Décision dans l'Incertain
Modélisation et Critères classiques

I- Introduction

Comme la Loi (cf. article 2 du Code Civil), la décision ne dispose que pour l'avenir. La prévision étant un art difficile, surtout quant elle concerne l'avenir, il est rare qu'il soit possible de décrire avec certitude les conséquences de la mise à exécution d'une action.

Dans un problème de décision dans l'*incertain* on suppose que les conséquences de mes actions dépendent de l'occurrence de divers événements – on dira par la suite des « états de la Nature » – la Nature étant supposée décider de ce qui n'est pas sous mon contrôle. On supposera la Nature « indolente » : elle ne cherche systématiquement ni à nous avantager ni à vous désavantager (beurrer sa tartine du côté Pile n'implique pas qu'elle tombera du côté Pile en cas de chute). Le nœud d'un tel problème de décision réside dans le fait que l'on doit choisir une action *avant* d'avoir connaissance de la décision de la Nature.

De façon symbolique, la modélisation d'un tel problème implique de définir :

- un ensemble A d'actions. Un élément $a \in A$ représente une action qu'il est possible pour vous de mettre à exécution.
- un ensemble E d'états de la nature. Un élément $e \in E$ représente une décision que peut prendre la Nature et susceptible d'influencer les conséquence de l'exécution de l'une, au moins, des actions de A,
- un ensemble X de conséquences. Un élément $x \in X$ représente la description des conséquences d'une actions $a \in A$. Cette description est dépendante de vos *objectifs*.
- une fonction c associant à chaque couple de A∞E un élément de X. La fonction c est généralement représentée sous la forme d'une matrice de décision du type :

c	e_1	e_2	…	e_i	…	e_n
a_1	$c(a_1, e_1)$	$c(a_1, e_2)$	…	$c(a_1, e_i)$	…	$c(a_1, e_n)$
a_2	$c(a_2, e_1)$	$c(a_2, e_2)$	…	$c(a_2, e_i)$	…	$c(a_2, e_n)$
…	…	…	…	…	…	
a_j	$c(a_j, e_1)$	$c(a_j, e_1)$	…	$c(a_j, e_i)$	…	$c(a_j, e_n)$
…	…	…	…	…	…	…
a_m	$c(a_m, e_1)$	$c(a_m, e_2)$	…	$c(a_m, e_i)$	…	$c(a_m, e_n)$

où on supposé que $|A| = m$ et $|E| = n$.

Remarque

L'obtention d'une telle « matrice de décision » requiert, en pratique, un lourd travail de modélisation.

II- Exemple

On considère la matrice de décision suivante où les conséquences sont supposées être monétaires :

c	e_1	e_2	e_3
a_1	40	70	–20
a_2	–10	40	100
a_3	20	40	–5

Dans la donnée d'un tel problème on ne dispose d'aucune information concernant la vraisemblance relative des divers états de la Nature. Les « critères classiques » analysés plus bas vise à tirer parti d'un telle matrice sans chercher à modéliser cette information. Dans tout ce qui suit on supposera que X = 1 et que la préférence croit avec la valeur des conséquences : une conséquence x sera préférée à une conséquence y si et seulement si $x > y$.

III- Dominance

On dira qu'une action $a \in A$ *domine* une action $b \in A$, ce que l'on notera a D b si :
$c(a, e) \geq c(b, e), \forall e \in E$, et
$\exists e' \in E$ tel que $c(a, e') > c(b, e')$.
Une action a domine une action b si elle permet d'obtenir des conséquences au moins aussi bonne que celles de b dans *tous* les états de la Nature et que, dans au moins un état, elle permet d'obtenir une conséquence strictement meilleure.
On dira qu'un action est *efficace* si elle n'est dominée par aucune autre action de A. La relation binaire D étant, par construction, asymétrique et transitive, il est facile de montrer que l'ensemble des actions efficaces est toujours non vide (lorsque A et E sont finis). Il est clair que si l'on cherche à retenir une seule action de A, on aura de bonnes raisons de la rechercher parmi les actions efficaces, c'est-à-dire parmi l'ensemble A* ∏ A défini par :

$A^* = \{a \in A : \text{Non}[b\ D\ a]\ \forall b \in A\}$.

Remarques

- il est clair que si a D b, on peut conclure que a est préférée à b quelle que soit la vraisemblance relative des divers états de la Nature.
- dans les problèmes réels il est rare qu'une action en domine une autre et l'on a souvent A* = A. La considération de l'ensemble des actions efficaces ne contribue généralement que peut à simplifier le problème de départ.
- restreindre son attention au sous-ensemble A* peut ne pas être pertinent si l'on a des doutes sur la faisabilité des actions de A. L'ensemble A* peut ne pas contenir les « brillants seconds » comme le montre l'exemple suivant :

c	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
a	100	100	1000	100	100	100
b	99	99	99	99	99	99
c	100,5	0	0	0	0	0
d	0	100,5	0	0	0	0

Dans cet exemple, on a A = {a, b, c, d} et A* = {a, c, d} car a D b. Cependant l'action b apparaît comme un « brillant second » qu'il peut être « risqué » de ne pas considérer si l'action a $\in$A devient non réalisable.

- toute action solution du problème (P) :

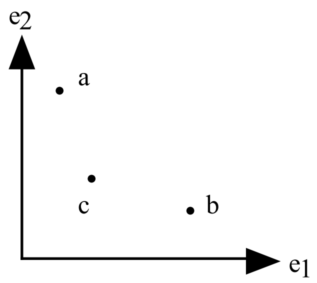
$$\max_{a \in A} \sum_{e \in E} p(e) c(a, e)$$

sous les contraintes

$$\sum_{e \in E} p(e) = 1$$

$$p(e) > 0, e \in E$$

est nécessairement efficace (la démonstration, facile, de cette proposition est laissée à titre d'exercice). L'exemple suivant montre que la réciproque est, en général, fausse : toute action a $\in$ A* ne peut pas nécessairement être obtenue comme solution d'un tel problème.



Dans l'ensemble {a, b, c} toutes les actions sont efficaces mais l'action c ne peut être solution du problème (P) (c n'est pas sur la frontière « nord-est » de l'ensemble obtenu comme la fermeture convexe des trois point {a, b, c}).

IV- Critère de Wald

Le critère de Wald (dit aussi Max Min) est le critère du « pessimisme absolu » : on fonde son choix uniquement sur ce qui arriver de pire. Plus formellement le critère de Wald conduira à choisir toute action de A solution de :

$$\underset{a \in A}{\text{Max}}\ \underset{e \in E}{\text{Min}}\, c(a, e)$$

Dans notre exemple, il est clair que le critère conduit à choisir a_3 qui donne une perte maximale de –5 contre –20 à a_1 et –10 à a_2.

Remarques

– ce critère conduit à une mauvaise utilisation de l'information : le lourd travail de modélisation qu'implique le fait de bâtir une matrice de décision n'est que très imparfaitement exploité.
– il n'y a aucune compensation possible entre les conséquences sur les divers états de la nature. Une très petite différence sur la conséquence la pire suffira à emporter le choix, même si sur tous les autres états il existe de « grandes différences » en sens inverse.
– on peut appliquer ce critère dès lors que X est ordonné.
– en pratique, ce critère conduira à privilégier systématiquement le statu quo par rapport à tout projet susceptible de comporter un risque.

V- Critère du Max Max

Le critère de critère du Max Max est l'exact opposé du critère de Wald : c'est celui de l'optimisme « béat » qui consiste à fonder son choix uniquement sur ce qui risque d'arriver de plus favorable. Formellement le critère du Max Max conduira à choisir toute action de A solution de :

$$\underset{a \in A}{\text{Max}}\ \underset{e \in E}{\text{Max}}\, c(a, e)$$

Dans notre exemple, ce critère conduit à choisir a_2 qui donne un gain maximal de 100 contre 70 à a_1 et 40 à a_3.

Remarques

– ce critère conduit à une mauvaise utilisation de l'information : le lourd travail de modélisation qu'implique le fait de bâtir une matrice de décision n'est que très imparfaitement exploité.
– il n'y a aucune compensation possible entre les conséquences sur les divers états de la nature. Une très petite différence sur la conséquence la meilleure suffira à emporter le choix, même si sur tous les autres états il existe de « grandes différences » en sens inverse.
– on peut appliquer ce critère dès lors que X est ordonné.

VI- Critère de Hurwicz

Il consiste à tenter un compromis entre les deux critères précédents en prenant en compte un coefficient de « pessimisme ». Étant donné un nombre $\alpha \in [0 ; 1]$ appelé coefficient de pessimisme, le critère de Hurwicz conduit à choisir toute action $b \in A$ solution de :

$$\underset{a \in A}{\mathrm{Max}} \left[\alpha \underset{e \in E}{\mathrm{Min}}\, c(a,e) + (1-\alpha) \underset{e \in E}{\mathrm{Max}}\, c(a,e) \right]$$

Dans notre exemple, ce critère conduit avec $\alpha = 1/2$ à choisir a_2 qui donne un gain maximal de $90/2 = 25$ contre $50/2$ à a_1 et $35/2$ à a_3.

Remarques

– ce critère conduit à une utilisation de l'information qui n'est pas nettement meilleure que les deux critères précédents.
– ce critère suppose que X a une structure légitimant l'opération de combinaison linéaire !
– ce critère contient comme cas particulier les deux critère précédents et tente de réaliser un compromis entre le « pessimisme absolu » et l'« optimisme béat ».
– la détermination du coefficient de pessimisme α est loin d'être évidente !

VII- Critère de Savage

Il consiste à proposer un critère adapté aux univers « bureaucratiques ». Si notre exemple vous choisissez a_2 et que l'état e_1 survient, votre « patron » aura beau jeu de vous dire que vous avez pris une mauvaise décision : en choisissant a_1 on aurait gagné 40 au lieu de perdre 10, soit un manque à gagner de 50. Ce manque à gagner est appelé « regret ». On cherche alors à minimiser le regret le plus élevé, minimisant ainsi ses chances de se voir reprocher des « manques à gagner » importants. Le critère de Savage conduit à choisir toute action de A solution de :

$$\underset{a \in A}{\mathrm{Min}} \left[\underset{e \in E}{\mathrm{Max}}\, R(a,e) \right]$$

avec les regrets R(a, e) définis par :

$$R(a,e) = \underset{b \in A}{\mathrm{Max}}\, c(b,e) - c(a,e)$$

c’est-à-dire la différence entre ce que l’on aurait pu faire de mieux dans cet état de la Nature et ce que l’on a fait.

Dans notre exemple, on a la matrice des regrets suivante :

R	e_1	e_2	e_3
a_1	0	0	120
a_2	50	30	0
a_3	20	30	105

et le critère de Savage conduit à retenir a_2 qui donne un regret maximum de 50 contre 120 à a_1 et 105 à a_3.

Remarques

– ce critère est distinct de celui de Wald qui conduisait, dans notre exemple, à choisir a_3.
– ce critère suppose que X a une structure légitimant d’effectuer des différences et que l’opération de différence « mesure » les regrets de façon adéquate.
– ce critère fait dépendre le choix de l’*ensemble* des actions de A. En particulier l’adjonction de nouvelles actions peut modifier le choix de façon imprévisible. Ainsi avec la matrice de décision :

c	e_1	e_2
a_1	8	0
a_2	2	4

on a la matrice des regrets :

R	e_1	e_2
a_1	0	4
a_2	6	0

qui conduit à choisir a_1.

Ajoutons à A une nouvelle action. Il pourrait sembler naturel de penser que dans l’ensemble élargi le choix soit restera identique soit se portera sur l’action que l’on vient d’introduire. Avec le critère de Savage, il n’en va pas ainsi. Considérons la matrice de décision « augmentée » :

c	e_1	e_2
a_1	8	0
a_2	2	4
a_3	1	7

qui donne la matrice de Regrets :

R	e_1	e_2
a_1	0	7
a_2	6	3
a_3	7	0

qui conduit alors à retenir l'action a_2. Il est parfois possible de justifier un tel phénomène (l'ajout d'actions peut apporter des informations sur la nature du problème). Cependant un tel critère offre des possibilités de « manipulation » par adjonction d'actions « judicieusement choisies », l'ensemble A pouvant souvent être élargi et/ou redéfini.

VIII- Critère de Laplace

Il consiste faire usage du « principe de raison insuffisante » pour supposer que le vraisemblance des divers états de la Nature est identique puisque l'on ne dispose d'aucune information quant à leur vraisemblance relative. Le critère de Laplace conduit alors à choisir toute action de A solution de :

$$\underset{a \in A}{\mathrm{Max}} \left[\sum_{e \in E} \frac{1}{|E|} c(a,e) \right]$$

Dans notre, ce critère conduit à choisir a_2 qui donne un gain maximal de 130/3 contre 90/3 à a_1 et 55/3 à a_3.

Remarques

- ce critère est sensible au choix, généralement arbitraire, du nombre des états de la Nature considéré. Raffiner la description de certains états (en en subdivisant certains) peut conduire à modifier son choix initial.
- ce critère suppose que X a une structure légitimant l'opération de combinaison linéaire !
- on comprend mal ce qui, en pratique, peut justifier d'appliquer le principe de raison insuffisante à de telles situations : soit vous deviendrez Président de la République, soit vous ne le deviendrez pas. Peut-on pour autant considérer que ces deux états sont également vraisemblables ?

- l’espérance est-elle un bon critère de choix même en supposant tous les états également vraisemblables ?

IX- Conclusion

On a remarqué qu'aucun des critères étudiés jusqu'ici n'était pleinement satisfaisant. Vouloir décider dans l'incertain sans se poser la question de la vraisemblance relative des divers états de la Nature semble artificiel.

Mentionnons enfin qu'il est facile de bâtir des exemples où les critères divergent de façon radicale. Ainsi avec la matrice de décision :

c	e_1	e_2	e_3	e_4
a	2	2	0	1
b	1	1	1	1
c	0	4	0	0
d	1	3	0	0

le critère de Wald conduit à retenir b, le critère du Max Max c, le critère de Laplace a et le critère de Savage d !