Goût et Aversion pour le risque

Interessons-nous aux préférences d'un décideur pour des loteries monétaires. On supposera que ce décideur respecte les axiomes A1-A5 de von Neumann Morgenstern et (hypothèse peu restrictive) que sa fonction d'utilité pour la monnaie est strictement croissante.

I- Définition de l'aversion pour le risque

On définit l'équivalent certain d'une loterie L comme la somme d'argent certaine $\hat{x}$ que le décideur juge indifférente à la loterie. On a $\hat{x} \sim L$ et donc $U(\hat{x}) = E[U(L)]$. D'où :

$\hat{x} = U^{-1}(E[U(L)]$.

On pose $\pi = E(L) - \hat{x}$, π est appelée *prime de risque*.

On dira qu'un décideur

– présente de *l'aversion pour le risque* si $\hat{x} < E(L)$
– présente du *goût pour le risque* si $\hat{x} > E(L)$
– est *neutre vis à vis du risque* si $\hat{x} = E(L)$

pour toute loterie L.

Il est facile de montrer que l'aversion (resp. le goût, la neutralité) pour le risque implique la concavité (resp. la convexité, la linéarité) de la fonction U(x). Bien entendu, rien n'empèche qu'un décideur présente de l'aversion pour le risque pour certaines loteries et du goût pour le risque pour d'autres.

II- Définition d'une mesure de l'aversion pour le risque

Soit X le patrimoine du décideur et $\hat{x}$ son équivalent certain pour une loterie L dont on peut supposer qu'elle est d'espérance nulle. On a donc :

$U(X + \hat{x}) = E[U(X+L)]$

ou encore du fait que $E(L) = 0$

$U(X - \pi) = E[U(X+L)]$.

En prenant les développements limités de ces expressions, on a :

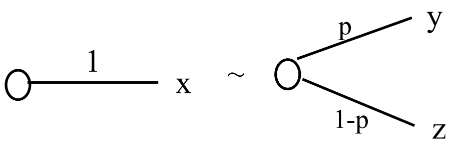
$U(X) - \pi U'(X) + O(\pi^2) = E[U(X) + LU'(X) + 1/2 L^2 U''(X) + O(L^3)]$

On peut donc écrire que $\pi \approx 1/2 \mathrm{Var}(L) r(X)$ où $r(X) = -U''(X)/U'(X)$ est appelé la *mesure locale de l'aversion pour le risque*.

III Cas Particulier Important.

Théorème (Arrow-Pratt) Si le décideur respecte l'axiome

A6 Si



alors

(pout tout $x, y, z, \delta \in 1$ et pour tout $p \in [0 ; 1]$)

Alors sa fonction d'utilité est nécessairement du type

soit $U(x) = -e^{-\tau x}$ si $\tau > 0$ (aversion pour le risque)
soit $U(x) = x$ (neutralité vis-à-vis du risque)
soit $U(x) = e^{-\tau x}$ si $\tau < 0$ (goût pour le risque)

Pour la fonction d'utilité exponentielle on a $r(X) = \tau$. L'axiome A6 implique donc une aversion ou un goût pour le risque indépendant du patrimoine du décideur. Cet axiome est souvent facilement admis en pratique et permet de considérablement simplifier l'encodage de la fonction d'utilité. Il implique en particulier que le prix d'achat maximum de toute loterie est identique à son prix de vente minimal.

Soit L une loterie se présentant sous la forme d'une Loi Normale de moyenne μ et de variance σ^2. Il est facile de montrer (en intégrant astucieusement de façon à faire apparaître l'intégrale d'une Loi Normale que multiplie une constante) que si l'on a une fonction d'utilité exponentielle alors :

$\hat{x} = U^{-1}E[U(L)] = \mu - 1/2\sigma^2\tau$, seul cas avec celui d'une fonction d'utilité quadratique où les préférences ne dépendent que de μ et σ^2. Dans le cas général, ces préférences dépendent de l'intégralité de la distribution de probabilité.

IV- Application : Ne pas mettre tous ses oeufs dans le même panier.

Démontrons donc le théorème « Ne pas mettre tous ses oeufs dans le même panier » dans le cas particulier suivant :

– 2 investissements,
– A suit une Loi Normale de moyenne μ_A et de variance σ_A^2
– B suit une Loi Normale de moyenne μ_B et de variance σ_B^2
– A et B indépendants
– fonction d'utilité exponentielle

Le décideur souhaite maximiser son utilité. Chaque franc investi l'est pour une part α dans A et pour une part $1 - \alpha$ dans B.

D'après nos hypothèses $\alpha A + (1 - \alpha)B$ suit une Loi Normale

– de moyenne $\alpha\mu_A + (1 - \alpha)\mu_B$
– de variance $\alpha^2\sigma_A^2 + (1 - \alpha)^2\sigma_B^2$

L'équivalent certain de $\alpha A + (1 - \alpha)B$ est donc de

$[\alpha\mu_A + (1 - \alpha)\mu_B] - 1/2\tau[\alpha^2\sigma_A^2 + (1 - \alpha)^2\sigma_B^2]$.

Pour trouver le α optimal il suffit alors (on nous fera grâce des conditions du deuxième ordre !) d'annuler la dérivée de cette expression par rapport à α.

On a donc :

$\mu_A - \mu_B - \tau\alpha\sigma_A^2 - \tau\alpha\sigma_B^2 + \tau\sigma_B^2 = 0$.

Par exemple si $\mu_A = \mu_B$ on a $\alpha = \sigma_B^2/(\sigma_A^2 + \sigma_B^2)$ qui est donc toujours différent de 0 ou 1 et de plus indépendant de τ.