20, 12/20, 14/20, 16/20. Cette comparaison de $g(a)$ à des normes g^0, g^1, \dots, g^k pour affecter a à une catégorie parmi k se retrouve dans beaucoup d'autres domaines (credit scoring notamment), toujours avec la même règle d'affectation (à l'emplacement près de l'inégalité large), $\forall h \in \{1, 2, \dots, k\}$:

$$a \text{ est affectée en catégorie } C^h \Leftrightarrow g^{h-1} \leq g(a) < g^h.$$

L'échelle $[g^0; g^k]$ de variation du critère unique g se trouve donc (cf. figure 6.1.6) découpée en k intervalles sur la base des valeurs limites g^1, \dots, g^{k-1} et l'on suppose que les actions (objets, individus, ...) conduisant à des valeurs d'un même intervalle du critère de synthèse méritent le même traitement ultérieur et doivent, par conséquent, être affectés à la même catégorie. Ceci appelle trois remarques.

— Les catégories auxquelles on s'intéresse sont naturellement complètement ordonnées depuis celle C^1 appelée à recevoir les actions les plus "mauvaises" jusqu'à C^k destinée à recevoir les "meilleures" actions. S'il en est bien ainsi dans deux des trois exemples (localisation et octroi de crédit) évoqués en début de paragraphe, cette hypothèse ne convient pas au cas du diagnostic médical.

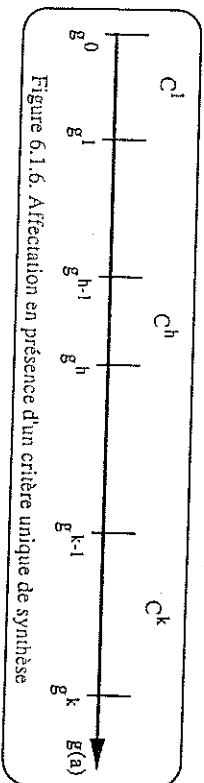


Figure 6.1.6. Affecation en présence d'un critère unique de synthèse

— L'idée, généralement vague, de ce que doivent avoir en commun les actions qui sont affectées à une même catégorie est appréhendée en étroite relation avec la procédure d'affectation puisque chaque catégorie C^h est caractérisée par les deux valeurs limites g^{h-1} et g^h du critère de synthèse. On peut justifier cette façon de faire en considérant des actions de référence $b^0, \dots, b^h, \dots, b^k$ telles que $g^h = g(b^h)$. La catégorie C^h est alors destinée à regrouper toutes les actions a telles que a est préférée à b^{h-1} et b^h est préférée à a . Sur la base de la relation S associée au critère g , ce qui vient d'être énoncé s'écrit :

$$[a S b^{h-1} \text{ et } \text{Non}(b^{h-1} S a)] \text{ et } [b_h S a \text{ et } \text{Non}(a S b^h)] \Rightarrow a \in C^h. \quad (r.6.1.1)$$

— L'affectation d'une action a indifférente à une action de référence, par exemple b^h ($g(a) = g^h$) doit être fixée, par convention, soit dans la classe inférieure notée ici C^h , soit dans la classe supérieure C^{h+1} . C'est ce dernier parti qui a été adopté ici. Nous traduirons cette convention en disant que chaque catégorie est **fermée en bas**². La convention inverse conduirait à des catégories **fermées en haut**.

¹ Nous supposons ici que g est un vrai-critère : S est transitive et définie par $a S b \Leftrightarrow g(a) \geq g(b)$. Le cas d'un quasi-critère est traité au b) ci-après.

² Afin d'éviter toute difficulté pour affecter une éventuelle action potentielle indifférente à b^0 ou à b^k , il convient de donner à g^0 une valeur suffisamment petite et à g^k une valeur suffisamment grande pour que, en pratique, on n'ait pas à affecter des actions telles que b^0 ou b^k .

Grâce aux hypothèses contenues dans ces trois remarques, la procédure ci-dessus permet d'affecter chaque action potentielle à une catégorie unique.

b) Affectation en l'absence d'un vrai-critère unique de synthèse

Ici, comme au 6.2., nous nous intéresserons à des procédures d'affectation qui généralisent celle décrite au a). Généraliser veut dire ici que l'affectation prend explicitement appui sur les performances $g_j(a), \dots, g_n(a)$ auxquelles on ne substitue plus un unique nombre $g(a)$. Toutefois, nous demeurerons dans le cadre défini par les trois remarques qui terminent le 6.1.3 a). Celles-ci nous conduisent à énoncer les trois hypothèses suivantes :

HYPOTHÈSE $\beta.1$: Les catégories sont ordonnées et notées $C^h, h = 1, \dots, k$; C^1 est la catégorie la plus "basse" et C^k est la catégorie la plus "haute".

HYPOTHÈSE $\beta.2$: Pour délimiter les catégories, on introduit $k + 1$ profils de référence $g^h = (g_1^h, \dots, g_n^h), h = 0, \dots, k$ vérifiant, $\forall j \in F$:

$$\begin{aligned} g_1^0 &< g_j(a) \\ g_{j,h-1}^0 &\leq g_j^h \\ g_j^0 &< g_j^k \\ g_j(a) &< g_j^k. \end{aligned} \quad (r.6.1.2)$$

En outre, pour au moins une valeur de $j, g_j^{h-1} \neq g_j^h$; le profil g^h doit servir de référence pour limiter en bas la catégorie C^{h+1} (d'où son nom de profil bas de C^{h+1}) et en haut la catégorie C^h (d'où son nom de profil haut de C^h). Conformément à la conception de ces profils et sur la base d'une relation de surclassement S , on pose :

$$[a S b^{h-1} \text{ et } \text{Non}(b^{h-1} S a), b^h S a \text{ et } \text{Non}(a S b^h)] \Rightarrow a \in C^h \text{ (cf. r.6.1.1)}.$$

HYPOTHÈSE $\beta.3$ (version basse¹) : La catégorie C^h ($h = 1, \dots, k$) est fermée en bas par l'action de référence b^{h-1} , autrement dit :

¹ Dans la version haute, on suppose C^h fermé en haut par b^h .

[a S b^{h-1} et b^{h-1} S a] \Rightarrow a \in C^h.

(r.6.1.3)

Il est facile de démontrer le résultat suivant :

Si la relation de surclassement S est transitive et complète, alors, sous les hypothèses $\beta.1, \beta.2, \beta.3$, toute action a se trouve affectée sans ambiguïté à une classe et à une seule. On peut obtenir cette affectation en appliquant la procédure décrite ci-dessus au a) après avoir fait choix d'un critère g astreint seulement à vérifier ¹ :

$$g(a) \geq g(b) \Leftrightarrow a \text{ S } b.$$

Si la relation S n'est pas transitive, alors les hypothèses $\beta.1, \beta.2, \beta.3$ ne définissent plus sans ambiguïté la catégorie à laquelle a doit être affectée. Nous le montrons ci-après à l'aide de quelques exemples qui mettent en évidence deux types de difficultés fondamentales.

Considérons en premier lieu le cas d'une relation S complète, non transitive, rendant possible l'existence d'une action c^h indifférente à la fois à b^h et b^{h+1}. De façon plus précise, supposons que S soit la relation de surclassement associée à un quasi-critère de synthèse g :

$$a \text{ S } b \Leftrightarrow g(a) + q[g(a)] \geq g(b).$$

Considérons une action fictive c telle que :

$$g(c) = g(b^h) + q[g(b^h)] \text{ et} \\ g(c) + q[g(c)] \geq g(b^{h+1}).$$

On a alors c I b^h et c I b^{h+1}. D'après (r.6.1.3), l'action c^h doit être affectée à la fois en catégorie C^{h+1} et en catégorie C^{h+2}. Comme nous le montrerons au 6.3, (r.6.1.1) ne peut conduire, même avec S quelconque, à une semblable double affectation. Ceci laisse prévoir que, quelle que soit S, on doit pouvoir éliminer toute possibilité de double affectation en adoptant des profils dont l'"espace-ment" est suffisant pour ne pas créer d'ambiguïté eu égard aux valeurs des

¹ Sous des conditions non restrictives en pratique, il existe nécessairement au moins un vrai-critère g satisfaisant à cette condition (cf. 1.4.2) : si g est une solution et X une transformation monotone croissante, alors $\chi(g)$ est une solution conduisant à la même affectation.

seuls sur les différents critères.

Considérons en second lieu le cas d'un système (S, R) avec R \neq \emptyset et S transitive (par exemple S = A_F). Il est clair que rien ne s'oppose à ce qu'il existe une action a telle que :

$$a \Delta_F b^{h-1}, \text{ Non}(b^{h-1} \Delta_F a) \text{ et } a \text{ R } b^h.$$

A quelle catégorie convient-il d'affecter une telle action a ? Les hypothèses faites n'apportent aucun élément de réponse à cette question. Dès que R \neq \emptyset (que la relation de surclassement soit transitive ou non), le cadre d'hypothèses considérées laisse planer un arbitraire total quant à la façon d'affecter certaines actions.

Avant d'introduire quelques exigences naturelles susceptibles d'aider à contourner ces difficultés, nous allons reformuler, dans le cadre considéré ici, deux procédures d'affectation classiques afin de montrer qu'il serait vain de vouloir réduire complètement la part d'arbitraire dont il vient d'être question sans approfondir davantage la signification concrète des profils limites.

Les deux procédures d'affectation qui suivent (dites conjonctives et disjonctives ¹) sont profondément différentes de celle présentée ci-dessus au a) en ce sens que l'une comme l'autre prennent uniquement appui sur la relation de dominance Δ_F .

PROCÉDURE CONJONCTIVE : En posant successivement $i = k, k-1, \dots, 1$, on examine si $a \Delta_F b^{i-1}$. Soit h la plus grande valeur telle que $a \Delta_F b^{h-1}$. On affecte l'action a en catégorie C^h.

Puisque, par hypothèse, $a \Delta_F b^0$, la procédure permet d'affecter sans ambiguïté chaque action à une unique catégorie. Elle vérifie (r.6.1.1) et (r.6.1.3).

Concrètement, cette procédure n'est pertinente que si le profil bas de la catégorie C^h, g_{h-1}^{h-1} , est défini à partir de minima g_{j-1}^{h-1} qu'il

¹ Ces deux termes sont ici pris dans le même sens qu'au 5.2.2 b). Toutefois, les procédures d'écrémage ne sont pas à proprement parler des procédures d'affectation puisque le fait d'être affectée en catégorie B ou C dépend, pour une action donnée (cf. (r.5.2.14) et r.5.3.15)), de la présence ou de l'absence, dans A, d'autres actions.

est nécessaire d'atteindre conjointement pour être affectés en catégorie C^h . Dans l'exemple de l'octroi de crédit, on peut ainsi vouloir n'affecter un dossier dans la catégorie la plus haute (acceptation définitive sans autre examen) que si, sur chacun des critères considérés, il atteint une performance suffisante. Pour affecter les autres dossiers, on peut alors considérer que c'est la performance "la plus faible" qui doit déterminer la catégorie d'affectation.

PROCÉDURE DISJONCTIVE : En posant successivement $i = 0, 1, \dots, k$, on examine si $b^i \Delta_F a$. Soit h la plus petite valeur telle que $b^h \Delta_F a$. On affecte l'action a en catégorie C^h .

Puisque, par hypothèse, $b^k \Delta_F a$, la procédure permet d'affecter sans ambiguïté chaque action à une unique catégorie. Elle vérifie (r.6.1.1) et l'adaptation de (r.6.1.3) à des catégories fermées en haut ¹.

Concrètement, elle n'est pertinente que si le profil bas de la catégorie C^h , g^{h-1} , est défini à partir de minima g_j^{h-1} dont l'un au moins doit être dépassé pour permettre une affectation en catégorie C^h . Considérons par exemple divers niveaux de sécurité informatique correspondant à des dispositifs de plus en plus sophistiqués et coûteux auxquels on peut soumettre chaque application informatique existant ou susceptible d'exister dans une entreprise. Les critères peuvent concerner le degré de confidentialité de a , les conséquences financières, juridiques sur l'image de l'entreprise, ... qu'aurait un vol ou une détérioration de a . Si, pour chacun d'eux, le fait de dépasser la norme g_j^{h-1} implique un niveau de sécurité correspondant au moins à C^h , alors l'affectation doit se faire selon la procédure disjonctive.

Il est clair que l'une et l'autre de ces deux procédures, en dépit de la similitude de leur technique, affectent différemment toute action a qui, vis-à-vis de la relation de dominance, se trouve être incomparable à un ou plusieurs profils. La différence

¹ Remplacer $b^i \Delta_F a$ par $\{b^i \Delta_F a \text{ et Non}(a \Delta_F b^i)\}$ conduirait à une procédure disjonctive adaptée à des catégories fermées en bas.

d'affectation est d'autant plus importante que le nombre des profils incomparables est plus grand. Cette différence provient de ce que les profils limites sont pris en compte selon deux logiques duales, lesquelles confèrent, à leurs positions limites, des significations différentes. Ces deux procédures ont pourtant en commun le fait de satisfaire à un certain nombre d'exigences que nous allons énoncer puis commenter.

EXIGENCE D'UNICITÉ : Chaque action est affectée à une et une seule des catégories ordonnées C^1, \dots, C^k .

EXIGENCE D'INDÉPENDANCE : La catégorie à laquelle une action a est affectée est indépendante de la manière dont les autres actions sont affectées aux diverses catégories.

EXIGENCE DE CONFORMITÉ AUX PROFILS LIMITES : Les catégories sont délimitées à partir de profils limites conformément à l'hypothèse $\beta.2$. L'affectation de toute action doit être conforme à (r.6.1.1) et au fait que les catégories sont soit fermées en bas, soit fermées en haut (hypothèse $\beta.3$).

EXIGENCE DE MONOTONICITÉ : Si $b \Delta_F a$, alors b doit être affectée à une catégorie C^y et a à une catégorie C^x telles que $y \geq x$.

EXIGENCE D'HOMOGENÉITÉ : Toutes les actions vérifiant les conditions suivantes doivent être affectées à la même catégorie C^i avec $x \leq i \leq y$:

$a \ S \ b^{x-1}, \text{ Non}(b^{x-1} \ S \ a), b^x \ R \ a,$
 $b^y \ S \ a, \text{ Non}(a \ S \ b^y), a \ R \ b^{y-1}.$

EXIGENCE DE STABILITÉ : Si l'on réduit d'une unité le nombre des catégories en supprimant l'action de référence b^i , l'affectation des actions précédemment affectées aux catégories autres que C^i et C^{i+1} n'est pas modifiée. Les actions primitivement affectées à l'une de ces deux catégories se trouvent, après suppression de b^i , affectées dans la catégorie délimitée par les actions de référence b^{i-1} et b^{i+1} .

Les trois premières de ces six exigences ne font que reprendre des desiderata déjà exprimés. Elles traduisent des hypothèses dont on peut néanmoins vouloir s'affranchir dans certains cas. La première impose, en particulier, des catégories complètement ordonnées (cf. paragraphe introductif du 6.1.3) et excluent que certaines actions ne soient pas affectées à l'une d'elles (ce qui équivaldrait à les affecter à une catégorie à part qui ne pourrait être rangée par rapport aux autres). Les trois dernières exigences ont pour effet de restreindre l'arbitraire que laissent les hypothèses $\beta.1$ et $\beta.3$ pour l'affectation des actions qui sont incomparables, selon le système (S, R) pris en compte, à certains des profils de référence. L'exigence d'homogénéité impose en particulier d'affecter, à une même catégorie, toutes les actions qui se trouvent être incomparables à une même séquence de profils limites de la forme $b^x, b^{x+1}, \dots, b^{y-1}$, alors qu'elles surclassent strictement b^{x-1} et sont strictement surclassées par b^y . Faisons observer que, dans ces conditions, la procédure conjonctive affectée de telles actions en catégorie C^x alors que la procédure disjonctive affecte ces mêmes actions en catégorie C^y .

On présentera, au 6.3, deux procédures (ELECTRE TRI) qui généralisent les procédures conjonctives et disjonctives au cas d'un système de préférences de type (S, R) quelconque. On montrera que ces procédures vérifient bien les six exigences qui viennent d'être présentées.

6.1.4 Cas de la problématique du rangement (P. γ)

On s'intéresse ici au cas où l'aide à la décision est envisagée dans des termes tels que l'élaboration d'une prescription ou la communication, l'argumentation au sein du processus de décision passent par la mise en évidence préalable d'une structure de préordre sur l'ensemble A. Ce préordre peut être complet (cf. figure 6.1.2) ou seulement partiel (cf. figure 6.1.3). Il en est par exemple ainsi¹ lorsque l'on cherche à échelonner dans le temps, conformément à un principe de priorité décroissante, des investis-

6.1.4 Aide multicritère à la décision 357

sements concernant l'infrastructure routière d'un pays, l'aménagement hydraulique (adduction d'eau, irrigation, ...) d'une région, des projets de recherche et développement au sein d'une grande entreprise, ... Certains problèmes de recrutement de personnel, de média planning, de choix de localisation, ... conduisent également à aborder l'aide à la décision avec cette problématique.

Dès lors qu'il est question de classer les actions (c'est-à-dire de les regrouper en classes d'indifférence et d'ordonner ces classes), le praticien a naturellement tendance à rechercher un préordre complet. L'élaboration d'un vrai-critère de synthèse conduit directement à ce résultat. Il n'en demeure pas moins vrai que, en imposant d'emblée la recherche d'un préordre complet, on s'expose à masquer le caractère artificiel de certains regroupements en classes d'indifférence ainsi que la manière de comparer entre elles certaines de ces classes. Pour cette raison, il est généralement préférable de se donner d'abord comme objectif la recherche d'un préordre partiel ; ensuite, en fonction des incompatibilités observées, on pourra chercher à les supprimer afin d'aboutir à un préordre complet compatible avec le préordre partiel. Ce second objectif est toujours facile à atteindre à partir du premier mais il peut y avoir de très nombreuses façons de le faire. Le point délicat consiste donc à justifier, lorsque deux actions sont incomparables dans le préordre partiel, le fait de classer finalement l'une avant l'autre, l'autre avant l'une ou de les mettre ex aequo.

Nous appellerons procédure de **classement** la procédure par laquelle on passe d'un modèle de préférences résultant d'une PAMC de type II à un préordre que nous noterons dans la suite Z. La relation Z désigne par conséquent ici une relation binaire sur A soumise à une seule condition¹, à savoir être transitive :

a Z b et Non(b Z a) signifiant a avant b dans le préordre,

¹ Pour plus de précisions sur cette problématique et ses rapports avec les deux précédentes, voir 1.7 et MMCAD, chapitre 6.

¹ Du fait de nos conventions, Z doit également être réflexive mais ceci est sans importance ici. Pour plus de précisions, voir 1.4.2 c) et MMCAD, 7.2.2 et 7.2.3.

a Z b et b Z a signifiant a et b dans la même classe d'indifférence du préordre,
 Non(a Z b) et Non(b Z a) signifiant a et b incomparables dans le préordre.

Adopter cette problématique conduit normalement à remettre en question certains des jugements de préférences qui découlent de la PAMC de type II considérée. Lorsque le résultat de cette dernière est de type (S, R) avec S transitive, ou de type (P, ~) avec P transitive, ou encore de type (P, I, R) avec P \cup I transitive, cette remise en question n'a pas lieu d'être puisque le modèle de préférences sur lequel on prend appui définit d'emblée le préordre Z cherché. Au contraire, lorsque ce modèle de préférences initial ne jouit pas de la propriété de transitivité qui vient d'être rappelée, le préordre Z que l'on cherche finalement à obtenir présentera inévitablement des différences avec ce modèle de préférences initial. De façon plus précise, l'interprétation pour l'aide à la décision de :

a Z b et Non(b Z a) comme une préférence de a par rapport à b,
 a Z b et b Z a comme une indifférence entre a et b,
 Non(a Z b) et Non(b Z a) comme une incomparabilité entre a et b

peut fort bien ne pas être en concordance parfaite avec le modèle (S, R), (P, ~), (P, I, R) initial. Cette interprétation fait apparaître Z comme un (nouveau) modèle de préférences sur A obtenu en deux étapes :

Première étape : La PAMC aboutissant au modèle initial de type (S, R), (P, ~) ou (P, I, R).

Deuxième étape : La procédure de classement permettant de passer du modèle initial à Z.

Cette analyse en deux étapes est certes correcte mais l'interprétation donnée ci-dessus de Z demande certaines précautions. En effet, Z est avant tout un instrument d'aide à la décision fondé sur un modèle de préférences initial obtenu par une PAMC de

type II. Alors que, dans un tel modèle, le jugement en termes de préférences entre deux actions b et a ne fait intervenir que les seules performances propres à ces deux actions, il ne peut en être de même dans Z. La relation Z devant être transitive, la comparaison de b et a peut devoir être influencée par la manière dont b et a se comparent à une action tierce, autrement dit par les performances d'actions autres que b et a. C'est pour pouvoir être un "bon instrument" d'aide à la décision (pour permettre d'asseoir une recommandation, pour participer efficacement à des débats, à l'élaboration de convictions, ...) que Z doit être transitive. En imposant cette contrainte, on ne peut éviter de faire apparaître des préférences strictes ou des indifférences qui, sans elle, seraient difficiles à justifier sur la seule base des performances propres au couple d'actions en cause. Cela n'a donc pas grand sens de chercher à savoir si le nouveau modèle de préférences Z est mieux fondé ou moins bien fondé que le modèle initial. L'un et l'autre ne sont pas conçus pour apporter des éléments de réponse à la même question¹.

Lorsque le modèle initial est constitué d'un unique système de préférences de type (S, R) ou (P, ~), on peut concevoir Z comme une "approximation" de S ou de P. Les commentaires qui précèdent font apparaître cette conception comme relativement arbitraire (puisque le modèle initial n'est pas plus "vrai" que le nouveau modèle que l'on cherche à élaborer). Quoi qu'il en soit, pour comparer deux approximations (et définir Z comme la "meilleure" approximation), il faut introduire une notion de distance entre Z d'une part et S ou P d'autre part. Supposons qu'un mode de calcul bien précis ait été défini pour calculer une telle distance quelles que soient Z et S ou P. On peut alors adopter comme procédure de classement un algorithme qui recherche le préordre Z qui minimise une telle distance².

Le choix du mode de définition de la distance pose évidemment problème. Il est clair que la solution finalement trouvée est très fortement conditionnée par ce choix. La distance définie à partir de la différence symétrique entre relations binaires a tout particulièrement retenu l'attention. Un fondement axiomatique en a même été proposé³ mais cette axiomatique n'est guère

¹ Voir Définition 1.1.1.

² Voir par exemple Barthélémy et al. (1989).

³ Cf. Barthélémy (1979).

convaincante du fait que cette distance est appropriée pour fonder un algorithme de classement. Il peut en particulier être souhaitable¹ de traiter différemment indifférence et incomparabilité.

De plus, avec cette façon de fonder une procédure de classement sur une recherche de préordre à distance minimum d'une relation de préférence initiale, des solutions très différentes et, dans certains cas, assez nombreuses, peuvent se trouver être à la même distance optimale (ou à des distances très voisines) de la relation initiale que l'on cherche à approximer. Or, de telles solutions peuvent être profondément différentes et rien ne permet de choisir l'une plutôt que l'autre comme résultat de la procédure de classement (cf. Perny (1992)).

Mentionnons enfin que cette recherche d'un préordre à distance minimum d'une relation donnée soulève des problèmes algorithmiques difficiles (cf. Hudry (1989)).

Compte-tenu de ce qui précède, nous ne développerons pas davantage, dans ce livre, la voie qui consiste à chercher à assoir une procédure de classement sur cette idée d'approximation.

Le résultat Z que l'on cherche à atteindre avec la problématique du rangement est beaucoup plus complexe et nuancé que ne l'est la simple dichotomie (A', A\A') à laquelle conduit la problématique du choix. Cela amène à penser qu'il est préférable de chercher à assoir la procédure de classement sur un modèle de préférences lui-même nuancé, c'est-à-dire formé de plusieurs systèmes de préférences (cf. 5.3). Les considérations qui suivent viennent encore renforcer ce point de vue.

Supposons que l'on prenne appui sur une PAMC de type II aboutissant à un unique système de préférences (S, R)². Comme nous l'avons déjà souligné, le préordre Z que l'on cherche à obtenir ne peut, sauf si S est elle-même transitive, être en totale conformité avec S. Afin de limiter les divergences, une exigence naturelle semble être :

$$a S b \Rightarrow a Z b. \quad (r.6.1.4)$$

¹ Cf. Roy et Slowinski (1993).

² Ce qui suit vaut également pour un système (P, I, R) ou (P, ~).

Cette exigence ne tolère, comme divergence, que celle provenant des cas d'incomparabilité dans le modèle de préférences initial, a R b pouvant donner naissance à a Z b et/ou b Z a. La relation Z devant d'autre part être transitive, elle doit contenir la **fermeture transitive** \hat{S} de S puisque, par définition, \hat{S} vérifie :

$$a \hat{S} b \Leftrightarrow a S b \text{ ou} \\ \text{il existe } a_1, a_2, \dots, a_p \in A \text{ tels que} \\ a S a_1, a_1 S a_2, \dots, a_p S b.$$

Dans ces conditions, la solution qui minimise les divergences entre Z et S consiste à poser $^1 Z = \hat{S}$. Il est clair que cette solution n'est pas satisfaisante : \hat{S} apparaît comme le pur produit d'un artifice qui repose sur la propagation, selon une règle purement formelle, d'éléments de conviction qui n'ont qu'un caractère local. On peut ainsi aboutir à rendre toutes les actions indifférentes entre elles dès lors qu'elles sont suffisamment nombreuses et proches deux à deux pour qu'il apparaisse un chemin du type $a_1 I a_2, a_2 I a_3, \dots, a_{m-1} I a_m$ avec un ensemble $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$.

Ceci montre qu'en imposant à la procédure de classement de vérifier l'exigence (r.6.1.4), on s'expose à aboutir à un préordre mal justifié, ne correspondant pas au bon instrument d'aide à la décision que l'on recherche. Renoncer à (r.6.1.4), c'est accepter que la procédure conduite à Non(a Z b) alors que l'on a a S b dans le modèle de préférences. En fait, ce type de divergence est d'autant moins choquant que la crédibilité de a S b est plus faible. De façon symétrique, le passage de a R b à a Z b sera d'autant plus acceptable que la force des arguments intervenant en faveur de a S b est plus grande. Il importe donc d'assoier la procédure de classement non pas sur un seul système de préférences mais sur plusieurs systèmes hiérarchisés ou un système flou (ce qui est équivalent, comme on l'a vu 5.3).

¹ Un algorithme très simple (cf. Roy (1969-1970)) permet de construire \hat{S} connaissant S.

Au 6.4, nous présentons quatre procédures de classement :

- tout d'abord les deux plus simples : la plus récente, celle de PROMETHEE (fondée sur un modèle de préférences floues) et la plus ancienne, celle d'ELECTRE II (faisant intervenir deux systèmes de préférences),
- puis celle d'ELECTRE III (procédure dérivée de celle d'ELECTRE II mais plus sophistiquée),
- enfin celle d'ELECTRE IV (procédure relative au cas où il paraît difficile de quantifier l'importance relative des critères).

Comme on le verra, chacune de ces procédures a son propre domaine d'intérêt. Toutefois, aucune n'est véritablement pleinement satisfaisante. Chacune d'elles présente en effet des points faibles.

D'une façon générale, si l'on cherche à définir ce qu'est une "bonne" procédure de classement en termes de propriétés ou d'exigences à satisfaire (comme nous l'avons fait pour les procédures de sélection et d'affectation), on constate que ces propriétés ou exigences sont facilement contradictoires et que les plus simples (telles (r.6.1.4)) aboutissent à une impasse. Avec ce problème, on se heurte à des difficultés très profondes sur lesquelles nous reviendrons au 6.5. Pour les raisons qui précèdent, nous ne proposerons pas de liste d'exigences pour cette troisième problématique comme nous l'avons fait pour les deux autres.

6.1.5 Comment choisir une méthode ?

Nous nous mettons ici à la place de l'homme d'étude qui, dans le cadre d'un problème concret¹, a opté en faveur d'une PAMC de type II². Il lui faut maintenant choisir entre de nombreuses méthodes. L'origine de cette diversité a été expliquée à la fin du 5.1.2 (cf. a) à e)). Ci-après, nous adoptons un point de vue plus opérationnel destiné à guider l'homme d'étude en vue

¹ Eventuellement pour une phase d'étude bien spécifiée, cf. MMCAD, chapitre 4.

² Les raisons pouvant justifier une telle option ont été examinées au 5.1.2.

d'un choix effectif. Ce guide en trois étapes est complété en fin de section par le tableau 6.1.1 présentant, de façon synthétique, divers éléments caractéristiques des principales méthodes décrites en détail dans les trois sections ci-après.

i) L'homme d'étude peut commencer par faire intervenir la problématique retenue (cf. fin du 6.1.1 et autres paragraphes du 6.1) pour restreindre l'ensemble des méthodes a priori envisageables. Faisons observer que, dans le cas de la problématique β , il n'aura actuellement plus guère de possibilité de choix (cf. 6.3 et tableau 6.1.1). Ce qui suit ne concerne donc que les problématiques α et γ .

ii) On pourra restreindre encore l'éventail des méthodes possibles en prenant en considération les divers paramètres économiques (poids, seuils de veto et seuils de discrimination principalement, cf. 5.4.4) qu'il convient ou non de faire intervenir. Les options prises à ce niveau dépendent de la nature du problème mais aussi de la façon dont il est pris en charge par les divers intervenants, de leur personnalité, des sources d'information et du temps disponible. Le choix d'une méthode sera ainsi considérablement restreint s'il existe de bonnes raisons pour ne pas faire intervenir de poids (sans pour autant devoir considérer que les critères sont equi-pondérés). Une méthode qui fait intervenir des seuils de veto ainsi que des seuils de discrimination, peut (contrairement à ce qui se passe avec les poids) être aisément utilisée sans que de tels paramètres n'interviennent effectivement (il suffit d'attribuer une grande valeur aux seuils de veto et une valeur nulle aux seuils de discrimination). Il pourra cependant être préférable de recourir à une méthode plus simple : par exemple ELECTRE I ou ELECTRE II dans le cas où tous les critères sont des vrai-critères. Soulignons que, dans certains cas, la nécessité de recourir à une méthode simple ou encore familière à certains des intervenants peut imposer le choix d'une méthode, même si cela doit exclure la prise en compte de tel ou tel paramètre économique.

iii) Il est possible que l'homme d'étude ait encore, à ce niveau, le choix entre plusieurs méthodes. Il pourra alors faire intervenir son affinité pour les différentes méthodes, lesquelles,

jointes à quelques considérations d'ordre technique (cf. tableau 6.1.1), lèveront généralement sans peine ses dernières hésitations.

Tableau 6.1.1 : Caractéristiques des principales méthodes de type ELECTRE

Méthodes	Pro-bib. mat- que	Paramètres économiques			Caractéristiques techniques du s.r.p.
		s. in- dif. pref.	ponds	velo	
ELECTRE I	α	non	oui	oui	1 rel. nette de sur-classement avec niveau de concurrence
ELECTRE IS	α	oui	oui	oui	1 rel. nette de sur-classement avec niveau de concurrence + 1 (événement) indicateur de robustesse
ELECTRE TRI	β	oui	oui	oui	1 rel. nette de sur-classement + des profils limites
ELECTRE II	γ	non	oui	oui	2 rel. emboîtées de surclassement avec niveaux de concurrence
PROMETHEE	γ	oui	oui	non	1 rel. floue de préférence
ELECTRE III	γ	oui	oui	oui	1 rel. floue de sur-classement
ELECTRE IV	γ	oui	non	oui	de 2 à 5 rel. emboîtées de surclassement

Les considérations théoriques du 5.5 et du 6.5 suggèrent également des motifs de préférer telle ou telle méthode. Faisons

cependant observer que des considérations d'ordre axiomatique se prêtent mal à des recommandations d'ordre général en vue du choix d'une méthode, en particulier dans le cas d'une démarche qui n'est pas entièrement descriptive. Dans ce cas, l'attrait que peut conférer à telle ou telle méthode une analyse axiomatique relève d'un jugement essentiellement subjectif (cf. Roy (1992)). Précisons enfin que toutes les méthodes présentées dans ce livre ont fait, dans de nombreuses applications, la preuve de leur viabilité.

6.2 PROCÉDURES D'EXPLOITATION EN PROBLÉMATIQUE DU CHOIX : ELECTRE I ET ELECTRE IS

Cette section et les deux suivantes sont consacrées à une présentation des procédures d'exploitation propres aux méthodes les plus connues et les plus appliquées¹. Cette présentation est faite dans une optique opérationnelle visant à éclairer les utilisateurs de telles méthodes.

Chacune des procédures d'exploitation ci-après a été originellement conçue en relation avec une définition particulière précise d'un système de préférences (cf. 5.2 et 5.3). Rappelons qu'il n'est pas interdit de vouloir appliquer ces procédures à des systèmes de préférences de même nature² découlant de PAMC différentes, voire de comparaisons par paires effectuées directement, sans référence explicite à un tableau de performances.

6.2.1 ELECTRE I

La procédure d'exploitation ci-après concerne la problématique du choix (cf. 6.1.2). Elle s'applique à un système de préférences nettes, de type (S, R), dont la définition originale a été présentée au 5.2.1.1.

¹ Ce sont des raisons pédagogiques et historiques qui nous ont amenés à faire figurer ci-après ELECTRE I et ELECTRE IS.

² Sous réserve des précautions de cohérence, déjà évoquées au 6.1.1, entre opérations de la procédure d'exploitation et propriétés du modèle de préférences.

Cette procédure de sélection comporte quatre étapes successives.

Première étape : Identification des circuits maximaux

Un circuit maximal σ est un circuit de S (cf. 6.1.2 c) qui n'est inclus dans aucun autre circuit. Le circuit $\sigma' = (a_2, a_3, a_4, a_6, a_7)$ sur dans le circuit maximal $\sigma = (a_2, a_3, a_4, a_6, a_7)$. Le lecteur vérifiera sans peine que, étant donné une relation binaire nette S définie sur A , A peut être partitionné de façon unique en circuits maximaux $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p$ (tout ou partie de ces circuits pouvant être réduits à une seule action).

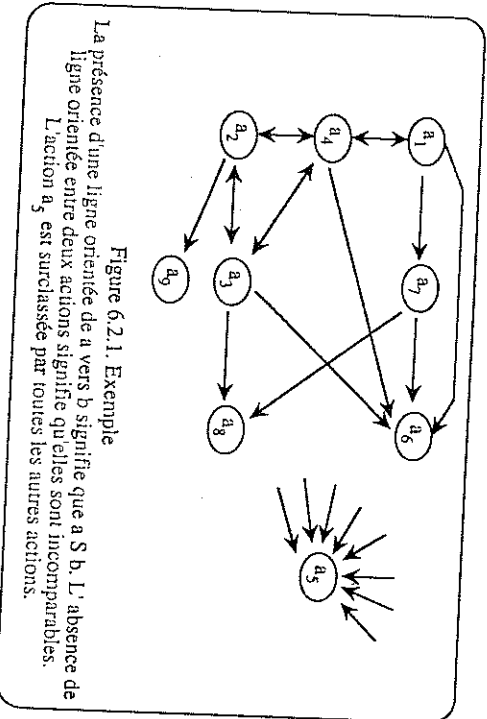


Figure 6.2.1. Exemple
La présence d'une ligne orientée de a vers b signifie que a S b. L'absence de ligne orientée entre deux actions signifie qu'elles sont incomparables. L'action a_5 est surclassée par toutes les autres actions.

L'obtention de cette partition de A en circuits maximaux ne présente pas de difficultés. Elle se fait de façon empirique et sans risque d'erreur lorsque le nombre d'actions est de l'ordre de une, voire deux ou trois, dizaines. On peut commencer par éliminer de n en surclasse aucune autre. On itère ce processus jusqu'à ce que toute action restante soit à la fois surclassée et surclassante. Chacune des actions ainsi éliminées constitue, à elle seule, un

circuit maximal. On considère alors le sous-ensemble des actions non éliminées (s'il n'est pas vide). Celui-ci contient nécessairement au moins un circuit contenant plus d'une action. On en cherche un qui sera maximal. On élimine à nouveau les actions formant ce circuit et on répète la procédure sur le sous-ensemble des actions restantes (pour plus de précisions, voir ROY (1969-1970)).

Deuxième étape : Passage de S à \succ_σ

Notons $A_\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p\}$ l'ensemble des circuits maximaux disjoints obtenus à l'étape précédente. On définit sur cet ensemble la relation de préférence \succ_σ en posant, $\forall \sigma_j, \sigma_i \in A_\sigma$:

$$\sigma_j \succ_\sigma \sigma_i \Leftrightarrow [\sigma_j \neq \sigma_i \text{ et } \exists b \in \sigma_j \text{ et } \exists a \in \sigma_i : b S a]. \quad (r.6.2.1)$$

Troisième étape : Détermination du noyau N

La relation \succ_σ est, par construction, non seulement asymétrique mais sans circuits. Elle admet par conséquent (cf. 6.1.2 c) un unique noyau $N \subset A_\sigma$. Pour l'obtenir, on peut procéder comme suit :

Chercher les éléments de A_σ tels qu'aucun autre ne leur est préféré selon \succ_σ : notons N^1 le sous-ensemble de tous les éléments ayant cette propriété. On élimine alors de A_σ les éléments de N^1 ainsi que tout autre élément tel qu'il existe dans N^1 un élément qui lui soit préféré. Soit A_σ^1 le sous-ensemble des éléments restants. S'il n'est pas vide, on recommence la procédure à partir de ce nouvel ensemble. On met ainsi en évidence successivement des ensembles N^1, N^2, \dots, N^k . La procédure s'arrête lorsque $A_\sigma^k = \emptyset$; on a alors :

$$N = N^1 \cup N^2, \dots, \cup N^k.$$

Quatrième étape 1 : Détermination de A'

Lorsque N ne comporte que des circuits réduits à une seule action, on pose $A' = N$. Supposons qu'il en soit autrement et que $\sigma \in N$ soit un circuit non réduit à une seule action. Lorsque les

¹ Dans la version originale d'ELECTRE I, cette quatrième étape était réduite à $A' = N$.

actions de σ sont véritablement ex æquo, on choisit un représentant de ces actions comme indiqué au 6.1.2 a). Dans les cas où il en est autrement, il est recommandé de choisir ce représentant de σ dans A' de telle sorte que sa sélection justifie au mieux :

- d'une part l'élimination des autres actions du circuit σ ;
- d'autre part l'élimination des actions n'appartenant pas à σ qui se trouvent être telles que σ est le seul élément de N qui leur soit préféré selon \succ_{σ} .

b) Commentaires théoriques

La procédure de sélection d'ELECTRE I n'est pleinement justifiée que dans la mesure où il apparaît légitime de regarder les différentes actions d'un circuit maximal comme de véritables ex æquo. Les deux dernières règles de la quatrième étape ne sont que des palliatifs permettant de faire face, le moins mal possible, aux cas où il en est autrement. Il s'ensuit que leur mise en application peut présenter des difficultés comme on va le montrer sur l'exemple de la figure 6.2.1.

Les quatre étapes ci-dessus conduisent successivement à :

- *Première étape* : $A_{\sigma} = \{\sigma_1, \sigma_5, \sigma_6, \sigma_7, \sigma_8, \sigma_9\}$ avec :

$\sigma_1 = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, $\sigma_i = \{a_i\}$ pour $i \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$.

- *Deuxième étape* : La relation \succ_{σ} vérifie : $\sigma_1 \succ_{\sigma} \sigma_i \forall i \neq 1$.

- *Troisième étape* : $N = \{\sigma_1\}$.

- *Quatrième étape* : a_4 est la seule action de σ_1 qui soit indifférente aux trois autres actions du circuit (à savoir a_1, a_2, a_3). Toutefois, si on se reporte à la relation de surclassement initiale S (cf. figure 6.2.1), poser $A' = \{a_4\}$ ne se justifie que si l'on fait appel successivement à a_1, a_2, a_3 en tant qu'actions indifférentes

¹ La relation \succ_{σ} est vérifiée par d'autres couples mais cela est sans intérêt pour la suite.

à a_4 pour expliquer l'élimination respective de a_7, a_8, a_9 . Ce faisant, on a recours à une forme de transitivité certes limitée mais absente de S . Le circuit σ_1 n'est ici manifestement pas une classe de véritables ex æquo : non seulement σ_1 n'est pas une clique mais deux actions distinctes de σ_1 ne se comparent pas de la même façon avec une quelconque action extérieure à σ_1 . Un tel exemple montre les limites de la procédure de sélection d'ELECTRE I.

Revenons à une relation S quelconque définie sur A d'où l'on en a déduit A_{σ} et \succ_{σ} conformément aux deux premières étapes de la procédure d'exploitation d'ELECTRE I. Notons S_{σ} la relation définie sur A en posant, $\forall b \in \sigma_j$ et $\forall a \in \sigma_i$:

$$b S_{\sigma} a \Leftrightarrow [\sigma_j = \sigma_i \text{ ou } \sigma_j \succ_{\sigma} \sigma_i].$$

On a $S \subset S_{\sigma}$. Appliquons maintenant la procédure non plus à S mais à S_{σ} . Il est clair que l'on aboutit à la même partition en circuits maximaux A_{σ} et à la même relation de préférences \succ_{σ} : le noyau N est donc, lui aussi, invariant. Relativement à S_{σ} , les diverses actions d'un circuit maximal sont véritablement ex æquo et peu importe la manière dont le représentant d'un tel circuit est choisi en quatrième étape. Par conséquent, l'ensemble A' auquel conduit la procédure appliquée à S convient aussi pour S_{σ} . Or, il est facile de vérifier que, relativement à S_{σ} , un tel ensemble A' possède les propriétés $\alpha.1, \alpha.2, \alpha.3, \alpha.4$ bis et $\alpha.5$ du 6.1.2.

Ce qui précède prouve que l'ensemble A' auquel conduit la procédure d'exploitation d'ELECTRE I possède toutes les propriétés requises au 6.1.2 pour une procédure de sélection à condition de pouvoir considérer qu'il est aussi légitime de l'appliquer à S_{σ} qu'à S . Lorsque S_{σ} apparaît comme nettement moins justifiée que S , on peut chercher à modifier S de façon à trouver une relation S' substituable à S et vérifiant $S'_{\sigma} = S'_{\sigma}$: telle est (concernant la procédure d'exploitation) ce qu'apporte ELECTRE IS par rapport à ELECTRE I (cf. 6.2.2).

c) Commentaires pratiques

Il importe de ne pas perdre de vue que cette procédure (au même titre que les autres présentées dans cette section) ne constitue qu'une aide à la décision. Souvent, le caractère conflict-

tuel des critères, l'imprécision qui entoure les performances, la part d'arbitraire que recèlent les informations inter-critères (coefficients d'importance et seuils de veto) rendent impossible la mise en évidence d'un sous-ensemble suffisamment restreint A' d'actions à sélectionner de façon indiscutable. Face aux difficultés illustrées au b) relativement à une relation S donnée, on peut certes songer à surmonter les ambiguïtés d'application de la quatrième étape en sélectionnant, dans A' , l'ensemble des actions de N .

Dans l'exemple de la figure 6.2.1, on serait ainsi amené à poser $A' = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$. On conçoit qu'une telle façon de faire conduise fréquemment à n'éliminer qu'un trop petit nombre d'actions et à ne faire que déplacer le problème. Pour le choix final, il convient en effet de procéder à une analyse plus fine de chacune des actions de A' afin de mettre en évidence leurs avantages et inconvénients respectifs et de permettre au décideur de se faire une conviction sur la solution à retenir.

Revenons à l'exemple et à la solution qui vient d'être suggérée : $A' = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$. Rien ne s'oppose à ce qu'on élimine a_4 qui est indifférente à a_1, a_2 et a_3 . Cela peut paraître choquant puisque, au b) ci-dessus, a_4 était seule sélectionnée. Il n'y a pourtant là aucune incohérence : l'homme d'étude, tout comme le décideur, sont simplement en droit d'hésiter entre une solution rapide : $A' = \{a_4\}$ ou une solution plus longue et, sans doute, plus coûteuse nécessitant une analyse fine de a_1, a_2 et a_3 afin de procéder à une comparaison plus poussée. Cette hésitation trouve son origine dans le fait que, d'après S , la substitution de a_1, a_2 ou a_3 à a_4 constitue un changement non significatif alors que la substitution de a_2 ou a_3 à a_1 en constitue un qui l'est davantage. Comme nous allons le montrer maintenant, cette analyse est toutefois incomplète puisqu'elle ne prend pas en compte ce qu'il peut y avoir de fragile, de discutable dans le fait d'avoir accepté ou refusé chacune des affirmations a_j , S a_j .

La discussion critique à laquelle il convient de soumettre les résultats d'ELECTRE I n'a pas pour seule raison d'être les ambiguïtés de l'étape 4. La dichotomie A', \bar{A}' n'a été envisagée jusqu'ici que relativement à une seule relation nette S (ou S_g).

Comme on l'a déjà évoqué au b), d'autres relations de surclassement peuvent apparaître tout aussi légitimes. Pour obtenir de telles relations, il suffit de modifier, dans (r.5.2.3) et (r.5.2.4), les valeurs :

- du niveau de concordance s ;
- de certains coefficients d'importance k_j et/ou veto v_j ;
- de certaines performances $g_j(a)$.

En combinant de diverses manières de telles modifications justifiées par les éléments d'imprécision, d'incertitude, d'indétermination, on est amené à bâtir des relations de surclassement S_1, S_2, \dots . Ces relations sont toutes à peu près aussi légitimes que la relation initiale S . Cette dernière doit cependant être bâtie de façon à pouvoir servir de relation de référence. L'analyse de robustesse telle que nous l'avons introduite au 5.4.4 conduit ici à apprécier la robustesse de la sélection A' à laquelle conduit S lorsqu'on lui substitue successivement S_1, S_2, \dots . Il s'agit donc de comparer, non seulement à N mais aussi entre eux, les divers noyaux N_1, N_2, \dots . On peut ainsi vérifier si la sélection initiale A' est justifiée dans tous les cas ou presque. Si tel n'est pas le cas, il convient de modifier A' de façon à préconiser un sous-ensemble qui ne soit pas justifié que pour la seule relation de référence. Nous verrons au chapitre 8, sur un cas concret, comment procéder en pratique.

Il est clair qu'une telle analyse de robustesse peut être poussée plus ou moins loin. Dans tous les cas, il est indispensable d'en entreprendre une, même sommaire, afin de ne pas risquer d'aboutir, sur la base d'une relation initiale S trop particulière, à des conclusions résistant mal à des changements mineurs dans la définition de S . En tout premier lieu, il convient de faire varier, dans une plage raisonnable, le niveau de concordance s . Les éventuelles modifications du noyau qui en résultent sont généralement faciles à interpréter et riches d'enseignement.

6.2.2 ELECTRE IS

La procédure d'exploitation qui suit est encore une procédure de sélection. Nous avons déjà indiqué au b) ci-dessus ce qu'elle

apportait de nouveau par rapport à la précédente. Nous conservons les mêmes notations qu'au 6.2.1.

Cette procédure s'applique encore à un système de préférences nettes de type (S, R) (voir la définition originelle au 5.2.1.2). Elle fait en outre intervenir des informations concernant la robustesse de chacune des conclusions b S a ou Non(b S a) qui découlent de la prise en considération de S. De façon plus précise, il s'agit d'apprécier, à l'aide d'un nombre ou d'un vecteur $p(b, a)$ appelé **indicateur de robustesse**, s'il est plus ou moins justifié de modifier la conclusion de S relativement au couple (b, a), autrement dit de substituer à S une relation S' dans laquelle on a :

- soit b S' a au lieu de Non(b S a) ;
- soit Non(b S' a) au lieu de b S a.

Nous examinerons au b) ci-après les bases sur lesquelles le nombre ou le vecteur $p(b, a)$ peut être défini. Bornons-nous à préciser ici que si $p(b, a)$ est un nombre vérifiant :

$$0 \leq p(b, a) \leq 1,$$

il est souhaitable, pour la clarté de son utilisation, de le concevoir de telle sorte que l'on puisse interpréter :

- $p(b, a) = 1/2$ comme : il est tout aussi justifié de conserver que de modifier la conclusion de S ;
- $p(b, a) > 1/2$ comme : il est plus justifié de modifier Non(b S a) en b S' a que b S a en Non(b S' a) (et cela d'autant plus que $p(b, a)$ est plus proche de 1) ;
- $p(b, a) < 1/2$ comme : il est plus justifié de modifier b S a en Non(b S' a) que Non(b S a) en b S' a (et cela d'autant plus que $p(b, a)$ est plus proche de 0).

Faisons observer qu'un indicateur de robustesse ainsi conçu diffère sensiblement d'un indice de crédibilité tel qu'il a été défini dans le paragraphe introductif du 5.3.2 (rapprocher notamment l'exigence 2 des interprétations de p préconisées ci-dessus).

Notons qu'une version extrêmement simplifiée d'ELECTRE IS consiste à appliquer, au système (S, R) de la PAMC d'ELECTRE IS (cf. 5.2.1.2), la procédure d'exploitation d'ELECTRE I. Dans cette version, l'indicateur de robustesse $p(a, b)$ n'intervient pas.

a) Présentation

La procédure de sélection d'ELECTRE IS comporte, comme celle d'ELECTRE I, quatre étapes successives :

- la première a pour objet l'identification des classes présu-
mées ex æquo, ce qui conduit à accorder une attention particulière aux circuits qui ne sont pas des cliques ;
- la seconde a pour objet la définition d'une relation sans circuits sur les classes de présu-
més ex æquo, ce qui oblige à s'interroger sur la signification qu'il convient d'accorder aux éventuelles différences dans la manière dont les actions d'une même classe de présu-
més ex æquo se comparent aux actions extérieures à cette classe ;
- la troisième consiste, exactement comme dans ELECTRE I, à déterminer le noyau de la relation sans circuits qui a finalement pu être défini sur un ensemble de classes d'actions désormais regardées comme ex æquo ;
- la quatrième concerne la détermination de A' (sur des bases tout-à-fait similaires à celles d'ELECTRE I).

Chacune des deux premières étapes d'ELECTRE IS peut être plus ou moins simplifiée jusqu'à devenir identique à son homologue dans ELECTRE I (ce qui revient à ne plus faire jouer aucun rôle à l'indicateur de robustesse).

Première étape : Identification des classes de présu- més ex æquo

Soit A_0 la partition de A en circuits maximaux de S obtenue comme avec ELECTRE I. Tout circuit maximal réduit à une seule action est regardé comme une classe d'ex æquo. Tout circuit maximal comportant deux actions est regardé comme une classe de présu-
més ex æquo (cette présomption pouvant être remise en

question à l'étape suivante). Soit σ un circuit maximal comportant au moins trois actions. Si σ est une clique¹, alors σ est regardé comme une classe de présomés ex æquo.

Considérons maintenant un circuit maximal σ comportant au moins trois actions et qui n'est pas une clique. On doit choisir entre l'une des deux possibilités suivantes :

1ère possibilité : Transformation de σ en clique : On modifie localement² S en \bar{S} en posant, $\forall a, b \in \sigma, b \in \bar{S} a$.

2e possibilité : Rupture du circuit σ : On modifie localement³ S en \bar{S} en posant Non($b S a$) pour un (voire plusieurs) couple(s) d'actions de σ vérifiant $b S a$ de façon à ce que σ ne soit plus un circuit de \bar{S} .

Pour choisir entre ces deux possibilités, on prend appui sur l'indicateur de robustesse.

Il s'agit de savoir s'il est plus justifié :

- d'ajouter les surclassements $b \bar{S} a$ nécessaires à la transformation de σ en clique
- ou de supprimer le (voire les) surclassement(s) $b S a$ assurant, de la façon la plus justifiée, la rupture du circuit σ .

¹ c'est-à-dire si l'on a $a S b$ et $b S a$ quel que soit le couple d'actions (b, a) que l'on considère dans σ .

² Pour les couples d'actions de σ ne donnant pas lieu à modification, $\bar{S} = S$.

³ Pour les couples d'actions de σ ne donnant lieu à aucune modification, $\bar{S} = S$.

Ce choix peut être laissé au libre arbitre de l'homme d'étude¹. Il peut aussi être intégré à la procédure².

Lorsque $\rho(b, a)$ est un simple nombre s'interprétant comme il a été indiqué ci-dessus, il paraît légitime de fonder le choix entre les deux possibilités précédentes en faisant intervenir prioritairement les nombres ρ_1 et ρ_2 définis comme suit :

- parmi tous les surclassements $b \bar{S} a$ qui il est nécessaire d'ajouter pour transformer σ en clique, on recherche celui qui est le moins justifié, c'est-à-dire pour lequel $\rho(b, a)$ est minimum ; on note ρ_1 la valeur de ce minimum ;

- pour assurer la rupture du circuit σ , on peut s'y prendre de différentes façons, certaines d'entre elles faisant intervenir la suppression de plus d'un surclassement ; on caractérise chacune de ces façons par la robustesse maximum du surclassement supprimé et on retient la façon de faire pour laquelle ce maximum est minimum ; on note ρ_2 la valeur de ce minimum.

On peut par exemple décider d'adopter la première des deux possibilités si et seulement si³ :

$$1/2 - \rho_1 < \rho_2 - 1/2.$$

(r6.2.2)

Précisons maintenant ce qu'il advient dans chacune de ces deux possibilités :

- avec la première, S est modifiée localement comme il a été dit et σ est regardé comme une classe de présomés ex æquo c ;
- avec la seconde, il convient d'analyser ce que devient σ suite à la modification locale de S en \bar{S} : le sous-ensemble d'actions formant σ peut, relativement à \bar{S} , ne comporter aucun circuit maximal qui ne soit pas une clique, auquel cas chacun de ces circuits maximaux donne naissance à des classes d'ex æquo lorsqu'ils sont réduits à une seule action ou de présomés ex æquo lorsqu'ils en comportent au moins deux ; si, relativement à \bar{S} , il subsiste au moins un circuit maximal $\bar{\sigma}$ qui n'est pas une clique, alors il faut répéter, sur $(\bar{\sigma}, \bar{S})$, la procédure qui vient d'être appliquée à (σ, S) . On remarquera que $\bar{\sigma}$

¹ Tel est le cas du logiciel ELECTRE IS actuellement disponible au LAMSA-DE.

² Des recherches sont actuellement menées au LAMSADE dans ce sens dans une direction faisant appel à l'intelligence artificielle.

³ Cette règle peut paraître arbitraire en cas d'égalité ou en cas de différence très faible entre les deux membres ; nous reviendrons sur ce point au c).

comporte nécessairement moins de sommets que σ , ce qui garantit la convergence de la procédure.

Lorsque A_σ contient plus d'un circuit maximal qui n'est pas une clique, la procédure précédente doit être appliquée successivement à chacun d'eux. On procède ainsi localement et de façon disjointe à la modification de S . On note \bar{S} la relation de surclassement finalement obtenue et A_σ l'ensemble des classes d'ex æquo (réduites à une seule action) et de présomés ex æquo résultant de cette étape.

Deuxième étape : Construction d'une relation sans circuits sur les classes de présomés ex æquo

Notons $A_\sigma = \{c_1, \dots, c_q\}$ l'ensemble des classes obtenues à la fin de l'étape précédente. Faisons-lui correspondre la relation $\bar{\succ}_\sigma$ définie par (cf. (r.6.2.1)), $\forall \sigma_j, \sigma_i \in A_\sigma$:

$$c_j \bar{\succ}_\sigma c_i \Leftrightarrow [c_j \neq c_i \text{ et } [\exists b \in c_j, \exists a \in c_i, \dagger b \bar{S} a]].$$

Par construction, $\bar{\succ}_\sigma$ est asymétrique et sans circuits.

Si chacune des classes de présomés ex æquo de A_σ renfermait de véritables ex æquo, on aurait, $\forall c_j, c_i \in A_\sigma, \forall a \in c_i \text{ et } \forall b \in c_j$:

$$c_j \bar{\succ}_\sigma c_i \Rightarrow b \bar{S} a. \tag{r.6.2.3}$$

Lorsque (r.6.2.3) est vérifiée, on définit $S', A_\sigma', \succ'_\sigma$ en posant :

$$S' = \bar{S}, A_\sigma' = A_\sigma, \succ'_\sigma = \bar{\succ}_\sigma$$

et l'on passe à la troisième étape.

Lorsque (r.6.2.3) n'est pas vérifiée, on considère l'ensemble Δ des couples (c_j, c_i) qui mettent (r.6.2.3) en défaut. Pour tous les couples n'appartenant pas à Δ , on pose $\succ'_\sigma = \bar{\succ}_\sigma$. Pour achever de

définir \succ'_σ relativement aux autres couples, on itère la procédure suivante, laquelle peut conduire à diviser certaines des classes de présomés ex æquo.

Considérons un couple $(c_j, c_i) \in \Delta$. On doit choisir entre l'une des trois possibilités suivantes :

1ère possibilité : *Acceptation de $c_j \bar{\succ}_\sigma c_i$* , ce que l'on traduit en posant $c_j \succ'_\sigma c_i$; cela équivaut à modifier localement \bar{S} en S' en posant, $\forall b \in c_j \text{ et } \forall a \in c_i$:

$$b \bar{S}' a.$$

2e possibilité : *Refus de $c_j \bar{\succ}_\sigma c_i$* , ce que l'on traduit par $\text{Non}(c_j \succ'_\sigma c_i)$: ceci équivaut à modifier localement \bar{S} en S' en posant, $\forall b \in c_j \text{ et } \forall a \in c_i$:

$$\text{Non}(b \bar{S}' a).$$

3e possibilité : *Division de c_j ou c_i en au moins deux sous-classes* (cette possibilité n'est à envisager que dans la mesure où aucune des deux possibilités précédentes ne conduit à une relation S' aussi justifiée que \bar{S}) : ceci conduit à modifier localement \bar{S} en S' comme suit : supposons que la division porte sur c_j et notons c^* et c^\dagger deux des classes nées de cette division¹ (A_σ doit être modifiée en conséquence). On pose, $\forall b \in c^* \text{ et } \forall a \in c^\dagger$:

$$\text{Non}(b \bar{S}' a)$$

($S' = \bar{S}$ pour tous les autres couples d'actions de c_j) et on élabore la division de c_j de telle sorte que (cf. figure 6.2.2) la première possibilité convienne à l'un des couples (c_i, c_j) ou (c^\dagger, c_i) et la seconde à l'autre couple.

Pour choisir entre ces trois possibilités, on prend encore appui sur l'indicateur de robustesse.

Il s'agit de savoir s'il est plus justifié :

- d'ajouter les surclassements $b \bar{S}' a$ qu'implique $b \succ'_\sigma a$ lorsqu'on opte pour la première possibilité ou de supprimer les surclassements $b \bar{S} a$ qu'implique $\text{Non}(b \succ'_\sigma a)$ lorsqu'on opte pour la seconde possibilité

¹ Le cas où elle porte sur c_i s'en déduit de façon évidente.

— ou de supprimer les surclassements $b \succ_c a$ qui impliquent la division de l'une des classes en au moins c^- et c^+ ainsi que les éventuelles modifications subséquentes de S' définissant la manière dont les nouvelles classes se comparent à celle des deux classes initiales qui n'a pas été divisée (cf. figure 6.2.2).

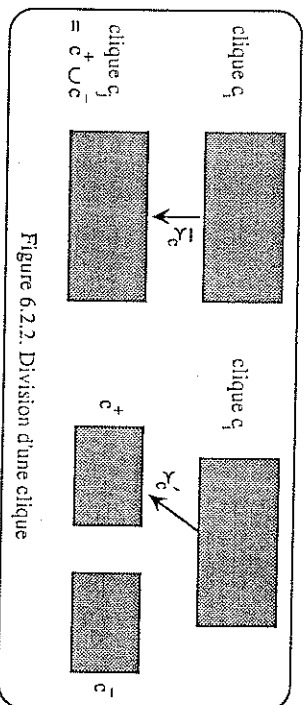


Figure 6.2.2. Division d'une clique

Ce choix peut, comme dans la première étape, être laissé au libre arbitre de l'homme d'étude ou être intégré dans la procédure ¹.

Faisons observer que la division d'une classe c_i ne remet pas en question la manière dont elle a été comparée (avant sa division) avec d'autres classes selon \succ_c . Il se peut toutefois que c_i ait été à l'origine de la division d'une autre classe c_n ; il faut alors examiner si, après division de c_i , la division de c_n reste justifiée.

Les modifications locales mais sans cesse disjointes de S introduites au cours des applications de la procédure précédente successivement à chacun des couples $(c_i, c_j) \in \Delta$ aboutissent finalement à une relation de surclassement S' définie sur A . La partition en classes d'ex æquo A_c déduite de A_c par division éventuelle de certaines des classes de présomés ex æquo possède les trois propriétés suivantes :

1°) Chaque élément de A_c est une clique maximale de S' .

¹ Dans le cas où $p(b, a)$ est un nombre, le lecteur pourra chercher à énoncer des règles dans le même esprit que celles proposées en première étape pour fonder cette fois le choix entre les trois possibilités de cette seconde étape.

2°) Etant donné deux cliques distinctes c_j' et c_i' de A_c , on a, $\forall b \in c_j'$ et $\forall a \in c_i'$:

$$\begin{aligned} b S' a &\Rightarrow c_j' \succ_c c_i' \text{ et} \\ \text{Non}(b S' a) &\Rightarrow \text{Non}(c_j' \succ_c c_i') \end{aligned} \quad (r.6.2.4)$$

3°) La relation \succ_c ainsi définie est sans circuits.

Troisième étape : Détermination du noyau N

La relation \succ_c étant sans circuits, elle admet un unique noyau $N \subset A_c$ (il s'obtient en procédant comme indiqué au 6.2.1, troisième étape).

Quatrième étape ¹ : Détermination de A'

Dans chacune des classes formant le noyau N , on choisit un représentant. A' est l'ensemble de ces représentants.

Pour une classe $c_j \in N$ non réduite à une seule action, le choix de son représentant importe peu si, localement (c^- est-à-dire relativement au surclassement $b S'$ a avec $b \in c_j$ et a quelconque), S' est aussi justifiée que S . Lorsqu'il en est autrement, la sélection du représentant de c_j doit permettre de justifier au mieux :

- d'une part l'élimination des autres actions de c_j ;
- d'autre part l'élimination des actions n'appartenant pas à c_j qui se trouvent être telles que c_j est le seul élément de N qui leur soit préféré selon \succ_c .

Ces justifications doivent pouvoir être fondées sur les surclassements $b S'$ a les mieux justifiés compte-tenu de l'indicateur de robustesse $p(b, a)$.

¹ Dans un premier temps, pour l'analyse de robustesse, cette étape peut être omise.

b) Commentaires théoriques

La procédure de sélection d'ELECTRE IS n'est pleinement satisfaisante que dans la mesure où, à la seconde étape, on aboutit à une relation de surclassement S' que l'on peut regarder comme aussi bien justifiée (ou presque) que S . Dans ces conditions en effet, la quatrième étape ne présente aucune difficulté et l'ensemble A' auquel elle conduit vérifie les propriétés $\alpha.1$, $\alpha.2$, $\alpha.3$, $\alpha.4$ bis et $\alpha.5$ (cf. 6.1.2) vis-à-vis de S' . Supposons au contraire que l'obtention d'une partition en classes d'ex æquo A'_x ayant les trois propriétés requises en fin de deuxième étape ne puisse être fondée sur une relation S' nettement plus difficile à justifier que S . Dans une telle situation, on peut encore espérer (en prenant appui sur les deux dernières règles de la quatrième étape) aboutir à un ensemble A' jouissant des propriétés $\alpha.1$, $\alpha.2$ et $\alpha.5$ au regard des seuls surclassements bien justifiés de S' (c'est dire que A' n'est peut-être pas aussi restreinte que possible, $\alpha.3$ et $\alpha.4$ bis pouvant être mises en défaut du fait de surclassements justifiés éliminés de S').

Quoi qu'il en soit, le fait de ne pas aboutir à coup sûr à une sélection A' ayant toutes les propriétés requises semble être moins imputable à la méthode ELECTRE IS proprement dite qu'à la nature des "données". L'analyse conduite au 6.1.2 a en effet montré que les propriétés $\alpha.1$, $\alpha.2$, $\alpha.3$, $\alpha.4$ bis et $\alpha.5$ ne sont compatibles à coup sûr que vis-à-vis d'une relation de surclassement S' conforme aux trois propriétés qui servent d'objectifs à la deuxième étape.

Distinguons, dans S' , sa partie asymétrique \succ' et sa partie symétrique I . Les trois propriétés visées en fin de deuxième étape équivalent respectivement à :

$$I^2 \subset I, I \succ' I \subset \succ', \succ' \text{ est sans circuits.}$$

ELECTRE IS repose donc sur une tentative pour substituer, à un système de préférences de départ de type (S, R) , un système de type (\succ', I, R) aussi justifié que le premier et possédant les trois propriétés ci-dessus.

Imaginons qu'on applique la procédure de sélection d'ELECTRE I à la relation S' obtenue en fin de seconde étape d'ELECTRE IS. On aurait $A'_0 = A'_x$ et $\succ'_0 = \succ'$. Le noyau N serait le même dans les deux cas. ELECTRE I serait pleinement légitime puisque $S'_0 = S'$.

Examinons pour terminer ce paragraphe les bases sur lesquelles l'indicateur de robustesse $\rho(b, a)$ peut être défini. Deux cas sont à considérer :

Premier cas : $\rho(b, a)$ fait explicitement référence à la façon dont S est définie.

6.2.2 b)

Deuxième cas : $\rho(b, a)$ appréhende la robustesse du surclassement en empruntant une voie légèrement différente de celle qui sert à définir S .

Ici, nous nous bornons à présenter deux façons de procéder se rapportant à l'un et l'autre cas. Pour l'un comme pour l'autre, nous supposons que S est définie par (r.5.2.8) et (r.5.2.9) (d'autres possibilités sont évoquées au c) ci-après).

Posons (par référence à (r.5.2.8) et (r.5.2.9)) :

$$\rho_c(b, a) = c(b, a) - s,$$

$$\rho_d(b, a) = g_j(b) + v_j(g_j(b)) - g_j(a) - q_j(g_j(a))w[s, c].$$

Pour que b S a soit validée, on doit avoir $\rho_c(b, a) \geq 0$ et, $\forall j \in F$, $\rho_d(b, a) \geq 0$. Il est clair que plus ces nombres positifs sont grands et plus les conditions de validation sont robustes face à des modifications du niveau de concordance s , des coefficients d'importance k_j , des seuils de veto v_j ou encore des performances $g_j(b)$ et $g_j(a)$. En revanche, lorsque l'un de ces nombres positifs est voisin de 0, l'affirmation n'est plus robuste et le changement de b S a en Non(b S' a) n'a rien d'injustifié. De même, lorsque l'un de ces nombres est négatif et voisin de 0, le changement de Non(b S a) en b S' a peut être accepté. On peut donc poser¹ :

$$\rho(b, a) = \{\rho_c(b, a), \rho_d(b, a), \dots, \rho_d(b, a)\}.$$

Une telle définition de ρ peut paraître difficile à manier (sauf peut-être sur la base d'une famille de règles de type "si ... alors") et l'on peut lui préférer un indicateur plus synthétique réduit à un nombre. Pour réaliser cette synthèse, on peut songer à faire appel à l'indice de crédibilité d'ELECTRE III $\sigma(b, a)$ (cf. (r.5.3.12)). Cet indice ne peut pas être pris tel quel comme indicateur de robustesse. Il est certes satisfaisant lorsque, $\forall j \in F$, $d_j(b, a) \leq c(b, a)$: on a alors $\sigma(b, a) = c(b, a)$ qui, dans ces conditions, constitue un bon indicateur de robustesse (la valeur 1/2 pouvant s'interpréter comme dans le paragraphe introductif du 6.2.2). Il ne convient plus dès lors que, pour un critère au moins, $d_j(b, a)$ devient proche de 1 : l'affirmation b S a est évidemment d'autant moins justifiée que $g_j(b) + v_j(g_j(b)) - g_j(a)$ s'approche de 0 (par valeur positive) mais, du point de vue de la robustesse, cela ne signifie nullement que l'on doive poser $\rho(b, a) = 0$ dès l'instant où $g_j(b) + v_j(g_j(b)) - g_j(a) = 0$. Pour avoir un indicateur mieux adapté, définissons $d'_j(b, a)$ conformément à (r.5.3.11) mais en substituant au veto (entrant dans la définition de S) une quantité $v'_j(g_j(b)) >$

¹ Soulignons que les composantes de cet indicateur ne sont pas normées pour ne varier qu'entre 0 et 1.

$v_j(g_j(b))$. Le nombre $\sigma'(b, a)$ défini par (r.5.3.12) en substituant $d'(b, a)$ à $d_j(b, a)$ ne s'annule plus aussitôt que $g_j(b) + v_j(g_j(b)) - g_j(a)$ devient négatif. Sous réserve d'adopter une définition appropriée de $v_j'(g_j(b))$, il nous paraît possible de transposer les principes du 5.3.2 b2) en vue de justifier le choix de $p(b, a) = \sigma'(b, a)$.

La quantité $v_j'(g_j(b))$ peut être définie en fonction du principe additionnel suivant :

Lorsque $c(b, a)$ est voisin de s et que seul le critère j est discordant avec $g_j(b) + v_j(g_j(b)) - g_j(a) = 0$, alors la robustesse est choisie égale à $s/2$ ($< 1/2$).

Ce résultat est obtenu en posant :

$$v_j'(g_j(b)) = v_j(g_j(b)) + \frac{1-s}{1+s} [v_j(g_j(b)) - p_j(g_j(b))]$$

(dans les conditions d'application du principe ci-dessus, il vient : $d_j'(b, a) = s + 0,5/(1-s)$, d'où le résultat cherché).

Ce qui précède souligne la différence entre indice de crédibilité et indicateur de robustesse. Le premier apprécie la crédibilité d'un surclassement par rapport à des valeurs de paramètres strictement définies. L'appréciation de la robustesse tient compte du fait que les valeurs de ces paramètres sont sujettes à caution.

c) Commentaires pratiques

Ces commentaires accompagnent tout d'abord le déroulement pas à pas d'un exemple numérique. Celui-ci reprend, en le complétant, l'exemple qui a déjà servi à illustrer ELECTRE I. Le paragraphe s'achève en attirant l'attention sur quelques points importants en pratique concernant notamment l'analyse de robustesse et le mode de définition de la relation S .

Revenons à l'exemple de la figure 6.2.1. Complétons cette définition de S par celle d'un indicateur de robustesse défini comme il vient d'être indiqué au b) ci-dessus en posant $p(a_j, a_i) = \sigma'(a_j, a_i)$ (cf. tableau 6.2.1). La procédure ELECTRE IS peut alors se dérouler comme suit.

Première étape : $A_0 = \{G_1, G_5, G_6, G_7, G_8, G_9\}$ (mêmes notations qu'au 6.2.1 b)). Le circuit maximal $\sigma_1 = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ n'est pas une clique. Examinons successivement les deux possibilités prévues au 6.2.2 a)) :

- La transformation de σ_1 en clique conduit à prendre en compte, dans S , quatre surclassements nouveaux : $a_1 \overline{S} a_2, a_2 \overline{S} a_3, a_1 \overline{S} a_3, a_3 \overline{S} a_4$; ils correspondent respectivement aux valeurs suivantes de p : 0,717 ; 0,692 ;

Tableau 6.2.1 : Valeurs de $p(a_j, a_i)$

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
a_1	1,000	0,717	0,665	0,794	0,922	0,742	0,691	0,246	0,053
a_2	0,692	1,000	0,871	0,717	0,922	0,635	0,000	0,265	0,666
a_3	0,615	0,922	1,000	0,845	0,922	0,768	0,208	0,794	0,589
a_4	0,692	0,845	0,794	1,000	0,999	0,717	0,239	0,080	0,042
a_5	0,000	0,000	0,000	0,000	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000
a_6	0,000	0,000	0,000	0,000	0,948	1,000	0,423	0,000	0,000
a_7	0,769	0,573	0,296	0,589	0,871	0,922	1,000	0,794	0,087
a_8	0,453	0,205	0,166	0,205	0,666	0,273	0,273	1,000	0,640
a_9	0,115	0,178	0,059	0,166	0,743	0,000	0,000	0,479	1,000

Remarque : Comme on le verra au chapitre 8, les chiffres qui figurent dans ce tableau, de même que les surclassements de la figure 6.2.1, sont issus d'un cas réel d'aide à la décision. Précisons que, à l'époque où le cas a été traité, la condition de veto (r.5.2.9) ne faisait pas intervenir le terme $-k/k[F]$ dans $w(s, c)$. La prise en compte de ce terme aurait conduit à l'adjonction de $a_1, S a_2$ et $a_7, S a_1$ dans la figure 6.2.1.

0,665 ; 0,615. C'est donc l'adjonction de a_3 S a_1 qui apparaît comme la moins justifiée des quatre, d'où : $p_1 = 0,615$.

— La rupture du circuit σ peut se faire en ne prenant plus en compte, dans S , soit a_1 S a_4 , soit a_1 S a_1 . On a : $p(a_1, a_4) = 0,794$ et $p(a_1, a_1) = 0,692$. C'est donc la suppression du surclassement a_4 S a_1 qui apparaît comme la plus justifiée (même si elle ne l'est guère), d'où : $p_2 = 0,692$.

La comparaison de $1/2 - p_1 = -0,115$ avec $p_2 - 1/2 = +0,192$ (cf. (r.6.2.2)) préconise de choisir, sans hésitation, la première de ces deux possibilités. De plus, la relation S ainsi définie (ne différenciant de S que par l'adjonction des quatre surclassements mentionnés plus haut) paraît aussi justifiée que S . Dans ces conditions, $A_6' = A_6$.

A titre d'exemple, indiquons que le choix de la seconde des deux possibilités aurait conduit à poser :

$$A_6' = \{c_1, c_2, \sigma_5, \sigma_6, \sigma_7, \sigma_8, \sigma_9\} \text{ avec } c_1 = \{a_1\}, c_2 = \{a_2, a_3, a_4\},$$

S ne différenciant de S dans ce cas que par $\text{Non}(a_4 S a_1)$.

Deuxième étape : Il vient :

$$\Delta = \{(\sigma_1, \sigma_6), (\sigma_1, \sigma_7), (\sigma_1, \sigma_8), (\sigma_1, \sigma_9)\}.$$

Considérons tout d'abord le couple (σ_1, σ_6) et commençons par comparer les deux premières des trois possibilités offertes (cf. a), deuxième étape) :

— Acceptation de $\sigma_1 \succ_e \sigma_6$: Ceci équivaut à l'adjonction du seul surclassement $a_2 S' a_6$ avec $p(a_2, a_6) = 0,635$.

— Refus de $\sigma_1 \succ_e \sigma_6$: Ceci équivaut à la suppression des trois surclassements $a_1 S' a_6$, $a_3 S' a_6$, $a_4 S' a_6$ ayant respectivement pour robustesse 0,742 ; 0,768 ; 0,717. Pour juger de cette possibilité, on peut encore prendre en considération le maximum de robustesse des arcs à supprimer, ce qui conduit à poser $p_2 = 0,768$.

¹ Il existe trois autres possibilités qui, par suppression de deux surclassements, détruisent la clique a_2, a_3, a_4 : le lecteur qui voudrait les prendre en considération vérifiera sans peine qu'elles conduisent à des solutions moins justifiées que celles examinées ici.

Il est clair que la seconde possibilité n'est pas acceptable alors que la première l'est. Cette dernière peut être caractérisée par la robustesse $p_1 = 0,635$ du surclassement le moins robuste qu'elle conduit à ajouter. On pose par conséquent $\sigma_1 \succ_e \sigma_6$, ce qui donne naissance à une relation S' aussi justifiée que S dont elle ne diffère que par $a_2 S' a_6$. Il paraît ici inutile d'envisager la troisième possibilité.

Considérons maintenant le second élément de Δ : (σ_1, σ_7) . En procédant comme ci-dessus, on trouve :

$$p_1 = 0 \text{ et } p_2 = 0,691.$$

Sans même faire appel à (r.6.2.2), on constate que la seconde de ces deux possibilités est meilleure que la première, laquelle paraît inacceptable. La seconde n'est toutefois pas très satisfaisante puisqu'elle conduit à supprimer un surclassement de forte robustesse. Il est donc nécessaire de lui comparer la troisième possibilité. Il n'existe ici qu'une seule façon de diviser σ_1 en deux sous-classes (qui sont des cliques) : elle consiste à poser :

$$c^- = \{a_1\}, c^+ = \{a_2, a_3, a_4\}.$$

Cette division s'obtient par la suppression de $a_4 S a_1$ (de robustesse 0,692 égale à celle de $a_1 S a_7$), de $a_2 S a_1$ (0,692) et de $a_3 S a_1$ (0,615). Cette troisième possibilité paraît donc encore moins justifiée que la seconde et l'on conservera (au moins provisoirement) σ_1 comme classe d'ex aequo avec $\text{Non}(\sigma_1 \succ_e \sigma_7)$.

Examinons, à titre d'exemple, à quoi conduirait la division de σ_1 en c^- et c^+ en posant :

$$c^- \succ_e c^+, c^- \succ_e \sigma_7, \text{Non}(c^+ \succ_e \sigma_7).$$

Comme on l'a fait remarquer, aucun changement ne doit intervenir dans la comparaison avec σ_6 . On aurait autrement dit $c^- \succ_e \sigma_6$ et $c^+ \succ_e \sigma_6$.

Les deux couples (σ_1, σ_8) et (σ_1, σ_9) de Δ qui restent à étudier donneraient alors naissance à :

- d'une part (c^-, σ_8) et (c^-, σ_9) pour lesquels on aurait, de façon évidente, $\text{Non}(c^- \succ_e \sigma_8)$ et $\text{Non}(c^- \succ_e \sigma_9)$,
- d'autre part (c^+, σ_8) et (c^+, σ_9) qui devraient être étudiés (comme on va le faire maintenant) en lieu et place de (σ_1, σ_8) et (σ_1, σ_9) .

Venons-en à l'étude de (σ_1, σ_8) . Les deux premières possibilités conduisent respectivement à :

- ajouter trois surclassements a_1 , S' , a_2 , S' , a_3 et a_4 , S' , a_5 dont le moins robuste conduit à poser $p_1 = 0,080$;
- supprimer un surclassement en posant $\text{Non}(a_3, S', a_5)$, ce qui conduit à $p_2 = 0,794$.

Ici encore, la seconde solution est la mieux justifiée même si, comme dans le cas précédent, elle conduit à supprimer un surclassement relativement robuste. Une analyse de la troisième possibilité montre que la division de σ_1 en $\{a_1\}$ d'une part et en $\{a_1, a_2, a_3\}$ d'autre part conduit (que l'on identifie $\{a_1\}$ à c' ou à c'') à supprimer au minimum deux surclassements de robustesse au moins égale à 0,794. On conserve donc encore σ_1 comme classe d'ex aequo avec $\text{Non}(\sigma_1, \sigma_6, \sigma_8)$.

Le dernier élément de : $\Delta(\sigma_1, \sigma_6)$ amène à comparer :

- l'adjonction des trois surclassements a_1 , S' , a_2 , S' , a_3 , S' , a_4 et a_5 , S' , a_5 dont le moins robuste conduit à poser $p_1 = 0,042$;
- la suppression du seul surclassement a_2 , S' , a_5 de robustesse $p_2 = 0,666$.

Dans ce dernier cas, la seconde possibilité est à nouveau la mieux justifiée (la troisième, en isolant $\{a_2\}$, conduirait à supprimer des surclassements nettement plus robustes) : σ_1 reste donc définitivement une classe d'ex aequo avec $\text{Non}(\sigma_1, \sigma_6, \sigma_8)$.

La partition A_2' et la relation S' (cf. (r.6.2.4)) qui découlent de cette deuxième étape sont représentées figure 6.2.3.

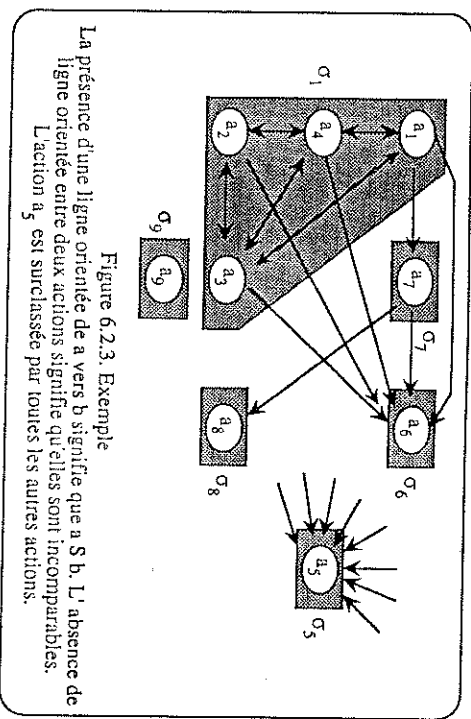


Figure 6.2.3. Exemple
La présence d'une ligne orientée de a vers b signifie que a S b. L'absence de ligne orientée entre deux actions signifie qu'elles sont incomparables.
L'action a_5 est surclassée par toutes les autres actions.

Notons que, pour choisir entre les différentes possibilités offertes, l'application de la règle définie par (r.6.2.2) peut fort bien amener à comparer des nombres p_1 et p_2 très proches. Lorsque leur différence ne paraît pas significative, on peut songer à faire jouer, de façon lexicographique, un second critère faisant intervenir les autres surclassements ajoutés ou supprimés (nombre de surclassements en cause, robustesse du second dans l'ordre de classement, ...). Une telle procédure lexicographique employée avec deux critères dont le premier est un quasi-critère peut conduire à des intransitivités (cf. 3.2.2 a)). Cela ne crée toutefois aucune gêne puisqu'il s'agit d'opter entre deux possibilités et deux seulement.

Troisième étape : Il vient (cf. figure 6.2.3) :

$$N = \{\sigma_1, \sigma_7, \sigma_9\}.$$

Quatrième étape : A' est formée de a_7, a_9 et d'un représentant de σ_1 . Le choix de ce représentant semble être de peu d'importance puisque l'indifférence entre les quatre éléments de σ_1 est relativement bien établie avec les valeurs des coefficients d'importance et des seuils pris en compte. On peut cependant attirer l'attention sur les deux points suivants :

- Le surclassement initial a_1, S, a_7 est assez robuste. Etant donné $p(a_7, a_1) = 0,769$, l'adjonction de a_7, S' , a_1 aurait été justifiée¹ si a_1 avait été isolée de σ_1 . Dès lors que a_7 est sélectionnée, il peut paraître judicieux de ne pas sélectionner a_1 comme représentant de σ_1 .
- L'incomparabilité entre a_4 et a_9 qui découle de S s'avère robuste si l'on en juge par $p(a_4, a_9)$ et $p(a_9, a_4)$: ceci, joint au fait que $p(a_2, a_9)$ et $p(a_3, a_9)$ sont de l'ordre de 0,6, incite à sélectionner a_4 , plutôt que a_2 ou a_3 (a_9 étant sélectionnée).

Pour conclure cet exemple, on peut affirmer que, sur la base de la relation S considérée :

- les actions a_5, a_6, a_9 peuvent être éliminées,
- a_1 ou a_7 mérite d'être sélectionnée,
- a_2 mérite d'être sélectionnée,

¹ Tout en ayant $p(a_7, a_1)$ significativement supérieur à s , on peut avoir $\text{Non}(a_7, S, a_1)$ s'il existe un critère j tel que $g_j(a_7) + v_j(g_j(a_1)) - g_j(a_1)$ est légèrement inférieur à $q_j(g_j(a_1))$ (cf. (r.5.2.9)). Une modification minimale de la valeur d'une des performances ou du veto amènerait à poser a_7, S, a_1 . Il en aurait été ainsi si la relation de la figure 6.2.1 avait été établie conformément à (r.5.2.9). Rappelons que, à l'époque où le cas a été traité, la condition de veto ne faisait pas intervenir le terme $-k/k[F]$ dans $w(s, c)$.

- l'une des actions a_2, a_3 ou a_4 doit être sélectionnée (quelques éléments jouant en faveur de a_1).

Le lecteur pourra utilement rapprocher ces conclusions avec celles obtenues avec ELECTRE I au 6.2.1 b).

La procédure de sélection d'ELECTRE IS, tout comme celle d'ELECTRE I, fait ressortir ce que pourrait avoir d'illusoire une procédure qui prétendrait, à coup sûr et dans tous les cas, sélectionner la "meilleure" ou, à défaut, un très petit nombre de "meilleures" actions. C'est pourquoi l'aide à la décision, telle qu'elle peut être menée sur la base d'ELECTRE IS (dans le cadre de la problématique du choix), ne paraît pas pouvoir, sans une part d'arbitraire assez grande, être complètement automatisée. La mise en oeuvre de la procédure présentée ici peut néanmoins être grandement facilitée par l'emploi d'un logiciel approprié. Elle constitue un instrument d'analyse de données assez puissant, même s'il paraît un peu lourd à manier.

La procédure de sélection ELECTRE IS ne dispense certes pas d'une analyse de robustesse mais elle permet de la réduire considérablement par rapport à ce qu'elle doit être avec ELECTRE I. En effet, grâce au rôle joué par l'indicateur de robustesse, la relation finale S' n'est pas trop tributaire des éléments d'arbitraire qui ont joué dans la définition de S . Il convient néanmoins de répéter la procédure conformément aux principes introduits à propos d'ELECTRE I (cf. 6.2.1 c)) à partir de relations S_1, S_2, \dots conçues notamment en tenant compte des éléments de fragilité mis en évidence par l'application d'ELECTRE IS à la relation initiale S .

Pour terminer, attirons l'attention sur le fait que la procédure de sélection d'ELECTRE IS s'applique sans difficultés à des relations de surclassement définies autrement que par (r.5.2.8) et (r.5.2.9). On peut par exemple prendre appui sur :

- un système de préférences nettes défini à l'aide d'une procédure par compensation probante (cf. 5.3.2 c)), procédure qui se prête bien à la définition d'un indicateur de robustesse ;
- un système de préférences obtenu par enquête auprès d'une population d'individus auxquels on soumet successivement toutes ou seulement certaines des paires à comparer (sans faire nécessairement référence à une famille F de

critères) ; notons $P(a, b)$ la sous-population consultée à propos de la paire (a, b) ; on pourra alors poser :

- b S a si et seulement si la moitié au moins de la population $P(a, b)$ s'est déclarée en accord avec l'affirmation b S a,
- $p(b, a)$ = proportion de $P(a, b)$ en accord avec l'affirmation b S a.

6.3 PROCÉDURE D'EXPLOITATION EN PROBLÉMATIQUE DU TRI : ELECTRE TRI

La procédure d'exploitation ci-après concerne la problématique du tri (cf. 6.1.3). Elle fait intervenir un système de préférences net de type (S, R) dont la définition originelle ² revêt la forme générale suivante :

$$b \text{ } S \text{ } a \Leftrightarrow \sigma_S(b, a) \geq \lambda, \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \quad (\text{r.6.3.1})$$

où $\sigma_S(b, a)$ est l'indice de crédibilité d'ELECTRE III (cf. (r.5.3.12)). Précisons que la procédure d'affectation ELECTRE TRI (cf. a)) peut être appliquée, comme nous le verrons au b) à des relations de surclassement S définies autrement que par (r.6.3.1)).

Dans ce qui suit comme dans toute problématique du tri, la relation de surclassement S ne sert pas à comparer les actions de A entre elles mais à les comparer indépendamment les unes des autres à des actions de référence b^h ($h = 1, \dots, k - 1$). Ces dernières désignent, dans ce qui suit, les actions limites qu'il a été jugé approprié de faire intervenir pour marquer les frontières successives qui séparent les catégories C^1, \dots, C^k constituant la famille complètement ordonnée de catégories auxquelles on veut affecter les actions de A (cf. 6.1.3 b), hypothèse $\beta.1$). Chacune des actions de référence b^h est entièrement définie par son vecteur

¹ Nous ne présentons ci-après qu'une seule méthode. A notre connaissance, il n'en existe pas beaucoup d'autres. Mentionnons Yu (1992), Massaglia et Ostanello (1991), Roy (1981), Roy et Moscarola (1977), Moscarola (1977).

² Il est fait ici référence à un logiciel d'aide à la décision en matière d'octroi de crédit conçu par B. Roy en 1986 pour répondre aux préoccupations d'un grand groupe bancaire français, logiciel toujours exploité de façon régulière.

de performances :

$$g^h = (g^h_1, \dots, g^h_n)$$

lequel est appelé profil de référence ou profil limite. Pour appliquer ELECTRE TRI, il faut préalablement avoir défini les catégories, c'est-à-dire élaboré la famille de profils g^h en accord avec les hypothèses $\beta.2$ et $\beta.3$ (cf. 6.1.3). Ce point sera abordé au c) sur un plan pratique après avoir approfondi, au b), les propriétés et la signification d'ELECTRE TRI sur un plan théorique. Il est enfin commode et nullement restrictif d'introduire, conformément aux conventions de l'hypothèse $\beta.2$, deux profils supplémentaires g^0 et g^k de telle sorte que les actions irréalisées b^0 et b^k dont ils constituent les performances vérifient, $\forall a \in A$:

$$\left. \begin{array}{l} a S b^0 \text{ et Non}(b^0 S a), \\ b^k S a \text{ et Non}(a S b^k), \end{array} \right\} \quad (r.6.3.2)$$

a) *Présentation*

ELECTRE TRI est le jumelage de deux procédures qui conduisent, la première à une affectation pessimiste (logique conjonctive), la seconde à une affectation optimiste (logique disjonctive). Pour certaines actions, les deux affectations peuvent coïncider mais il se peut aussi qu'une action a soit affectée en catégorie C^h par la procédure pessimiste et en catégorie C^i par la procédure optimiste avec $f \neq h$. On verra au b) ci-après qu'on a alors $f > h$.

1°) *ELECTRE TRI pessimiste*

- Poser successivement $i = k, k - 1, \dots$ pour tester si a S b^{i-1} est vraie.
- Arrêter la procédure à la première valeur de i pour laquelle le test est positif : soit h cette valeur.
- Affecter a en catégorie C^h .

Par construction, C^h est donc la catégorie la plus haute telle que a S b^{h-1} .

2°) *ELECTRE TRI optimiste*

- Noter \succ la relation¹ définie par : $b \succ a \Leftrightarrow b S a \text{ et Non}(a S b)$ (r.6.3.3)
- Poser successivement $i = 0, 1, \dots$ pour tester si $b^i \succ a$ est vraie.
- Arrêter la procédure à la première valeur de i pour laquelle le test est positif : soit f cette valeur.
- Affecter a en catégorie C^f .

Par construction, C^f est donc la catégorie la plus basse telle que $b^f \succ a$.

b) *Commentaires théoriques*

Considérons une famille d'actions de référence b^0, b^1, \dots, b^k conçue conformément aux hypothèses $\beta.1, \beta.2$ et $\beta.3$ du 6.1.3 b). On a donc en particulier :

$$b^k \Delta_F b^{k-1}, b^{k-1} \Delta_F b^{k-2}, \dots, b^1 \Delta_F b^0.$$

Soit S une relation de surclassement permettant de comparer des actions à ces actions de référence. On a vu qu'il n'était pas restrictif de supposer que, pour toute action a :

$$a \succ b^0 \text{ et } b^k \succ a \text{ (cf. (r.6.3.2)).}$$

Dans ces conditions, commençons par examiner quel peut être le résultat de la comparaison d'une action a aux $k+1$ actions de

¹ Rappelons que, en toute rigueur, cette relation ne peut être interprétée sans précautions comme une relation de préférence stricte (voir notamment à ce sujet le passage en petits caractères au début du 5.1.1).

référence. La comparaison de a à l'action de référence b^x peut prendre une et une seule des quatre formes suivantes :

- $b^x S a$ et $\text{Non}(a S b^y)$, c'est-à-dire $b^x \succ a$,
- $a S b^x$ et $\text{Non}(b^x S a)$, c'est-à-dire $a \succ b^x$,
- $a S b^x$ et $b^x S a$, c'est-à-dire $a I b^x$,
- $\text{Non}(a S b^y)$ et $\text{Non}(b^x S a)$, c'est-à-dire $a R b^x$.

Le résultat qui suit montre que la comparaison de a à b^0, b^1, \dots, b^k peut prendre trois formes distinctes. Ce résultat servira de base pour analyser comment les procédures optimiste et pessimiste se comportent vis-à-vis des exigences introduites au 6.1.3.

RÉSULTAT 6.3.1 : Considérons une famille d'actions de référence b^0, b^1, \dots, b^k telles que :

$$b^k \Delta_F b^{k-1}, b^{k-1} \Delta_F b^{k-2}, \dots, b^1 \Delta_F b^0$$

et une relation de surclassement S telle que, pour toute action a à affecter :

$$b^k \succ a \text{ et } a \succ b^0.$$

Le résultat de la comparaison de a à b^0, b^1, \dots, b^k prend alors une et une seule des trois formes suivantes :

- $a \succ b^0, a \succ b^1, \dots, a \succ b^x, b^{x+1} \succ a, b^{x+2} \succ a, \dots, b^k \succ a$
- avec $x \in \{0, 1, \dots, k-1\}$, (r.6.3.4)
- $a \succ b^0, a \succ b^1, \dots, a \succ b^x, a R b^{x+1}, a R b^{x+2}, \dots, a R b^y, b^{y+1} \succ a, b^{y+2} \succ a, \dots, b^k \succ a$
- avec $x \in \{0, 1, \dots, k-2\}$ et $y \in \{x+1, x+2, \dots, k-1\}$, (r.6.3.5)
- $a \succ b^0, a \succ b^1, \dots, a \succ b^x, a I b^{x+1}, a I b^{x+2}, \dots, a I b^y, b^{y+1} \succ a, b^{y+2} \succ a, \dots, b^k \succ a$
- avec $x \in \{0, 1, \dots, k-2\}$ et $y \in \{x+1, x+2, \dots, k-1\}$. (r.6.3.6)

Démonstration

On a, par hypothèse :

$$b^k \succ a \text{ et } a \succ b^0.$$

De plus, S étant une relation de surclassement, le résultat 2.2.2 implique que :

$$b^x \succ a \Rightarrow b^{x+1} \succ a \text{ pour } x = 1, 2, \dots, k-1 \text{ et } a \succ b^y \Rightarrow a \succ b^{y-1} \text{ pour } y = 1, 2, \dots, k-1.$$

Soit h la valeur minimum de x telle que $b^x \succ a$ et f la valeur maximum de y telle que $a \succ b^y$. En vertu de ce qui précède, les valeurs de h et f sont bien définies. De plus, on a nécessairement $h > f$, la relation \succ étant asymétrique.

Si $h = f+1$, on est alors dans la situation (r.6.3.4).

Si $h > f+1$, on a soit $a S b^{f+1}$, soit $\text{Non}(a S b^{f+1})$.

Supposons $a S b^{f+1}$. On ne peut avoir $a \succ b^{f+1}$ car cela contredirait la définition de f . On a donc $a I b^{f+1}$.

On sait alors que :

$$b^x S a \text{ pour } x = f+1, f+2, \dots, k.$$

La définition de h implique donc que :

$$a I b^{f+1}, a I b^{f+2}, \dots, a I b^{h-1}$$

et l'on est dans le cas (r.6.3.6).

Supposons à présent que $\text{Non}(a S b^{f+1})$. Si $b^{f+1} S a$, on aurait alors $b^{f+1} \succ a$, ce qui contredirait la définition de h . On a donc nécessairement $a R b^{f+1}$.

On sait par conséquent que :

$$\text{Non}(a S b^y) \text{ pour } x = f+2, f+3, \dots, k.$$

La définition de h implique alors nécessairement que :

$$a R b^{f+1}, a R b^{f+2}, \dots, a R b^{h-1}.$$

On est donc dans le cas (r.6.3.5), ce qui achève la démonstration.

Examinons, dans chacun des trois cas du résultat 6.3.1, ce à quoi conduit l'application des procédures optimiste et pessimiste.

1) Cas (r.6.3.4). L'action a est affectée par les deux procédures à l'unique catégorie C^x telle que $a \succ b^x$ et $b^{x+1} \succ a$. Cette affectation est conforme à (r.6.1.1) et (r.6.1.3).

ii) Cas (r.6.3.5). L'action a est affectée par la procédure pessimiste à l'unique catégorie C^a telle que $a > b^i$ et $a \in R \ b^{i+1}$. L'action a est affectée par la procédure optimiste à l'unique catégorie C^a telle que $b^{i+1} > a$ et $a \in R \ b^i$. On a nécessairement $y > x$. Ces affectations sont conformes à (r.6.1.1) et (r.6.1.3).

iii) Cas (r.6.3.6). L'action a est affectée par les deux procédures à l'unique catégorie C^a telle que $a \in I \ b^i$ et $b^{i+1} > a$. Cette affectation est conforme à (r.6.1.1). Elle n'est conforme à (r.6.1.3) que dans le cas particulier où a n'est indifférente qu'à une seule action de référence.

Quelle que soit la façon dont une action a se compare aux actions de référence, la procédure pessimiste (resp. optimiste) conduit à affecter a à une catégorie unique C^a (resp. C^b). On a toujours $h \geq f$, ce qui justifie les appellations "pessimiste" et "optimiste". Seul le cas (r.6.3.5) conduit à une divergence d'affectation entre les procédures optimiste et pessimiste. L'affectation d'une action a réalisée par les deux procédures est toujours conforme à (r.6.1.1). Elle l'est également à (r.6.1.3), sauf dans le cas où a est indifférente à plus d'une action de référence. Cette non conformité avec (r.6.1.3) provient du fait que l'intervalle qui sépare deux profils limites est trop petit eu égard à la relation de surclassement utilisée. Cette relation constitue alors un instrument de différenciation trop grossier pour trier les actions avec la finesse que requiert la définition adoptée pour les catégories. Ceci justifiera l'introduction d'une condition de compatibilité des données reliant la finesse du tri recherché, telle qu'elle ressort des profils limites, à certaines des caractéristiques de l'instrument de différenciation que constitue la relation de surclassement S.

Sur la base des remarques qui précèdent et du résultat 6.3.1, il est aisé d'examiner comment les deux procédures optimiste et pessimiste se comportent vis-à-vis des exigences introduites au 6.1.3.

RÉSULTAT 6.3.2 : Considérons une famille d'actions de référence conçues conformément aux hypothèses β_1, β_2 et β_3 du 6.1.3 b) et une relation de surclassement S vérifiant (r.6.3.2).

Alors :

i) Les procédures ELECTRE TRI optimiste et pessimiste vérifient les exigences d'unicité, d'indépendance, de monotonie, d'homogénéité et de stabilité.

ii) Les procédures ELECTRE TRI optimiste et pessimiste vérifient l'exigence de conformité au profil si et seulement si la condition de compatibilité des données suivante est satisfaite pour toute action a :

$$a \in I \ b^i \Rightarrow \text{Non}(a \in I \ b^{i+1}) \text{ pour } x = 1, 2, \dots, k-2. \quad (\text{r.6.3.7})$$

iii) Si une action a est affectée en catégorie C^b par la procédure pessimiste et en catégorie C^f par la procédure optimiste, alors $h \leq f$. De plus,

$$h < f \Leftrightarrow a \in R \ b^h, a \in R \ b^{h+1}, \dots, a \in R \ b^{f-1}. \quad (\text{r.6.3.8})$$

Démonstration

i) Considérons la procédure pessimiste, la démonstration se transposant de façon immédiate au cas de la procédure optimiste.

Unicité. Par définition, toute action est affectée à au plus une catégorie. Considérons une action quelconque a. D'après (r.6.3.2), on a $a > b^0$. Une telle action peut donc bien être affectée à une catégorie unique.

Indépendance. Par définition, l'affectation d'une action a ne dépend que de la manière dont elle se compare aux actions b^0, b^1, \dots, b^k .

Monotonie. Supposons a affectée en catégorie C^a . On a donc $\text{Non}(a \in S \ b^y), \text{Non}(a \in S \ b^{y-1}), \dots, \text{Non}(a \in S \ b^2), \dots, \text{Non}(a \in S \ b^1)$. La relation S étant une relation de surclassement,

$$b \Delta_p a \Rightarrow [a \in S \ b^{x-1} \Rightarrow b \in S \ b^{x-1}]$$

et l'action b est alors nécessairement affectée à une catégorie C^y telle que $y \geq x$.

Stabilité. Supposons a affectée en catégorie C^a et donc : $\text{Non}(a \in S \ b^y), \text{Non}(a \in S \ b^{y-1}), \text{Non}(a \in S \ b^{y-2}), \dots, \text{Non}(a \in S \ b^2), a \in S \ b^{y-1}, a \in S \ b^{y-2}, \dots, a \in S \ b^0$. Supprimons l'action de référence b^i . Si $x > i+1$ ou si $x < i$, il est clair que l'affectation de a est inchangée. Si $x = i+1$ ou si $x = i$, on a :

$$\text{Non}(a \in S \ b^{i-1}), \text{Non}(a \in S \ b^{i-2}), \dots, \text{Non}(a \in S \ b^{i+1}), a \in S \ b^{i-1}, \dots, a \in S \ b^0.$$

L'action a est alors bien affectée à la catégorie délimitée en haut par b^{h+1} et en bas par b^{h-1} .

Homogénéité. Considérons une action a telle que :

$$a \succ b^{h-1}, b^h R a, \\ b^f \succ a, a R b^{h-1}.$$

On est alors dans le cas (r.6.3.5) du résultat 6.3.1. L'action a, de même que toutes celles se comparant identiquement à b^{h-1} , b^h , b^{h-1} et b^f , est alors affectée en catégorie C^h par la procédure pessimiste.

ii) La nécessité de (r.6.3.7) est évidente compte-tenu de (r.6.1.3). Sa suffisance résulte, de façon immédiate, du résultat 6.3.1 et des commentaires qui l'accompagnent.

iii) Ce point résulte de façon immédiate du résultat 6.3.1 et des commentaires qui l'accompagnent.

Remarque importante : ELECTRE TRI demeure une procédure digne d'intérêt même si la condition de compatibilité des données (r.6.3.7) n'est pas satisfaite. Dans ce cas, il peut exister des actions indifférentes à plus d'une action de référence, c'est-à-dire telles que (cf. (r.6.3.6)) :

$$a \succ b^0, a \succ b^1, \dots, a \succ b^{h+1}, a I b^x, a I b^{x+1}, \dots, a I b^y, b^{y+1} \succ a, \\ \dots, b^k \succ a.$$

D'après (r.6.1.3), l'exigence de conformité au profil voudrait que a soit affectée à C^x , C^{x+1} , ..., C^y . Afin de respecter l'exigence d'unicité, ELECTRE TRI opère un choix entre ces diverses possibilités. La procédure optimiste, comme la procédure pessimiste, affecte a en catégorie C^y , catégorie la plus haute telle que a soit indifférente à l'action de référence qui la ferme en bas. Un tel choix est compatible avec l'esprit de l'exigence de conformité au profil.

Rappelons que les résultats qui précèdent sont valables quelle que soit la définition du surclassement S choisie. Examinons, pour achever ce paragraphe, ce qu'apporte le choix de (r.6.3.1). Commençons par examiner le cas où chacun des n critères est un vrai-critère.

Posons tout d'abord $\lambda = 1$: $S = \Delta_F$ et, quelles que soient b^0 , ..., b^k , la condition de compatibilité (r.6.3.7) est satisfaite ; dans ces conditions :

- ELECTRE TRI pessimiste n'est autre que la procédure conjonctive du 6.1.3 b) ;

- ELECTRE TRI optimiste n'est autre que la procédure disjonctive du 6.1.3 b) appliquée en substituant à Δ_F la relation de dominance stricte Δ_F définie par : $b \Delta_F a \Leftrightarrow [b \Delta_F a \text{ et Non } (a \Delta_F b)]$ (la seule raison d'être de cette substitution est de retrouver des catégories fermées en bas).

Faisons maintenant diminuer progressivement λ . La condition de compatibilité n'est alors automatiquement satisfaite que si $g_j > g_j^{h-1}$, $\forall j \in F$ et $\forall h \in \{1, 2, \dots, k\}$. Pour qu'une action a soit affectée par ELECTRE TRI pessimiste à C^h ou à une catégorie supérieure, il n'est plus nécessaire d'avoir $g_j(a) \geq g_j^{h-1}$, $\forall j \in F$ (comme c'est le cas avec la procédure conjonctive). Il suffit que la sous-famille $C(a, S, b^{h-1})$ des critères qui vérifient l'inégalité précédente ait une importance au moins égale à λ et que, pour chacun de ceux qui mettent en défaut les différences $g_j^{h-1} - g_j(a)$, reste suffisamment proche de 0 pour que l'indice de discordance $d_j(a, b^{h-1})$ ne dépasse pas λ . ELECTRE TRI pessimiste conserve donc un caractère conjonctif mais, au lieu d'exiger, pour une affectation en catégorie C^h ou supérieure, de voir tous les critères atteindre ou dépasser la performance fixée par le profil g^{h-1} , on se contente ici d'avoir une majorité de critères qui atteignent la performance fixée par le profil, les autres ne devant pas trop lui être inférieurs. La majorité requise est d'autant plus faible que λ est plus petit ; c'est pourquoi l'affectation de a ne peut aller que vers des catégories supérieures lorsque λ diminue.

De façon similaire, pour que, dans les mêmes conditions, une action a soit affectée par ELECTRE TRI optimiste à C^h ou à une catégorie supérieure, il n'est plus suffisant d'avoir, pour une valeur de j au moins, $g_j(a) \geq g_j^{h-1}$ (comme c'est le cas dans la procédure disjonctive avec Δ_F). Il est ici nécessaire que la sous-famille $C(b^{h-1} \succ a)$ des critères qui violent l'inégalité précédente ait une importance inférieure à λ ou, à défaut, que les critères qui

vérifient l'inégalité fassent apparaître des différences ($g_j(a) - g_j^{b^{-1}}$) suffisamment grandes pour que le mécanisme de veto s'oppose à $b^{-1} \succ a$. ELECTRE TRI optimiste conserve donc un caractère disjonctif mais, au lieu de se contenter, pour une affectation en catégorie C^h ou supérieure, de voir un seul critère atteindre ou dépasser la performance fixée par le profil $g^{b^{-1}}$, on exige ici de surcroît qu'une règle de majorité combinée à un mécanisme de veto justifie le refus de $b^{-1} \succ a$. Lorsque λ diminue, l'affectation de a ne peut aller que vers des catégories inférieures. Ainsi, réduire λ conduit à réduire l'écart entre les affectations d'ELECTRE TRI pessimiste et d'ELECTRE TRI optimiste lorsque celles-ci ne coïncident pas.

Prendre en compte des pseudo-critères au lieu de vrai-critères conduit à faire intervenir des seuils d'indifférence et/ou de préférence non nuls. Il suffit de se reporter aux formules (r.5.3.1), (r.5.3.2), (r.5.3.11), (r.5.2.8) et (r.5.2.7) pour constater que le traitement de ces seuils reste en profondeur conforme avec ce qui vient d'être dit concernant les principes d'affectation par ELECTRE TRI. Tout comme la substitution du surclassement à la dominance, l'introduction de seuils permet de nuancer (possibilité de "rachat légèrement en-dessous de la barre") la logique conjonctive qui sous-tend ELECTRE TRI pessimiste et la logique disjonctive qui sous-tend ELECTRE TRI optimiste.

c) *Commentaires pratiques*

Considérons une situation concrète d'aide à la décision où l'on a adopté la problématique du tri. Que l'on envisage ou non d'utiliser ELECTRE TRI, il importe, en tout premier lieu, de cerner les catégories pertinentes. Fondamentalement, chacune d'elles se définit par référence à ce qui doit advenir aux actions qui lui seront affectées. Dans un problème d'octroi de crédit, on pourra par exemple prendre appui sur les quatre catégories suivantes :

- E : rejet,
- D : décision différée car nécessité d'une étude plus approfondie,

- C : acceptation sous condition d'obtention de quelques modifications,
- B : acceptation sans condition¹.

L'utilisation d'ELECTRE TRI n'est envisageable que si les catégories prises en considération sont naturellement ordonnées (cf. 6.1.3). Supposons qu'il en soit ainsi. Il faut alors cerner chaque catégorie C^h par son profil haut g^h et son profil bas $g^{h^{-1}}$ (profil haut de $C^{h^{-1}}$), étant entendu que si une action a vérifie $g(a) = g^{h^{-1}}$, alors a doit être affectée à C^h . De façon plus générale, il doit en être de même pour toute action a vérifiant a S b^{-1} et $b^h > a$ (S et \succ étant ici respectivement définies par (r.6.3.1) et (r.6.3.3)).

Les valeurs $g_j^{b^{-1}}$ sont des performances limites qui marquent la frontière entre $C^{h^{-1}}$ et C^h . Ces valeurs doivent être fixées de façon à rendre compatible, avec l'affectation à C^h , de toute action a vérifiant a S b^{-1} et $b^h > a$ et à justifier l'affectation à une catégorie inférieure de toute action a vérifiant $b^h > a$. La place exacte d'une telle frontière ne peut que, dans des cas très exceptionnels (même pour $n = 1$), être déduite rigoureusement de l'idée que l'on se fait du contenu des catégories C^h et $C^{h^{-1}}$. Il importe avant tout que les valeurs attribuées aux $g_j^{b^{-1}}$ soient jugées "convenables" dans le cadre de la procédure retenue. Pour cela, il peut être utile de se souvenir que ELECTRE TRI pessimiste et ELECTRE TRI optimiste ne conduisent à des affectations différentes que dans le cas d'actions incomparables à certaines des actions de référence. Lorsqu'on souhaite que l'affectation de telles actions se fasse dans une logique de type conjonctif, on doit adopter ELECTRE TRI pessimiste et, si l'on souhaite qu'elle se fasse dans une logique de type disjonctif, on doit adopter ELECTRE TRI optimiste. Ce choix peut influencer les valeurs qu'il convient d'attribuer aux $g_j^{b^{-1}}$.

Ce qui précède conduit à formuler les règles pratiques suivantes.

¹ Dans MM/CAD, les exemples 7, 8, 9 et 10 illustrent, dans d'autres contextes et de façon plus détaillée, ce que peuvent être de telles catégories.

Pour un critère j donné, la performance limite g_j^{h-1} correspond :

— En logique conjonctive à la performance minimale que $g_j(a)$ doit atteindre (au seuil près) ou dépasser pour justifier l'affectation de a en catégorie C^h ou supérieure sachant que cette affectation n'aura lieu que s'il existe suffisamment d'autres critères (règle de majorité paramétrée par λ) vérifiant (au seuil près) la condition similaire $g_i(a) \geq g_i^{h-1}$ et que les éventuels critères ne vérifiant pas cette condition ne la violent pas assez pour que le mécanisme du veto s'oppose à a S b^{h-1} .

— En logique disjonctive, à la performance minimale que $g_j(a)$ doit atteindre (au seuil près) ou dépasser pour justifier l'affectation de a en catégorie C^h ou supérieure sachant que cette affectation n'aura lieu que s'il n'existe pas trop de critères (règle de majorité paramétrée par λ) vérifiant (au seuil près) la condition opposée $g_i(a) < g_i^{h-1}$ ou, lorsqu'il en existe trop, que si la différence $g_i(a) - g_i^{h-1}$ est suffisamment grande pour que (éventuellement conjugué à des différences similaires positives dues à d'autres critères) le mécanisme du veto s'oppose à $b^{h-1} > a$.

Plus on souhaite marquer le caractère conjonctif ou disjonctif de la procédure et plus :

- la valeur de λ doit être choisie proche de 1 (renforcement de la majorité requise) ;
- la valeur de chaque veto v_j doit être choisie proche du seuil de préférence p_j (renforcement du mécanisme de veto).

Les cas où l'affectation par ELECTRE TRI pessimiste diffère de celle par ELECTRE TRI optimiste sont d'autant plus rares que λ est plus faible et que chaque v_j est plus élevé. Ils disparaissent complètement pour $\lambda = 1/2$ joint à des valeurs des v_j suffisamment élevées pour que toute possibilité de veto disparaisse ($v_j \geq 2 \cdot (g_j^k - g_j^0)$ par exemple).

Il n'est pas essentiel de chercher à savoir si la condition de compatibilité des données (r.6.3.7) est ou non satisfaite¹. En effet, lorsqu'elle ne l'est pas (cf. fin du b) ci-dessus), l'affectation demeure cohérente avec l'exigence de conformité énoncée à la fin du 6.1.3. Il est en outre aisé de compléter la procédure pour diagnostiquer, au fur et à mesure, celles des actions a qui mettent en défaut (r.6.3.7) et qui, de ce fait, pourraient être affectées à une catégorie inférieure. Rappelons qu'il ne peut s'agir que d'actions affectées dans la même catégorie C^h par ELECTRE TRI optimiste et ELECTRE TRI pessimiste et qui vérifient par conséquent :

$$a \ S \ b^{h-1}, \ b^{h-1} \ S \ a, \ b^h > a.$$

Le diagnostic de telles actions consiste tout simplement à tester si l'on a :

$$a \ S \ b^{h-1} \ \text{et} \ b^{h-1} \ S \ a \ \text{pour} \ i = 2, 3, \dots$$

Lorsqu'il en est ainsi, a est indifférente à l'action de référence qui ferme en bas la catégorie C^{h-1} , ce qui, d'après (r.6.2.3), justifierait son affectation à C^{h-1} tout aussi bien qu'à C^h .

6.4 PROCÉDURES D'EXPLOITATION EN PROBLÉMATIQUE DU RANGEMENT : PROMETHEE I ET II, ELECTRE II, III ET IV

Parmi les procédures d'exploitation, les quatre dont il est question ci-après sont propres aux méthodes qui ont été le plus utilisées en pratique. Elles présentent un certain nombre de traits communs et des différences que nous soulignerons au fur et à mesure dans les commentaires qui suivent leur présentation. Ce sont ces différences qui doivent normalement amener à choisir l'une plutôt que l'autre dans un contexte concret donné. On a vu, au 6.1.4, que la définition d'une "bonne" procédure de classement se heurte à de sérieuses difficultés. Aucune des quatre présentées

¹ Pour plus de précisions sur ce point, voir Yu (1992).

ci-après n'est donc pleinement satisfaisante. Nous reviendrons sur ce point au 6.5.

6.4.1 PROMETHEE I et II (cf. Brans et al. (1984))

Les auteurs de PROMETHEE ont proposé quatre variantes pour la procédure d'exploitation de la méthode PROMETHEE. Ici, nous ne présenterons que celles de PROMETHEE I et de PROMETHEE II¹. L'une comme l'autre concernent la problématique du rangement (cf. 6.1.4). Elles s'appliquent à un système de préférences floues de type (P, ~) caractérisé par un indice de crédibilité $\sigma_p(b, a)$ reflétant la crédibilité de l'affirmation b P a (cf. (r.5.3.8) et (r.5.3.9)).

a) Présentation

Dans chacune des variantes de PROMETHEE, la procédure de classement repose sur ce que les auteurs appellent les flux sortants et les flux entrants d'une action quelconque $b \in A$:

$$\text{Flux sortants : } \phi^+(b) = \sum_{a \in A} \sigma_p(b, a) \quad (r.6.4.1)$$

$$\text{Flux entrants : } \phi^-(b) = \sum_{a \in A} \sigma_p(a, b) \quad \left. \vphantom{\sum_{a \in A} \sigma_p(a, b)} \right\}$$

PROMETHEE I et PROMETHEE II diffèrent dans la manière de faire intervenir ces flux pour construire le préordre Z qui est l'aboutissement de toute procédure de classement. Alors que Z peut être un préordre partiel dans PROMETHEE I, la procédure PROMETHEE II aboutit obligatoirement à un préordre complet (que nous noterons Z' pour le différencier du précédent).

1°) PROMETHEE I : Z est ici obtenu en trois étapes comme intersection de deux préordres complets Z₁ et Z₂.

¹ PROMETHEE III aboutit non pas à un préordre partiel mais à un ordre d'intervalle ; PROMETHEE IV généralise PROMETHEE II au cas A infini.

- Z₁ s'obtient en rangeant les actions de A par valeur décroissante de leurs flux sortants :

$$b Z_1 a \Leftrightarrow \phi^+(b) \geq \phi^+(a). \quad (r.6.4.2)$$

- Z₂ s'obtient en rangeant les actions de A par valeur croissante de leurs flux entrants :

$$b Z_2 a \Leftrightarrow \phi^-(b) \leq \phi^-(a). \quad (r.6.4.3)$$

- Z = Z₁ ∩ Z₂ est alors défini par :

$$b Z a \Leftrightarrow [b Z_1 a \text{ et } b Z_2 a]. \quad (r.6.4.4)$$

2°) PROMETHEE II : Le préordre complet Z' est ici obtenu en rangeant les actions de A par valeur décroissante de leurs flux nets :

$$\begin{aligned} \text{Flux nets : } \phi(b) &= \phi^+(b) - \phi^-(b). & (r.6.4.5) \\ b Z' a &\Leftrightarrow \phi(b) \geq \phi(a). & (r.6.4.6) \end{aligned}$$

b) Commentaires théoriques

Commençons par expliquer pourquoi les préordres Z et Z', obtenus par PROMETHEE, peuvent être regardés comme l'instrument d'aide à la décision recherché compte tenu de la problématique adoptée (cf. 6.1.4). Analysons tout d'abord le cas, certes exceptionnel, dans lequel $\sigma_p(b, a)$ ne prend que les valeurs 0 et 1. D'après (r.5.3.9) et (r.5.3.8) (et conformément à l'exigence 2 que doit vérifier tout indice de crédibilité σ_p), $\sigma_p(b, a) = 1$ signifie que l'affirmation b P a est solidement établie. Dans ces conditions :

- $\phi^+(b)$ représente le nombre d'actions auxquelles b est strictement préférée ;
- $\phi^-(b)$ représente le nombre d'actions qui sont strictement préférées à b.

Dans Z₁ (cf. (r.6.4.2)), b est placée avant a si et seulement si le nombre d'actions auxquelles b est préférée est supérieur au

nombre d'actions auxquelles a est préférée ; b et a sont rangées dans la même classe si et seulement ces deux nombres sont égaux. C'est une approche duale qui est adoptée avec Z_2 (cf. (r.6.4.3)) : b est d'autant mieux placée dans ce préordre que le nombre des actions qui lui sont préférées est plus faible. Lorsqu'on cherche, dans une approche opérationnelle, à ranger les actions de A, les préordres Z_1 et Z_2 peuvent être regardés, aussi bien l'un que l'autre, comme une réponse convenable. Pourtant, ils ne sont pas nécessairement identiques. Ils le sont en particulier si la relation P définie par $b \succcurlyeq P a \Leftrightarrow \sigma_P(b, a) = 1$ est elle-même un préordre complet (on a alors $Z_1 = Z_2 = P$). Lorsque Z_1 et Z_2 font apparaître des différences, il apparaît légitime de regarder a et b comme incomparables si (et seulement si) b est placé strictement avant a dans l'un de ces deux préordres et a strictement avant b dans l'autre. De même, il semble raisonnable de ne regarder a et b comme ex aequo que si a et b le sont dans Z_1 et dans Z_2 . Dans tous les autres cas, Z_1 et/ou Z_2 déterminent l'ordre sans ambiguïté. Ces principes définissent un préordre partiel qui n'est autre que $Z = Z_1 \cap Z_2$ (cf. (r.6.4.4)). Il se peut que le praticien réclame un préordre complet. Dans ce cas, rien ne semble pouvoir justifier le choix de Z_1 plutôt que celui de Z_2 . Les auteurs de PROMETHEE II, afin de prendre en compte conjointement $\phi^+(b)$ et $\phi^-(b)$ de telle sorte que le rangement de b soit influencé favorablement par le nombre d'actions auxquelles b est strictement préférée et défavorablement par le nombre d'actions qui lui sont strictement préférées, ont proposé de prendre appui sur le flux net (cf. (r.6.4.5)) pour définir Z' (cf. (r.6.4.6)). Le lecteur vérifiera sans peine (et cela même en-dehors du cas particulier considéré jusqu'ici) que $b \succcurlyeq Z_1 a$ et $b \succcurlyeq Z_2 a \Rightarrow b \succcurlyeq Z' a$, d'où $Z \subset Z'$.

Venons-en maintenant au cas général où $\sigma_P(b, a)$ peut prendre des valeurs autres que 0 et 1. On ne peut plus alors interpréter $\phi^+(b)$ et $\phi^-(b)$ en termes de dénombrement d'actions. Quelle signification donner aux sommations (r.6.4.1) ? Comment justifier le fait qu'une action b doit être placée au moins aussi bien qu'une action a lorsque la comparaison de sommes, difficilement interprétable, conduit au système $\phi^+(b) \geq \phi^+(a)$, $\phi^-(b) \leq \phi^-(a)$? On peut certes faire valoir que, si chacun des termes de la somme est proche soit de 0, soit de 1, on ne s'écarte pas trop des conditions du cas particulier examiné ci-dessus et la procédure reste interpré-

table. Malheureusement, les valeurs prises par $\sigma_P(b, a)$ n'ont aucune raison d'être concentrées aux extrémités de l'intervalle [0 ; 1] (bien au contraire, cf. 5.3.2.1 b)). Les deux questions qui viennent d'être posées sont donc pertinentes et les premiers éléments de réponse qui suivent sont essentiels si l'on veut comprendre ce qui, dans la définition des procédures d'exploitation de PROMETHEE I et PROMETHEE II, gêne le théoricien.

Dans PROMETHEE, l'indice de crédibilité $\sigma_P(b, a)$ a une signification ordinaire que l'on peut considérer comme conforme aux trois exigences introduites au début du 5.3.2. Pour que, en toute rigueur, les sommes ϕ^+ et ϕ^- puissent jouer le rôle qui leur est dévolu dans la définition des préordres Z_1 , Z_2 , Z et Z' , il faudrait que ces préordres demeurent invariants face à toute transformation de $\sigma_P(b, a)$ qui préserverait la conformité aux trois exigences du 5.3.2. Comme tel n'est pas le cas, il faudrait pouvoir attribuer à σ_P une signification quantitative conforme à des exigences beaucoup plus fortes que celles dont il vient d'être question.

Dans des termes moins abstraits, on peut faire valoir que ϕ^+ (tout comme ϕ^- ou ϕ) peut prendre la même valeur à partir de deux séries de termes très différents : la première peut combiner des valeurs voisines de 0 avec d'autres voisines de 1 alors que la seconde comporte essentiellement des valeurs voisines de 1/2 (reflétant l'incomparabilité). L'égalité ou l'inégalité des valeurs obtenues dans ces conditions est-elle porteuse de sens pour fonder un classement ? Pas nécessairement, comme le montrent les deux exemples ci-après.

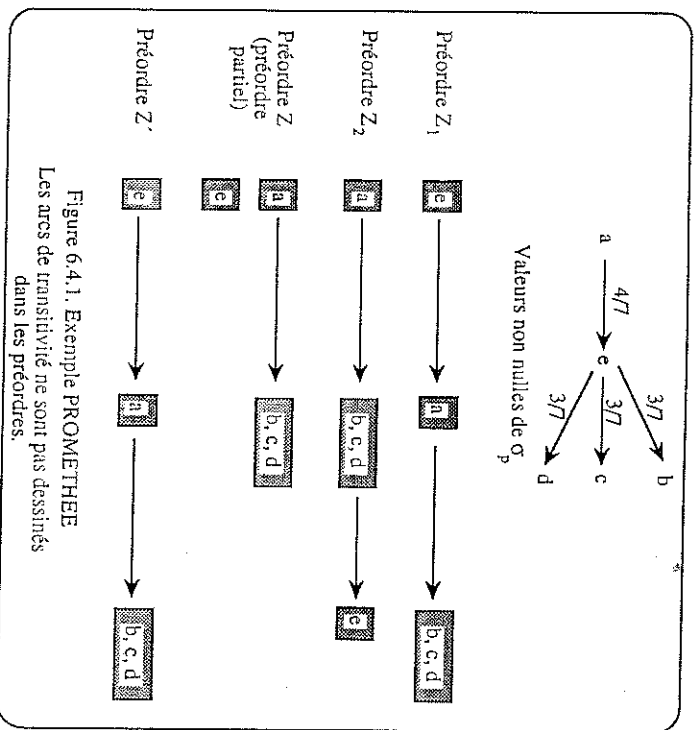
Considérons en premier lieu les données du tableau 6.4.1 relatives à cinq actions comparées selon sept quasi-critères supposés d'égal importance. Sur les quatre premiers critères, il y a indifférence entre deux actions quelconques à une exception près : pour chacun d'eux, a est strictement préférée à e. Sur les trois autres critères, a est indifférente à e ainsi qu'à b, c et d (entre lesquelles il y a encore indifférence) mais e est strictement préférée à b, c et d. Les critères étant d'égal importance, on peut considérer que a doit être placée en tête du classement suivi de e (qui, sur aucun critère, n'est préférée à a), b, c et d venant ex aequo à la fin. La figure 6.4.1 visualise (à l'aide d'un graphe) les valeurs de l'indice de crédibilité lorsqu'il est non nul ; elle schématise également les résultats de PROMETHEE I et PROMETHEE II qui s'en déduisent. On remarquera que Z_1 , comme Z' , place e en tête et non a. Quant

1 Il est toutefois impossible de prouver, en toute rigueur, que l'exigence 3 est satisfaite : les éléments de preuve en sa faveur ne peuvent se passer de considérations empiriques discutables.

Tableau 6.4.1

Critères	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7
Actions							
a	14	14	14	14	12	12	12
b	12	12	12	12	10	10	10
c	12	12	12	12	10	10	10
d	12	12	12	12	10	10	10
e	10	10	10	10	14	14	14

g_j est un quasi-critère avec $q_j = 2$ et $0 \leq g_j(a) \leq 20$ pour $j \in \{1, 2, \dots, 7\}$.



Considérons en second lieu le cas de trois actions a, b, c comparées selon trois critères supposés encore d'égale importance. Les résultats de la figure 6.4.2 découlent de tout tableau de performances tels que :

- sur les deux premiers critères, b est indifférente à a et à c alors que a est strictement préférée à c ;
- sur le troisième critère, b est strictement préférée à a et à c alors que a et c sont indifférentes.

Sur ces bases, il est clair que (cf. tableau 6.4.2) b se compare mal à a puisque, selon les deux premiers critères, b devrait être avant a et c alors que, selon le troisième, b devrait être avant a et c (a étant clairement placée avant c). Le préordre final devrait donc être :

"a et b incomparables, toutes les deux placées avant c".

Ce préordre ne correspond ni à Z, ni à Z' qui, pourtant, sont identiques (cf. figure 6.4.2).

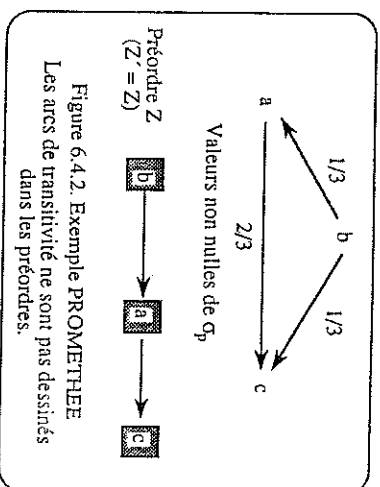
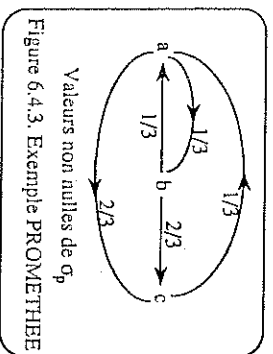


Tableau 6.4.2

Critères	g_1	g_2	g_3
Actions			
a	15	16	10
b	13	14	13
c	11	12	10

g_j est un quasi-critère avec $q_j = 2$ et $0 \leq g_j \leq 20$ pour $j \in \{1, 2, 3\}$.

Faisons encore observer¹ que, face à certaines variations de l'indice de crédibilité σ_p consécutives à des modifications du tableau des performances, la manière dont certaines actions d'un groupe se comparent entre elles dans le préordre peut demeurer invariante (la manière dont les actions du groupe se comparent aux autres pouvant, en revanche, être modifiée). C'est ainsi que, si l'on ajoute ou si l'on retranche une même constante ε à la valeur de σ_p pour une séquence d'actions formant un circuit $(a_1, a_2, \dots, a_p, a_1)$, alors la position relative des actions a_1, a_2, \dots, a_p ne sera modifiée dans aucun des quatre préordres Z_1, Z_2, Z, Z' . De plus, Z' restera invariant. Il s'ensuit par exemple que le système de valeurs de l'indice de crédibilité montré à la figure 6.4.3 conduit aux préordres Z et Z' de la figure 6.4.2 puisque l'on passe du système de valeurs de σ_p indiqué sur cette figure à celui de la figure 6.4.3 en ajoutant $\varepsilon = 1/3$ aux valeurs de σ_p le long du circuit (a, b, c, a) . Soulignons au passage que l'on entrevoit difficilement la nature des transformations qu'il faut faire subir aux performances pour obtenir de telles modifications de σ_p .



Il découle de la remarque précédente que, lorsque l'on aboutit, dans le préordre Z ou Z' , à l'indifférence plutôt qu'à l'incomparabilité (ou vice-versa) de deux actions a et b , cela ne doit rien au fait qu'elles sont indifférentes plutôt qu'incomparables (ou vice-versa) dans le système de préférences floues. Rappelons en effet (cf. fin du 5.3.2.1 b)) que l'indifférence est caractérisée par $\sigma_p(b, a) = \sigma_p(a, b) = 0$ alors que l'incomparabilité est caractérisée par $\sigma_p(b, a) \neq \sigma_p(a, b) = 1/2$. L'addition d'une constante $\varepsilon = 1/2$ le long du circuit (b, a, b) correspond au passage de l'indifférence à l'incomparabilité dans le système de préférences floues et cela ne modifie en rien la manière dont a et b se comparent dans Z_1, Z_2, Z et Z' .

c) Commentaires pratiques

Soulignons en premier lieu la simplicité des procédures d'exploitation de PROMETHEE I et de PROMETHEE II. Le

¹ Voir Bouyssou (1992) et Bouyssou et Perny (1992).

praticien qui utilise l'une quelconque de ces méthodes peut aisément suivre la séquence de calcul qui aboutit au préordre final. Signalons en second lieu que les auteurs ont développé des logiciels particulièrement conviviaux : PROMCALC¹ rend particulièrement aisée une analyse de sensibilité aux valeurs des coefficients k_j et GAIA² fournit une représentation géométrique des actions et des critères sur la base d'une analyse en composantes principales.

Précisons que l'analyse de sensibilité dont il vient d'être question ne doit être ni confondue avec, ni substituée à, ce que nous avons appelé une analyse de robustesse (cf. 5.4.4). L'homme d'étude doit en effet, dans cette problématique comme dans les autres, chercher à savoir dans quelle mesure les conclusions (ici le préordre ou la tête de ce préordre) demeurent robustes face à des variations concomitantes et raisonnables des paramètres dont la valeur est mal déterminée. Il s'agit ici non seulement des coefficients k_j mais aussi des seuils q_j et p_j , voire de certaines performances.

Cette analyse de robustesse est d'autant plus nécessaire que tout écart, même faible, entre deux valeurs de ϕ^+ , ϕ^- ou ϕ est regardé comme significatif (aucun seuil n'étant ici pris en considération, cf. 6.4.1 a)). C'est dire que Z , comme Z' , peuvent être facilement perturbés par de petites variations de σ_p ; pour s'en convaincre, le lecteur peut analyser ce qui se passe dans le cas de la figure 6.4.4 lorsqu'on affecte, aux divers surclassements, des valeurs de σ_p légèrement différentes et voisines de 1.

6.4.2 ELECTRE II

La procédure d'exploitation d'ELECTRE II a été historiquement (cf. Roy et Bertier (1971 et 1973)) la première à aborder la problématique du rangement à partir d'un système de préférences "floues" de type (S, R) . Elle fut aussi la première à déterminer le

¹ Cf. Mareschal (1988).

² Cf. Mareschal et Brans (1988).

préordre partiel final comme intersection de deux préordres complets conçus selon deux variantes du même principe : l'une tendant à "tirer les actions flottantes (c'est-à-dire dont la place dans le classement est, a priori, mal déterminée du fait des incomparabilités) vers le haut", l'autre tendant à "tirer ces mêmes actions flottantes vers le bas" du classement. Certes, le système de préférences floues est réduit, dans ELECTRE II, à deux relations de surclassement emboîtées $S^1 \subset S^2$ (cf. 5.3.1 a1)). Ulérieurement, ELECTRE III, ELECTRE IV ou PROMETHEE ont davantage nuancé la crédibilité du surclassement et utilisé des principes de classement quelque peu différents.

a) Présentation

La procédure de rangement d'ELECTRE II comporte quatre étapes conduisant successivement à définir :

- une relation de préférence sans circuits relative à un ensemble A_σ ayant pour élément des classes d'actions jugées ex aequo ;
- un préordre complet Z_1 ;
- un préordre complet Z_2 ;
- le préordre partiel final Z .

Première étape : Détermination de (A_σ, \succ_σ)

On ne fait intervenir ici que le surclassement le plus crédible S^1 ; soit A_σ la partition de A définie par les circuits maximaux de S^1 . Si cette relation est sans circuits, $A_\sigma = A$. Sinon, pour obtenir A_σ , il suffit d'appliquer à (A, S^1) la première étape de la procédure d'exploitation d'ELECTRE I (cf. 6.2.1 a)). Lorsqu'une classe de A_σ n'est pas réduite à une seule action, celles qu'elle renferme ne seront plus différenciées dans la suite et regardées comme obligatoirement ex aequo.

Afin de comparer les classes de A_σ , on déduit, de S^1 , la relation de préférence \succ_σ^1 selon la même règle que celle qui, dans ELECTRE I, fait passer de S à \succ_σ (cf. 6.2.1 a) deuxième étape, (t.6.2.1)).

Deuxième étape : Détermination de Z_1

La relation \succ_σ^1 est sans circuits. Le sous-ensemble B^1 des éléments de A_σ tel que "aucun autre ne leur est préféré" selon \succ_σ^1 n'est, par conséquent, jamais vide. Si l'on retire de A_σ tous les éléments de B^1 , on peut déterminer¹ le sous-ensemble B^2 des éléments restants tels que "aucun autre ne leur est préféré" dans $A_\sigma \setminus B^1$ (selon \succ_σ^1). En itérant ce procédé, il est aisé de construire la partition de A_σ : $\{B^1, B^2, \dots\}$.

On définit, sur ces bases, ce que nous appellerons une **version grossière** du préordre complet Z_1 en plaçant en tête et en position ex aequo toutes les classes de B^1 , ensuite (c'est-à-dire en seconde position) celles de B^2 et ainsi de suite. Pour achever de définir Z_1 , on examine s'il est possible d'affiner ce préordre sur la base de la relation S^2 . Cet **affinement** consiste à utiliser l'information qu'apporte ce surclassement moins crédible pour départager les diverses classes d'un sous-ensemble B^i chaque fois qu'il en contient plusieurs (celles-ci étant nécessairement incomparables selon S^1). Cet affinement de la version grossière de Z_1 est obtenu en utilisant S^2 pour définir, sur B^i , un préordre complet qui prend place entre B^{i-1} et B^{i+1} .

C'est en utilisant sur (B^1, S^2) la procédure qui, appliquée à (A, S^1) , a permis de définir la version grossière du préordre Z^1 sur A que l'on définit le préordre sur B^1 . Il s'agit par conséquent, en premier lieu, de mettre en évidence les éventuels circuits maximaux de B^1 selon S^2 et de définir la relation de préférence \succ_σ^{21} sur la base de cette dernière relation et conformément à la procédure décrite en début de la présente deuxième étape, on détermine, en second lieu, le préordre complet sur B^1 (il y a réellement affinement dès l'instant où $\succ_\sigma^{21} \neq \emptyset$). La version définitive du préordre complet Z_1 est ainsi obtenue après avoir traité de la sorte chacun des sous-ensembles B^i non réduits à une classe de A_σ .

Troisième étape : Détermination de Z_2

Cette étape consiste à répéter la précédente avec les deux modifications ci-après :

¹ Notons que $B^1 \neq A_\sigma$ implique $B^2 \neq \emptyset$.

— remplacer la propriété "aucun autre ne leur est préféré" par "ils ne sont préférés à aucun autre"; soit (B^1 , B^2 , ...) la partition ainsi obtenue;

— définir la version grossière de Z_2 en plaçant, en queue de classement et en position ex æquo, tous les éléments de B^1 puis, en avant-dernière position, ceux de B^2 et ainsi de suite.

Quatrième étape : Détermination de Z

$Z = Z_1 \cap Z_2$ est défini par (cf. (r.6.4.4)) :

$b \ Z \ a \Leftrightarrow [b \ Z_1, a \text{ et } b \ Z_2 \ a]$.

Les aspects essentiels de cette procédure sont illustrés dans le cadre des commentaires théoriques qui suivent.

b) Commentaires théoriques

Faisons tout d'abord observer que S^2 ne joue qu'un rôle très local : cette relation (la moins crédible des deux) sert, tout au plus, à "inter-classer" certains groupes d'éléments incomparables selon S^1 et placés en position ex æquo dans la version grossière de Z_1 ou de Z_2 . Le principe de cet inter-classement étant le même que celui qui, à partir de S^1 , conduit précisément à cette version grossière de Z_1 ou de Z_2 , nous n'insisterons pas davantage sur la manière dont S^2 intervient dans la procédure.

Comme dans ELECTRE I, les actions qui forment un circuit selon S^1 sont regardées comme des actions ex æquo dans le préordre Z d'ELECTRE II. L'indifférence qui découle de l'acceptation conjointe de $b \ S^1 \ a$ et $a \ S^1 \ b$ est ici tout spécialement justifiée en raison de la forme particulière donnée à la condition de concordance complétée par la condition de non veto (cf. 5.3.1 a1)). Les circuits plus longs, même lorsqu'ils ne correspondent pas à une clique de S^1 , sont traités comme s'ils étaient formés d'actions toutes deux à deux indifférentes. C'est là un premier aspect critiquable de la procédure, surtout lorsqu'on l'applique à une famille F comportant des pseudo-critères (cf. 5.3.1 a2)). Il peut conduire à placer, dans Z , un grand nombre d'actions en position ex æquo. Ce phénomène peut être illustré par les données du tableau 6.4.1 : en l'absence de veto et quel que soit s^1 , la relation S^1 fait, des quatre actions a, b, c , et d , une clique à laquelle viennent s'ajouter les surclassements suivants :

$a \ S^1 \ e, e \ S^1 \ b, e \ S^1 \ c, e \ S^1 \ d$.

Les cinq actions sont donc classées ex æquo dans Z .

La façon dont ELECTRE II traite les circuits a cependant un mérite, au moins en ce qui concerne ceux de longueur 2. Des lors que deux actions sont indifférentes selon le surclassement le plus fortement crédible, elles sont obligatoirement placées en position ex æquo dans Z (cel n'est pas le cas avec PROMETHEE).

Les actions qui sont placées en tête de la version grossière de Z_1 , autrement dit celles constituant les classes de B^1 , ne sont autres que les actions S^1 -efficaces¹ (cf. 6.1.2 a)). Cette propriété explique que ces actions soient regardées comme étant candidates aux premières places et départagées selon le même principe sur la base de S^2 . A la suite des actions de B^1 , la procédure place celles qui sont S^1 -efficaces dans $A \setminus B^1$ après les avoir à nouveau départagées sur la base de S^2 et ainsi de suite. Abstraction faite de la manière de traiter les circuits, autrement dit en l'absence de tout circuit, le préordre Z_1 trouve sa légitimité dans la hiérarchie d'actions S^1 - S^2 -efficaces mises progressivement en évidence par la procédure. Il peut paraître tout aussi légitime de procéder à l'envers : les actions ne surclassant strictement aucune autre action de A selon S^1 étant candidates aux dernières places (avec départage selon S^2) et ainsi de suite en remontant vers la tête de classement.

Les actions flottantes du type de celles notées b et c sur la figure 6.4.4 sont traitées de façon antagoniste, par rapport aux actions a_1, a_2, \dots, a_p , selon que la hiérarchie est établie en allant de la tête vers la queue (préordre Z_1) ou de la queue vers la tête (préordre Z_2). Il s'ensuit que des actions telles que b et c se comparent difficilement aux actions a_2, a_{p-1} dans Z (cf. figure 6.4.4). Ceci a le mérite de mettre en évidence le fait que l'information contenue dans la relation de surclassement considérée est insuffisante pour déterminer avec précision la place de ces actions flottantes. Rappelons que les raisons qui justifient la définition du préordre partiel final Z comme intersection des préordres complets Z_1 et Z_2 ont déjà été présentées au 6.4.1 b).

L'exemple de la figure 6.4.4 met en évidence le fait (facile à établir en toute rigueur) que, dans la version grossière de Z_1 , la place d'une action quelconque a est complètement déterminée par la longueur du plus long chemin de S^1 dont a est l'aboutissement ; dans la version grossière de Z_2 , la place de a est de même complètement déterminée par la longueur du plus long chemin dans S^1 dont a est l'origine. Ces résultats mettent en évidence un second point critiquable de cette procédure de classement. Soit en effet $a_1, a_2, \dots, a_{p-1}, a_p$ un plus long chemin dont a_1 soit l'origine, a_p l'aboutissement et tel que les seuls surclassements entre les actions qu'il comporte soient ceux qui forment le chemin (cf. figure 6.4.4). Le fait de placer a_1 avant a_p dans Z_1 aussi bien que

¹ Afin de mieux faire comprendre ce qui est essentiel, nous supposons ici implicitement S^1 sans circuits, ce qui permet d'écrire S^1 là où il faudrait écrire \succ_{σ^1} . Nous ferons ci-après de même avec S^2 .

dans Z_2 ne repose sur aucune information directement explicitée par S^1 : c'est l'extrapolation implicite du surclassement par fermeture transitive le long du chemin qui sous-tend le raisonnement. On peut en déduire que la fermeture transitive (cf. 6.1.4) de \succ^1 est nécessairement incluse dans Z (l'inclusion étant généralement stricte, même en faisant abstraction de S^2). Une telle extrapolation implicite n'existant pas dans les procédures d'exploitation de PROMETHEE I et II, cela explique que ces dernières aboutissent, à propos de la relation nette de la figure 6.4.4, à un préordre final très différent de celui d'ELECTRE II.

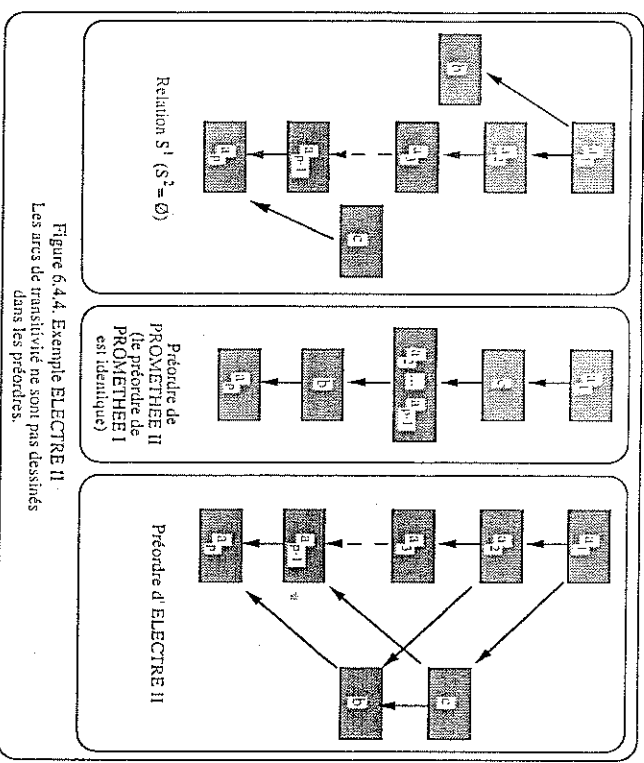


Figure 6.4.4. Exemple ELECTRE II. Les arcs de transitivité ne sont pas dessinés dans les préordres.

Le lecteur vérifiera sans peine que le passage de S^1 à sa fermeture transitive \hat{S}^1 laisse invariante la partition en circuits maximaux de même que la longueur des plus longs chemins de \succ^1 . D'après ce qui précède, le résultat auquel conduit ELECTRE II n'est donc pas modifié lorsqu'on substitue \hat{S}^1 à S^1 et/ou \hat{S}^2 à S^2 .

c) Commentaires pratiques

La procédure de classement d'ELECTRE II, derrière l'apparente complexité de la présentation rigoureuse qui en est faite au a), repose, comme on l'a montré au b), sur un principe très simple. Pour le praticien qui utilise cette procédure, il est de ce fait facile (tout comme avec PROMETHEE) de suivre et de comprendre le déroulement des calculs. Soulignons que la PAMC d'ELECTRE II est assez peu discriminante puisqu'elle conduit à ne distinguer que deux niveaux de crédibilité. Rien n'interdit d'en ajouter d'autres. La procédure de classement se généralise alors de façon évidente.

Avec ELECTRE II comme avec les autres procédures de rangement, une analyse de robustesse est normalement nécessaire. Les paramètres dont la valeur est mal déterminée, qui conditionnent par conséquent cette analyse de robustesse, sont d'une part ceux déjà mentionnés à propos de PROMETHEE (cf. 6.4.1 c)) et, d'autre part, les niveaux de concordance s^1 et s^2 . Rappelons enfin que les relations de surclassement S^1 et S^2 peuvent prendre en compte des seuils d'indifférence et/ou de préférence constants ou variables (cf. 5.3.1 a2)).

6.4.3 ELECTRE III (cf. Roy (1978))

ELECTRE III a été conçue avec le souci d'exploiter, de façon plus significative que ne le fait ELECTRE II, les informations contenues dans un tableau de performances faisant intervenir des pseudo-critères (et cela toujours dans le cadre d'une problématique du rangement). La procédure de classement s'applique ici à un système de préférences floues non limité, comme dans ELECTRE II, à deux niveaux de crédibilité. Ce système de préférences est de type (S, R) et non de type (P, ~) comme dans PROMETHEE.

Dans ELECTRE III, comme dans ELECTRE II, le préordre partiel final Z est obtenu comme intersection de deux préordres complets. Comme auparavant, ceux-ci sont notés Z_1 et Z_2 et conçus selon deux variantes d'un même principe, l'une et l'autre agissant de façon antagoniste sur les actions flottantes.

a) Présentation

1°) Schéma d'ensemble

Le préordre complet Z_1 est caractérisé par une partition de A en r classes notées \overline{C}_h ordonnées de $h = 1$ (classe de tête) à $h = r$ (classe de queue). Par définition, les actions d'une classe \overline{C}_h sont regardées comme ex aequo selon Z_1 . Le préordre complet Z_2 est de même caractérisé par une partition de A en p classes notées \underline{C}_h ordonnées de $h = p$ (classe de tête) à $h = 1$ (classe de queue).

Chacune de ces classes est obtenue comme **distillat final** d'une **distillation**. Chaque distillation consiste, une fois défini un ensemble initial $D_0 \subset A$, à construire une suite de sous-ensembles D_k appelés distillats, chacun étant inclus dans le précédent. La procédure permettant de passer de D_k à D_{k+1} est décrite au 4°) ci-après. Les règles d'arrêt de chaque distillation et, par conséquent, les conditions d'obtention d'un distillat final sont précisées au 5°).

Pour obtenir Z_1 , on prend, comme point de départ de la première distillation, $D_0 = A$; celle-ci conduit au premier distillat final \overline{C}_1 . Pour initialiser la distillation de rang $h+1$, laquelle fait suite à celle ayant abouti à \overline{C}_h , on pose $D_0 = A \setminus (\overline{C}_1 \cup \dots \cup \overline{C}_h)$. Les conditions qui permettent d'initialiser chaque distillation sont précisées au 3°) ci-après. Les classes ainsi obtenues sont telles que les actions de \overline{C}_h sont, au sens de Z_1 , préférables à celles de \overline{C}_{h+1} ; pour cette raison, les distillations qui aboutissent à ces classes seront qualifiées de **descendantes**.

L'obtention des classes de Z_2 procède de règles presque en tous points identiques : la première distillation est initialisée en posant $D_0 = A$ et l'enchaînement des distillations s'effectue encore en posant $D_0 = A \setminus (\underline{C}_1 \cup \dots \cup \underline{C}_h)$ mais le distillat final \underline{C}_{h+1} qui en découle renferme des actions qui, selon Z_2 , sont préférables à celles de \underline{C}_h . Pour cette raison, les distillations servant à produire Z_2 seront qualifiées d'**ascendantes**. Le seul point qui différencie distillations ascendante et descendante est indiqué au 4°) ci-après.

L'une et l'autre de ces deux chaînes de distillations font intervenir trois concepts-clés définis ci-après :

- le seuil de discrimination $s(\lambda)$ de l'indice de crédibilité $\lambda = \sigma_S(b, a)$ caractérisant la crédibilité de l'affirmation b S a ;
- la λ -qualification d'une action sur laquelle reposent les sélections successives aboutissant aux distillats finals ;
- les paliers de séparation servant à définir les λ -coupes successives de la relation floue (cf. passage introductif du 5.3.2) qui structurent le processus de distillation.

2°) Définitions et notations

Comme nous l'avons déjà fait remarquer, il est impossible de prétendre que l'indice de crédibilité d'ELECTRE III (de même que de celui de PROMETHEE) est rigoureusement conforme à l'exigence 3 énoncée dans le passage introductif du 5.3.2. Il est par exemple difficile de conclure qu'un surclassement b S a est indubitablement plus solidement argumenté qu'un surclassement d S c du seul fait que $\sigma_S(b, a) = 0,97$ alors que $\sigma_S(d, c) = 0,91$. L'indice $\sigma_S(b, a)$ doit en fait être regardé comme un critère servant à apprécier la plus ou moins grande crédibilité de l'affirmation b S a. Ici, plus encore que dans bien d'autres cas, seul l'ordre de grandeur est porteur de signification. C'est dire que le pouvoir discriminant de ce critère n'est pas absolu et qu'il convient de repérer, par un seuil non nul, l'écart maximum qui peut exister entre $\sigma_S(b, a) = \lambda$ et $\sigma_S(d, c)$ sans que l'affirmation b S a puisse, de façon indéniable, être jugée plus solidement établie que l'affirmation d S c. Ce seuil est noté $s(\lambda)$ avec $\lambda = \sigma_S(b, a)$ et sera appelé **seuil de discrimination de l'indice de crédibilité**.

Ce seuil, s'il n'est pas choisi constant, doit être tel que $\lambda - s(\lambda)$ soit une fonction monotone non décroissante de λ . La valeur qu'il convient d'attribuer à ce seuil ne peut, en aucun cas (mais il en va de même pour beaucoup d'autres seuils), découler de

¹ Cf. MMCCAD, 9.3 ; attirons l'attention sur le fait que $s(\lambda)$ désigne un seuil inverse.

l'observation. On est ici en présence d'un "paramètre technique" dont il faut "raisonner" la valeur afin qu'elle soit adaptée au rôle qui lui est dévolu. Sur la base de (r.5.3.12), on peut ainsi estimer qu'un surclassement d'indice de crédibilité 0,99 peut être regardé comme plus solidement établi qu'un autre d'indice 0,80 mais peut-être pas qu'un troisième d'indice 0,85. Pour les petites valeurs de λ , la valeur du seuil semble devoir être plus élevée, tout surclassement de crédibilité égal ou inférieur à 0,25 pouvant n'être pas jugé mieux fondé qu'un surclassement de crédibilité nul mais un surclassement de crédibilité 0,30 pouvant peut-être l'être. Avec de telles hypothèses et en procédant par interpolation linéaire, on est amené à poser :

$$s(\lambda) = 0,30 - 0,15 \lambda. \quad (r.6.4.7)$$

Considérons $D \subset A$ et $0 \leq \lambda \leq 1$. Définissons sur D la relation de λ -préférence, \succ_D^λ , en posant, $\forall a, b \in D$:

$$a \succ_D^\lambda b \Leftrightarrow [\sigma_s(a, b) - s(\sigma_s(a, b))] > \sigma_s(b, a)] \text{ et } [\sigma_s(a, b) > \lambda]. \quad (r.6.4.8)$$

Par définition :

- la λ -puissance de a dans D , notée p_D^λ , est le nombre d'actions de D auxquelles a est λ -préférée ;
- la λ -faiblesse de a dans D , notée f_D^λ , est le nombre d'actions de D qui sont λ -préférées à a ;
- la λ -qualification de a dans D est la quantité : $q_D^\lambda = p_D^\lambda - f_D^\lambda$. (r.6.4.9)

Associations enfin, à chaque couple (λ, D) , une valeur de l'indice de crédibilité appelé palier de séparation de D pour la valeur λ , notée $\Delta(\lambda, D)$, définie par :

$$\Delta(\lambda, D) = \begin{cases} 0 \text{ si } \sigma_s(a, b) \geq \lambda - s(\lambda), \forall a, b \in D \\ \max_{(a,b) \in A} \sigma_s(a, b) \text{ sinon} \end{cases} \quad (r.6.4.10)$$

avec $\Delta = ((a, b) \in D \times D : \sigma_s(a, b) < \lambda - s(\lambda))$

3°) Initialisation d'une distillation de rang h

Considérons tout d'abord le cas d'une distillation descendante. Dire qu'elle

est de rang h ($h = 1, 2, \dots$), c'est dire que C_1, \dots, C_{h-1} (cf. 1°) ci-dessus) ont été obtenus. On adopte alors :

$$D_0 = A \setminus C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_{h-1}$$

comme point de départ de cette distillation. De façon analogue pour la distillation ascendante de rang h , on pose :

$$D_0 = A \setminus C_1 \cup \dots \cup C_{h-1}.$$

A l'ensemble D_0 , on associe, dans tous les cas, une valeur initiale du palier de séparation défini par :

$$\lambda_0 = \max_{a,b \in D_0} \sigma_s(a, b).$$

4°) Passage du distillat D_k au distillat D_{k+1}

Soit D_k le dernier distillat obtenu et λ_k le palier de séparation associé. Après avoir vérifié qu'aucune des conditions d'arrêt du 5°) ci-après n'est remplie, déterminer le palier de séparation suivant :

$$\lambda_{k+1} = \Delta(\lambda_k, D_k) \text{ (cf. (r.6.4.10))}$$

et calculer la λ_{k+1} -qualification de chacune des actions de D_k . Le distillat D_{k+1} est le sous-ensemble de D_k formé de toutes les actions dont la qualification ainsi calculée est :

- maximum dans le cas d'une distillation descendante ;
- minimum dans le cas d'une distillation ascendante.

5°) Conditions d'arrêt

Une distillation ascendante ou descendante s'achève dès que :

$$\lambda_k = 0 \text{ ou } \text{card}(D_k) = 1.$$

Le distillat final est D_k . Si la distillation est de rang h , on pose alors :

- $D_k = C_h$ dans le cas descendant ;
- $D_k = \bar{C}_h$ dans le cas ascendant.

Dans les deux cas, la chaîne de distillation s'achève lorsque l'initialisation de la distillation suivante (cf. 3°)) conduit à poser $D_0 = \emptyset$.

b) Commentaires théoriques

Commençons, ici encore, par expliquer pourquoi le préordre Z (éventuellement complété par Z_1 et Z_2) obtenu par ELECTRE III peut être regardé comme l'instrument d'aide à la décision recherché dans le cadre d'une problématique de rangement une fois accepté le modèle de préférences que constitue $\sigma_S(a, b)$ (cf. (r.5.4.12)).

Pour cela, analysons tout d'abord ce que signifie la λ -préférence (cf. (r.6.4.8)). L'inégalité :

$$\sigma_S(a, b) - s[\sigma_S(a, b)] > \sigma_S(b, a)$$

reflète une différence significative entre la crédibilité de a S b et celle de b S a. Dans ces conditions, la relation a S b peut être interprétée comme une préférence et être remplacée par a > b avec une crédibilité inchangée¹. De la relation de préférence floue ainsi définie, on déduit la relation de λ -préférence (qui est une relation nette asymétrique) grâce à la seconde condition de (r.6.4.8) : $\sigma_S(a, b) > \lambda$. La λ -préférence correspond donc à une préférence jugée d'autant plus crédible que λ est plus élevé.

Mettons maintenant en évidence les deux principes au travers desquels ELECTRE III puise sa légitimité.

Principe n° 1

Dans le préordre complet Z_1 , la classe de tête C_1 est formée des meilleures actions de A exactement comme la classe suivante C_2 est formée des meilleures actions de $A \setminus C_1$, C_3 des meilleures actions de $A \setminus (C_1 \cup C_2)$, etc. ; de même, dans Z_2 , la classe de queue C_1 est formée des pires actions de A exactement comme la classe suivante C_2 est formée des pires actions de $A \setminus C_1$, C_3 des pires actions de $A \setminus (C_1 \cup C_2)$, etc.

¹ Une variante consisterait à regarder a S b comme plus crédible que a > b et à adopter, comme crédibilité de cette dernière affirmation, $\sigma_S(a, b) - \sigma_S(b, a)$.

Principe n° 2

Dans un ensemble D sur lequel une relation de λ -préférence a été définie, une action a mérite¹ d'autant plus d'être classée en tête (resp. en queue) que sa λ -puissance est plus grande (resp. plus petite) et sa λ -faiblesse plus petite (resp. plus grande). Afin de faire intervenir conjointement et dans le sens approprié ces deux indicateurs, ELECTRE III ne prend en compte que leurs différences (concept de λ -qualification², cf. (r.6.4.10)).

La procédure consiste, pour l'obtention de Z_1 , à exploiter ces deux principes comme suit : au départ, on prend appui sur une relation nette de λ_1 -préférence qui ne valide la préférence que pour des valeurs du degré de crédibilité voisines de sa valeur maximum. Par définition, le premier distillat D_1 est formé des actions de λ_1 -qualification maximum dans A. D'après le principe n° 2, ces actions apparaissent comme étant les meilleures candidates pour constituer la classe de tête de Z_1 . Si $\text{card}(D_1) = 1$, on pose $D_1 = C_1$ mais si $\text{card}(D_1) > 1$, on procède à une comparaison de ces actions entre elles sur la base d'une relation de λ_2 -préférence définie pour $\lambda_2 > \lambda_1$. Grâce à cette comparaison, on cherche à savoir si, toujours selon le principe n° 2, certaines des actions de D_1 n'apparaissent pas comme mieux désignées que d'autres pour occuper la première place dans Z_1 . Ces actions ne sont autres que celles dont la λ_2 -qualification dans D_1 est maximum. Ces dernières forment le nouveau distillat D_2 . Cette procédure est itérée aussi longtemps que le distillat obtenu comporte plus d'un élément et qu'il est possible de faire intervenir des λ -préférences moins crédibles pour différencier les candidats ex aequo. Une fois obtenue la classe de tête C_1 , elle est retirée de A et, d'après le

¹ Voir à ce sujet, au début du 6.4.1 b), les considérations relatives à $\phi^*(a)$ et $\phi^*(a)$ dans le cas d'une relation nette.

² Bien que ce concept ne soit pas sans liens avec celui de flux nets intervenant dans PROMETHEE II (cf. 6.4.1 a)), soulignons, entre autres différences, le fait qu'il intervient ici aussi bien dans la construction de Z_1 que dans celle de Z_2 qui ne reposent pas séparément l'un sur la λ -puissance, l'autre sur la λ -faiblesse.

principe n° 1, C_2 s'obtient en appliquant la même procédure à l'ensemble résiduel $A \setminus C_1$.

Le préordre complet Z_2 s'obtient avec la même procédure après avoir remplacé maximum par minimum. Les relations Z_1 et Z_2 étant fondées sur les mêmes principes appliqués de façon duale, il est légitime (cf. 6.4.1 b)) d'en retenir la partie commune : $Z = Z_1 \cap Z_2$.

Dans chacune des distillations, l'obtention des valeurs discriminantes de λ qui forment la suite décroissante $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ repose sur le concept de palier de séparation et sur l'utilisation de la formule (r.6.4.10). Celle-ci est conçue de façon à prendre en compte, sur chacun des sous-ensembles D considérés, la séquence de valeurs effectivement prises par le degré de crédibilité. Il est ainsi possible d'adapter pas à pas la baisse des paliers (chacun servant à définir une relation nette de plus en plus fragile pour départager des candidats à une même place qui, jusque là, étaient ex æquo) aux particularités de la distribution des valeurs de l'indice de crédibilité propre à chacun des sous-ensemble successifs considérés. Quelles que soient ces distributions, le nombre des paliers (et, par conséquent, celui des distillats dans une distillation) ne peut dépasser cinq si l'on utilise (r.6.4.7). Ce nombre est généralement bien inférieur car les valeurs effectivement prises par le degré de crédibilité sur un sous-ensemble D ne sont pas uniformément réparties sur l'intervalle $[0; 1]$: des intervalles parfois assez grands peuvent ne contenir aucune valeur effective. Cette particularité est exploitée par (r.6.4.10).

Les commentaires qui précèdent n'apportent pas davantage une véritable assise théorique à la procédure d'exploitation d'ELECTRE III que ceux du début du 6.4.1 b) et 6.4.2 b) ne le font vis-à-vis des procédures d'exploitation de PROMETHEE et d'ELECTRE II. Néanmoins, ils mettent en évidence les principes et modalités qui en sous-tendent le fonctionnement. Nous terminerons ce paragraphe en soulignant quelques points par lesquels cette troisième procédure diffère des deux précédentes tout en faisant ressortir certains de ses avantages et inconvénients.

Une différence essentielle entre PROMETHEE et ELECTRE III provient de ce que, dans cette dernière méthode, les indices de crédibilité ne sont, à aucun moment, additionnés entre eux ni même soustraits (comme il est suggéré dans la variante proposée ci-dessus en note de bas de page). Les valeurs de crédibilité sont seulement comparées les unes aux autres conformément à leur signification ordinaire. Le rangement repose uniquement sur des dénombrements d'actions jugées préférées ou préférables à une action donnée et cela en abaissant progressivement la valeur de la crédibilité de façon à séparer des actions qui, autrement, ne le seraient pas. Cette façon de faire, appliquée aux données des tableaux 6.4.1 et 6.4.2, ne conduit pas pour autant à des résultats systématiquement plus satisfaisants que ceux auxquels conduit PROMETHEE I. Le préordre Z obtenu avec ELECTRE III :

- diffère, dans le premier cas, du préordre Z de la figure 6.4.1 par la disparition d'une seule incomparabilité provenant de l'adjonction d'une flèche allant de e vers la classe (b, c, d), adjonction qui paraît pleinement justifiée au regard des données du tableau 6.4.1 ;

- coïncide, dans le second cas, avec le préordre Z de la figure 6.4.2.

Dans ELECTRE III, contrairement à ce qui se passe dans PROMETHEE, le fait de faire varier d'une même constante les valeurs de l'indice de crédibilité relativement à chacun des couples d'actions consécutives formant un circuit ne laisse pas nécessairement invariantes les positions relatives de ces classes dans Z_1 et dans Z_2 . Cela ne suffit pas à garantir, dans la version classique d'ELECTRE III, une différenciation satisfaisante entre le traitement de l'indifférence et de l'incomparabilité comme il est facile de le constater à partir des données du tableau 6.4.3. Il serait souhaitable d'aboutir à un préordre partiel plaçant a et b ex æquo en tête, suivies de c et d incomparables, ces deux dernières actions étant préférées à e et f ex æquo. Au lieu de cela, ELECTRE III, comme PROMETHEE I et II, font en plus apparaître c et d comme étant ex æquo.

Mentionnons ici une variante d'ELECTRE III qui assure une meilleure différenciation entre indifférence et incomparabilité que ne le fait la version classique présentée au a) ci-dessus. Dans cette variante, les classes C_n et G_n ne sont pas nécessairement des classes d'actions toutes ex æquo. Elles peuvent être partitionnées en sous-classes d'actions ex æquo, ces sous-classes étant incomparables entre elles. Rien n'est pour autant changé dans la manière dont les actions d'une classe ainsi partitionnée se comparent aux actions des autres classes. Autrement dit, Z_n , comme Z_2 , sont encore des préordres complets sur l'ensemble des classes qu'ils comportent mais ils ne définissent plus nécessairement des préordres complets sur A puisque, dans certaines classes, il peut y avoir des actions incomparables entre elles. Dans cette variante, les classes C_n et G_n sont obtenues exactement comme dans la version classique. La différence provient de ce que, au lieu de considérer automatiquement un distillat final D_n comme une classe d'actions ex æquo, celui-ci est examiné au regard des

valeurs que prend l'indice de crédibilité $\sigma_3(a, b)$, $\forall a, b \in D_2$. L'homme d'étude peut, sur cette base, considérer que seules les actions de certaines sous-classes sont ex æquo entre elles, les sous-classes étant incomparables.

Tableau 6.4.3

Actions \ Critères	E_1	E_2
a	18	19
b	19	18
c	15	5
d	5	15
e	1	2
f	2	1

E_1 et E_2 sont des quasi-critères d'égale importance avec $q_1 = q_2 = 2$.

Appliquée aux données du tableau 6.4.3, cette variante conduit à examiner les trois classes (a, b), (c, d), (e, f) qui forment aussi bien Z_1 que Z_2 . Etant donné que :

— $\sigma_3(a, b) = \sigma_3(b, a) = 1$: la classe (a, b) renferme deux actions ex æquo ; pour la même raison, la classe (e, f) est également formée de deux actions ex æquo ;

— $\sigma_3(c, d) = \sigma_3(d, c) \leq 1/2$ (l'inégalité provenant d'un possible effet de veto) : la classe (c, d) renferme deux actions incomparables.

Dans ce cas, on obtient donc, avec cette variante, le préordre partiel souhaité.

Le seul de discrimination $s(\lambda)$ intervient à deux moments : en premier lieu pour décider si la différence entre $\sigma_3(a, b)$ et $\sigma_3(b, a)$ est ou non significative, en second lieu pour traiter, sans les différencier, des "blocs" de λ -préférence obtenus pour des valeurs voisines de λ . On évite ainsi des discriminations qui reposeraient sur des écarts trop faibles comme cela peut se produire dans PROMETHEE (cf. 6.4.1 c)).

Dans ELECTRE III, on ne retrouve pas de phénomènes d'exploitation implicite de fermetures transitives comme c'est le cas dans ELECTRE II (cf. 6.4.2 b)). Rappelons que ce phénomène consiste à extrapoler, de façon implicite, les surclassements fortement crédibles le long d'un chemin pour

systématiquement positionner l'action qui est à l'origine du chemin avant celle qui en constitue l'aboutissement alors que la comparaison directe de ces deux actions n'apporte aucune information sur leur comparaison. Cela n'empêche pas, dans le cas de la figure 6.4.4, d'obtenir, avec ELECTRE III, un préordre Z qui reproduise le chemin $a_1, a_2, \dots, a_{p-1}, a_p$: Z est en fait constitué par ce chemin, c étant intercalée entre a_1 et a_2 et b entre a_{p-1} et a_p . Il est intéressant de comparer ce résultat d'ELECTRE III avec ceux de PROMETHEE et d'ELECTRE II (cf. figure 6.4.4). On constate que, en dépit de leur caractère relativement flottant, les actions b et c sont positionnées, aussi bien avec PROMETHEE qu'avec ELECTRE III, d'une façon qui fait disparaître toute incomparabilité sans que la justification en apparaisse clairement.

La procédure de sélection d'ELECTRE III consiste, tout comme celle d'ELECTRE II, à itérer une procédure de sélection (différente de celle d'ELECTRE II), laquelle est appliquée jusqu'à épuisement (cf. principe n° 1 ci-dessus) à l'ensemble des actions non encore classées. Cela vaut aussi bien pour la construction de Z_1 que pour celle de Z_2 . En tant qu'instrument d'aide à la décision, cette façon de faire peut présenter un certain intérêt puisque, si l'on retire de A les actions de la classe de tête et si l'on applique la procédure aux actions restantes, celles-ci seront ordonnées exactement comme dans Z_1 par la nouvelle distillation descendante (le même résultat vaut avec Z_2 après retrait de la classe de queue). Précisons que cette propriété ne se retrouve pas dans PROMETHEE.

Le mécanisme de distillation d'ELECTRE III diffère nettement de celui de l'affinement adopté dans ELECTRE II. Appliquée à une relation floue n'ayant que deux valeurs distinctes de l'indice de crédibilité, ELECTRE III se différencie d'ELECTRE II par le fait que la valeur faible de crédibilité n'intervient pas seulement pour départager les ex æquo relatifs à la valeur forte car, une fois C_1 obtenu, si D_1 contient d'autres actions, celles-ci ne sont pas nécessairement rangées dans les classes immédiatement suivantes : C_2 peut ne contenir aucune action de $D_1 \setminus C_1$. On pourrait concevoir une autre version d'ELECTRE III qui n'utiliserait les paliers successifs de séparation que pour affiner un rangement (à la manière d'ELECTRE II) sur l'ensemble des ex æquo du niveau immédiatement supérieur (la sélection restant fondée sur la λ -qualification et non sur une idée d'efficacité comme dans ELECTRE II).

On a montré ci-dessus que la procédure d'exploitation d'ELECTRE III peut apparaître, à certains égards, plus satisfaisante que celles de PROMETHEE ou d'ELECTRE II. Elle possède aussi certains défauts que les autres n'ont pas. Le plus grave a été mis en évidence par Penny (1992) qui a en particulier montré que le rangement par sélection itérative peut engendrer des phénomènes de non monotonie (cf. c) ci-après).

c) Commentaires pratiques

La procédure d'exploitation d'ELECTRE III est plus complexe que celle de PROMETHEE ou d'ELECTRE II. Pourtant, le praticien peut en comprendre aisément le principe en considérant le cas où l'indice de crédibilité ne prend que quelques valeurs bien distinctes telles que 1, 4/5, 1/2, 1/4, 0 (ceci sera clairement mis en évidence avec ELECTRE IV). Malgré cela, il lui sera beaucoup plus difficile de suivre en détail, sur un cas concret, le pas-à-pas des calculs. Le recours à un logiciel est ici absolument nécessaire.

Ici encore, une analyse de robustesse est nécessaire et cela sur les mêmes bases que dans PROMETHEE : si la raison mise en avant au 6.4.1 c) perd ici beaucoup de sa force, une autre raison apparaîtrait. En effet, lorsqu'on fait varier certaines performances, il peut arriver qu'un accroissement de $g_j(a)$ provoque, dans des cas très particuliers, une légère dégradation de la position de l'action a par rapport à d'autres actions (phénomène dit de **non monotonie**). Quelques essais systématiques¹ permettent de penser que ce phénomène malencontreux ne peut s'observer que dans un intervalle de variation assez petit de $g_j(a)$ et qu'il révèle en outre une non robustesse des conclusions sur la manière dont l'action a a été comparée aux actions vis-à-vis desquelles elle s'est déplacée.

6.4.4 ELECTRE IV (cf. Roy et Hugonnard (1982a))

La méthode ELECTRE IV a été conçue afin de pouvoir proposer un préordre partiel sur A dans des conditions en tous points identiques à celles d'ELECTRE III à une seule exception près : elle concerne la présence des coefficients d'importance k_j . Il arrive en effet, dans certains problèmes concrets (cf. chapitre 10), que l'on ne puisse pas, que l'on ne veuille pas ou que l'on ne sache pas attribuer une valeur à ces coefficients. Cela ne signifie pas pour autant que l'on puisse se satisfaire du préordre obtenu en appliquant ELECTRE III avec des coefficients k_j tous

¹ Cf. notamment Gabrel (1990).

égaux. Rechercher un préordre qui rende compte, le mieux possible, de tous ceux obtenus en combinant de toutes les façons les valeurs plausibles de ces coefficients pourrait, théoriquement, apporter la réponse cherchée mais c'est là une voie impraticable. Le système de préférences sur lequel repose ELECTRE IV permet d'obtenir, de façon simple, un préordre sans faire d'hypothèses trop restrictives sur les valeurs¹ des coefficients k_j (cf. dernière partie du 5.3.1.2 b)).

La procédure d'exploitation d'ELECTRE IV s'applique à un système de préférences formé d'une séquence de systèmes relationnels emboîtés de la forme (S^i, R^i) : les surclassements S^i sont au nombre de cinq définis par (r.5.3.5) et (r.5.3.6). La signification de chacune de ces relations est précisée au 5.3.1.2 b). Mentionnons que la procédure peut être appliquée seulement à un sous-ensemble de ces cinq relations.

Dans ELECTRE IV, la relation S^{i+1} (pour $i = 1, 2, 3, 4$) conduit à accepter des surclassements dans des conditions moins crédibles que la relation S^i . Ceci peut être traduit, en restant sur une base purement ordinaire, en associant, à l'affirmation a S^i b, une valeur σ_i de l'indice de crédibilité $\sigma_j(a, b)$. Les valeurs choisies doivent évidemment être telles que $\sigma_i > \sigma_{i+1}$. De plus, le passage d'une affirmation de crédibilité σ_i à une autre de crédibilité σ_{i+1} doit être regardé comme une perte significative. Autrement dit, si $s(\lambda)$ désigne le seuil de discrimination associé à l'indice σ_s , on doit avoir :

$$\sigma_i - s(\sigma_i) > \sigma_{i+1} \text{ pour } i = 1, 2, 3, 4.$$

Sur la base de (r.6.4.7), on peut par exemple poser :

$$\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 0,84, \sigma_3 = 0,65, \sigma_4 = 0,44, \sigma_5 = 0,20. \text{ (r.6.4.11)}$$

¹ Signalons également trois autres méthodes ne faisant pas intervenir de valeurs numériques pour de tels coefficients. Il s'agit de :

- QUALIFLEX (cf. Paolink (1978)) ;
- ORESTE (cf. Roubens (1982)) ;
- MELCHIOR (cf. Leclercq (1984)).

La procédure d'exploitation d'ELECTRE IV n'est autre que celle d'ELECTRE III appliquée aux systèmes de préférences flous qui vient d'être définie. Faisons observer que les préordres Z_1, Z_2 et Z ainsi obtenus seraient les mêmes avec des valeurs des crédibilités σ_i différentes de celles qui figurent dans (r.6.4.11), pourvu que ces valeurs respectent les conditions énoncées ci-dessus¹.

Examinons, pour terminer, le mode de fonctionnement d'ELECTRE IV, autrement dit ce que devient la procédure d'exploitation d'ELECTRE III lorsqu'on l'applique au système flou à cinq niveaux de crédibilité (éventuellement moins) qui vient d'être défini.

La première distillation descendante débute avec le couple (A, S^1) . Pour chaque action, on calcule la quantité $q_A^1(a)$ (λ_{A_1} -qualification de a) définie comme la différence entre le nombre d'actions que a surclasse et le nombre d'actions qui surclassent a. D_1 est l'ensemble des actions qui confèrent à $q_A^1(a)$ sa valeur maximum. Si $\text{card}(D_1) = 1$, la première distillation est achevée ; sinon, elle se poursuit avec le couple (D_1, S^2) qui permet de définir $q_{D_1}^2(a)$ dont la valeur maximum amène à sélectionner D_2 . Cette première distillation se poursuit aussi longtemps que $\text{card}(D_j) > 1$ et s'arrête, de toute façon, avec D_5 . Le distillat final obtenu constitue la première classe C_1 de Z_1 . La seconde distillation débute avec le couple $(\text{AV}C_1, S^1)$.

Ainsi décrite, la procédure peut paraître beaucoup plus simple que dans le cas général d'ELECTRE III. Cela tient essentiellement au fait que les valeurs de l'indice de crédibilité ne sont pas distribuées "n'importe comment" sur l'intervalle $[0 ; 1]$ mais qu'elles sont regroupées en, au plus, six valeurs significativement distinctes. Il s'ensuit que le mécanisme de détermination des paliers de séparation consiste, tout simplement, à passer d'une

¹ Il n'en serait plus ainsi avec la variante d'ELECTRE III suggérée en note de bas de page au début du 6.4.3 b).

valeur à celle immédiatement inférieure et que le calcul de la λ -qualification se trouve, lui aussi, être simplifié.

6.5 COMPLÉMENTS THÉORIQUES

Cette section vise à introduire un certain nombre de concepts et de résultats utiles pour juger de la validité, de la qualité et de la fiabilité de telle ou telle procédure d'exploitation, éventuellement couplée à une PAMC donnée¹. De même qu'au 5.5, nous avons pris ici le parti de la brièveté en cherchant avant tout à donner au lecteur une porte d'entrée dans une littérature récente et technique.

Que l'on s'intéresse à des procédures de sélection, d'affectation ou de classement, deux points de vue non exclusifs peuvent être adoptés pour porter un jugement à leur égard.

Le premier point de vue consiste, comme on l'a fait au 6.1, à énoncer une liste d'exigences ou de propriétés (propres à chaque problématique) que l'on estime "raisonnables" et "naturelles" et d'étudier dans quelle mesure elles sont satisfaites par certaines procédures d'exploitation. A titre d'exemple, on pourra souhaiter confronter des procédures d'exploitation :

- dans une problématique α , à une propriété imposant que, s'il existe une action optimale unique, elle soit toujours retenue par la procédure de sélection ;
- dans une problématique β , à une propriété imposant que l'affectation des actions soit toujours compatible avec la relation de dominance (exigence de monotonie, cf. 6.1.3 b)) ;
- dans une problématique γ , à une propriété imposant que, si la relation de surclassement est un préordre partiel, la procédure de classement doive restituer ce préordre partiel.

¹ Ce dernier élément a parfois une importance considérable. A titre d'exemple, pour une procédure d'exploitation opérant sur la base d'une relation floue, l'analyse de la façon dont cette relation floue a été obtenue peut être importante pour justifier l'utilisation de tel ou tel type d'opérations sur les degrés de crédibilité.

Etant donné une liste de propriétés, on peut alors :

- chercher à dresser un tableau indiquant quelles sont les propriétés vérifiées par telle ou telle procédure d'exploitation ;
- chercher à déterminer des "théorèmes d'impossibilité" indiquant des groupes de propriétés impossibles à satisfaire simultanément ;
- chercher à déterminer des procédures d'exploitation vérifiant le plus grand nombre possible de ces propriétés compte-tenu des "théorèmes d'impossibilité" obtenus.

Ce premier point de vue comporte néanmoins un certain nombre de difficultés qu'il ne faut pas sous-estimer. En particulier, la recherche d'une liste de propriétés "souhaitables" est loin d'être une chose aisée. L'analyse prônée par ce premier point de vue ne peut véritablement porter de fruits que si les propriétés retenues sont toutes pertinentes et couvrent l'ensemble des exigences qu'il semble bon d'imposer à une procédure d'exploitation d'un certain type.

Le second point de vue consiste à caractériser une procédure d'exploitation donnée, c'est-à-dire à dresser une liste de propriétés que cette procédure est la seule à satisfaire. On espère ainsi faire ressortir les traits caractéristiques d'une procédure d'exploitation, traits caractéristiques permettant de la comparer plus aisément à d'autres procédures. Notons cependant qu'une telle démarche ne peut véritablement porter ses fruits que si les propriétés caractéristiques mises à jour sont suffisamment simples et interprétables. Tel n'est pas toujours le cas dès lors que la procédure d'exploitation atteint un certain niveau de complexité.

Les deux types d'analyse que nous venons de présenter sont loin, à ce jour, d'avoir été systématiquement appliqués aux procédures d'exploitation faisant l'objet de ce chapitre. Il y a là un vaste champ de recherche encore largement ouvert. Mentionnons cependant que de telles analyses théoriques ne sauraient, à elles seules, guider le choix d'un homme d'étude vers telle ou telle procédure. D'autres considérations, liées à la simplicité et à la rapidité de la procédure ou à la "presque satisfaction" de

certaines propriétés¹, peuvent aussi contribuer à guider ce choix (cf. 6.1.5).

La suite de cette section est consacrée à la présentation d'un certain nombre de travaux théoriques à propos de procédures d'exploitation. On structurera cette présentation suivant la problématique d'aide à la décision concernée.

a) Procédures de sélection (P, α)

Peu de travaux ont été spécifiquement consacrés aux procédures de sélection. De plus, en-dehors de celles mentionnées au 6.2, peu ont été proposées à ce jour. Nous mentionnons ci-après quelques travaux qui nous semblent pertinents ainsi que quelques voies de recherche qui paraissent prometteuses.

De nombreux auteurs se sont penchés sur l'étude de procédures de sélection à partir de relations floues en adoptant le premier² ou le second³ des points de vue mentionnés précédemment. Ces travaux se heurtent à certaines difficultés comme :

- la définition des propriétés souhaitables d'une procédure de sélection à partir d'une relation floue⁴ ;
- la définition de l'ensemble des relations floues admissibles en entrée de la procédure⁵ ;

¹ On entend par là que telle procédure d'exploitation peut satisfaire à certaines propriétés souhaitables, sauf dans des cas tout-à-fait exceptionnels. Il s'agit là d'un élément d'appréciation qui peut se révéler utile mais qui est souvent difficile à cerner au travers d'une analyse purement théorique.

² Voir par exemple Nurmi et Kaopryk (1991), Orlovski (1978), Kitanik (1990, 1992), Barrett et al. (1990b), Barrett (1987), Dutta et al. (1986), Swialski (1988, 1990), Ovchinnikov et Ozernoy (1988), Montero et Tejada (1987), Roubens (1989), Kim (1983), Jain (1990).

³ Pour une contribution récente, voir Bouyssou (1992c).

⁴ Le lecteur se rendra mieux compte de cette difficulté en essayant de généraliser les propriétés $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ présentées au 6.1.2 c) au cas flou.

⁵ On a vu, au 5.5, qu'une procédure de sélection qui serait couplée avec la PAMC d'ELECTRE III se devrait d'admettre toute relation floue en entrée. Tel ne serait pas le cas avec la PAMC de PROMETHEE pour laquelle certaines

– la définition des opérations algébriques autorisées sur les indices de crédibilité comple-tenu de la façon dont ces indices ont été obtenus¹.

On a vu de plus, au 6.2.1 a), pourquoi, en aide à la décision, il y a un intérêt limité à vouloir fonder une procédure de sélection sur une relation floue.

La théorie du choix social accorde une large place à l'étude des "choix rationnels" à partir de relations binaires nettes ne possédant pas nécessairement des propriétés remarquables de transitivité (comme c'est le cas pour une relation majoritaire). Dans ce cadre, de très nombreuses procédures ont été proposées² qui sont formellement très similaires à des procédures de sélection. A notre connaissance, elles n'ont que rarement été comparées à celles présentées au 6.2.1 a). Mentionnons néanmoins que la plupart de ces procédures ont été conçues :

- pour s'appliquer à des relations complètes ;
- pour assurer une certaine cohérence aux choix lorsque l'ensemble des actions se modifie³.

Elles s'éloignent donc quelque peu de ce que l'on est en droit d'attendre d'une procédure de sélection en aide multicritère à la décision.

b) Procédures d'affectation (P, β)

Les procédures d'affectation n'ont fait l'objet que de rares études. Peu ont été proposées en-dehors de celles présentées au 6.3. La référence principale en ce domaine est Yu (1992). On y trouvera en particulier :

- la proposition et l'analyse d'une procédure "médiane" entre ELECTRE TRI optimiste et pessimiste ;

relations ne peuvent jamais être obtenues.

¹ Voir à ce propos les commentaires faits au 6.4.1 c) sur PROMETHEE.

² Voir par exemple Fishburn (1977a), Schwartz (1972, 1990), Copeland (1951), Moulin (1986), Bordes (1983), Banks (1985), Miller (1977, 1980), Laffond et al. (1991), Dutta (1988, 1990). Pour une vue d'ensemble du problème du "choix rationnel" en théorie économique et du problème connexe de la "rationalisation" d'une fonction de choix, on pourra se reporter à Moulin (1985), Aizerman (1985), Aizerman et Malishevski (1981), Suzumura (1983), Sen (1986).

³ Sur ces problèmes de cohérence et leurs liens avec le problème de la "rationalisation", voir les références de la note de bas de page précédente.

– la proposition et l'analyse d'une procédure, abandonnant l'exigence d'unicité du 6.1.3 b), permettant d'affecter les actions "posant problème"¹ à des catégories "intervalle" regroupant une ou plusieurs des catégories initiales ;

– la généralisation d'ELECTRE TRI au cas où chaque catégorie est délimitée par plusieurs profils de référence et non plus par un seul.

La comparaison des procédures présentées au 6.3 avec celles, plus classiques, issues de la statistique², reste un domaine inexploré. Il en va de même pour ce qui concerne des procédures d'affectation adaptées au cas de profils de référence centraux ou encore de catégories non complètement ordonnées. Il y a là un vaste champ de recherche ouvert.

c) Procédures de rangement (P, γ)

La difficulté qu'il y a à concevoir une "bonne" procédure de rangement (cf. 6.1.4) a suscité de nombreux travaux. Mentionnons, parmi d'autres :

– L'analyse par Vincke (1992), selon le premier des deux points de vue présentés plus haut, des procédures de rangement conduisant à un préordre complet à partir de relations nettes. On trouvera en particulier, dans cet article, une liste de 22 propriétés, l'analyse de 11 procédures vis-à-vis de ces propriétés et l'énoncé de divers théorèmes d'impossibilité. Une telle analyse a été reprise dans le cas de relations floues par Perny (1992, ch. 5). On y trouvera de nombreux exemples montrant les limites des procédures classiques présentées au 6.4.

– L'analyse, selon le second de ces deux points de vue, de certaines procédures de rangement classiques³.

¹ C'est-à-dire les actions ne pouvant être affectées par la seule application de (r.6.1.1) et (r.6.1.3).

² Voir, par exemple, Diday et al. (1982) ou Romeder (1973).

³ Voir par exemple Rubinstein (1980), Henriot (1985) (caractérisation d'une procédure à partir de relations nettes fondée sur la qualification) ; Bouyssou (1992d) (caractérisation d'une procédure à partir de relations valuées fondée sur le flux net, cf. (r.6.4.5) et (r.6.4.6)) ; Bouyssou et Perny (1992) (caractérisation d'une procédure à partir de relations valuées fondée sur les flux sortant et entrant (cf. (r.6.4.1), (r.6.4.3) et (r.6.4.4))) ; Bouyssou (1991), Priot (1991) (caractérisation d'une procédure à partir de relations valuées fondée sur le "minimum en ligne"). On trouvera une vue d'ensemble de ces résultats dans Tsoukias et Vincke (1992).

— Des recherches récentes sur l'obtention du ou des préordres les plus proches d'une relation donnée¹.

L'ensemble de ces travaux permet de mesurer la difficulté qu'il peut y avoir à concevoir de bonnes procédures de rangement². On trouvera dans Perny (1992, ch. 5) des propositions pour bâtir plusieurs procédures qui semblent réaliser un bon compromis entre simplicité et exigences théoriques.

Chapitre 7

APPROCHE DU JUGEMENT LOCAL INTERACTIF

RÉSUMÉ

L'objet de ce chapitre est de présenter un certain nombre de méthodes se rattachant à l'approche opérationnelle du "jugement local interactif avec itérations essais-erreurs". Contrairement aux méthodes présentées aux chapitres 4 et 5, celles-ci ne font pas explicitement usage de PAMC. L'élaboration de la recommandation s'opère dans ces méthodes au cours d'un dialogue entre un interrogé et un interrogateur régi par un protocole d'interaction. Ce dialogue peut s'analyser comme la succession d'étapes de dialogue où l'interrogé réagit à une proposition qui lui est faite et d'étapes de calcul où l'interrogateur tire parti de ces réactions.

Au 7.1, après avoir montré l'originalité de cette approche opérationnelle, on s'interroge sur le sens et la validité du produit final de l'interaction entre l'interrogé et l'interrogateur. On montre que, dans le cadre de cette approche, la convergence des méthodes doit s'analyser non comme une "convergence algorithmique" mais comme une "convergence psychologique". La portée et les limites d'une telle approche sont ensuite analysées.

La section 7.2 propose une structure générale des méthodes interactives. On montre pourquoi elles relèvent pour la plupart d'une problématique de choix (P.α). Un schéma général des méthodes en P.α est ensuite présenté qui nous conduit à analyser en détail le contenu des étapes de dialogue et de calcul. Les concepts présentés sont illustrés par une méthode interactive élémentaire.

La section 7.3 présente en détail quatre méthodes interactives en P.α que nous croyons représentatives de l'ensemble de celles proposées à ce jour : STEM, méthode de Geoffrion-Dyer-Feinberg, méthode du point de mire évolutif et méthode de Vanderpooten. Chacune de ces méthodes est présentée dans un même formalisme comme la succession d'étapes de dialogue et d'étapes de calcul. D'autres méthodes sont ensuite présentées plus brièvement.

La courte section 7.4 est consacrée aux méthodes interactives relevant de la problématique du tri (P.β) et de la problématique du rangement (P.γ). On y

¹ Voir entre autres Barthélémy et al. (1989), Hudry (1989), Barthélémy et Monjardet (1988).

² Ces difficultés, ainsi que leurs liens avec certains aspects de la théorie du choix social, sont abondamment développées et illustrées par Perny (1992).