Les Axiomes de von Neumann et Morgenstern

Soit X un ensemble, que l'on supposera fini par commodité, de conséquences, par exemple un ensemble de gains ou de pertes monétaires possibles. Soit L(X) l'ensemble de toutes les loteries envisageables ayant des lots dans X (y compris les loteries dégénérées donnant une conséquence avec certitude).

Vos préférences sur les loteries de L(X) vérifient les cinq axiomes :

A1 Rangement

Pour tout $L, L' \in L(X)$ l'une au moins des deux propositions suivantes est vraie :

– L est préférée ou indifférente à L' ($L \succcurlyeq L'$)

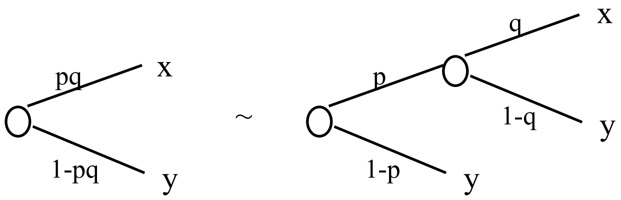
– L' est préférée ou indifférente à L ($L' \succcurlyeq L$).

De plus, $\succcurlyeq$ est transitive :

si $L \succcurlyeq L'$ et $L' \succcurlyeq L''$ alors $L \succcurlyeq L''$ ($\forall\ L, L', L'' \in L(X)$)

(Remarque : on a $L \succ L'$ ssi $L \succcurlyeq L'$ et Non ($L' \succcurlyeq L$) et $L \sim L'$ ssi $L \succcurlyeq L'$ et $L' \sim L$).

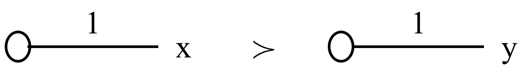
A2 Réduction



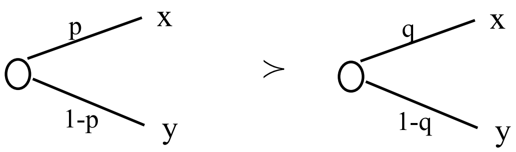
($\forall$ p, q $\in$]0,1[et $\forall$ x, y $\in$ X)

A3 Monotonicité

Si

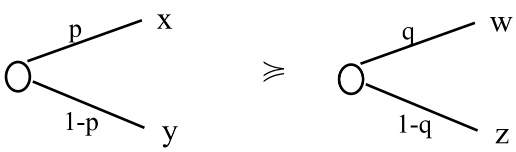


alors

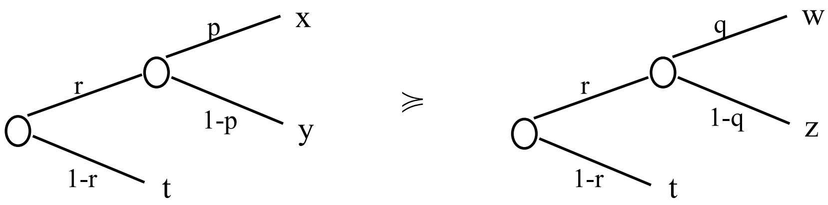


si et seulement si $p > q$. ($\forall$ x, y $\in$ X)

A4 Indépendance (Substituabilité)



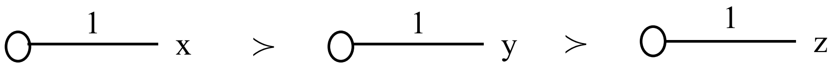
si et seulement si



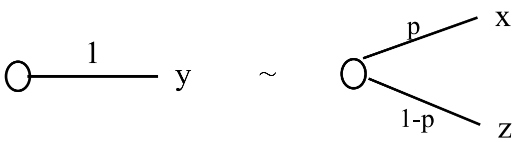
($\forall$ p, q, r $\in$]0,1[et $\forall$ x, y, z, w, t $\in$ X)

A5 Continuité

Si



alors il existe un probabilité p telle que :



($\forall$ x, y, z $\in$ X)

SI ET SEULEMENT SI

il existe une fonction d'utilité U: X $\to \mathbb{R}$ telle que

$$L \succcurlyeq L' \Leftrightarrow \sum_x p_L(x)U(x) \geq \sum_X p_{L'}(x)U(x) \qquad (1)$$

de plus s'il existe une autre fonction V vérifiant (1) alors il existe a, b $\in$ 1 avec a > 0 tels que :

V(x) = aU(x) + b pour tout x $\in$ X.