Rappels Sommaires de Probabilité

Pour raisonner un problème de décision particulier vous envisagez votre environnement sous un certain angle. On appelle cet environnement la **« nature »** (exemple : l'état du ciel demain matin si votre problème consiste à savoir si vous allez organiser une réception dans votre jardin ou dans votre salon). Cette nature peut prendre différentes formes, ce sont les divers **« états de la nature »** (ciel dégagé, pluvieux, etc.). Par vos décisions on supposera que vous n'influencez pas la nature (ce n'est pas parce que vous avez décidé de vous installer dehors qu'il va nécessairement pleuvoir). On cherche à « probabiliser » ces états de la nature.

En langage mathématique on se donne :

– un ensemble S d'**« événements élémentaires »** que l'on supposera ici fini par commodité. A un jet de dés on associera un ensemble S composé des événements élémentaires : le dé tombe sur la face faisant apparaître 1, 2, 3, 4, 5, 6.
– un ensemble $\boldsymbol{S}$ d'**« événements »** construit sur la base de S permettant de parler de la réunion, de l'intersection ... d'événements élémentaires. « Le dé tombe sur une face paire » est un événement composé de la réunion de trois événements élémentaires. On souhaite, en mathématique, que $\boldsymbol{S}$ possède un certain nombre de « bonnes propriétés » (les mots "tribu" et "σ-algèbre" vous rappellent-ils quelque chose ?), en particulier on souhaite que :

  $S \in \boldsymbol{S}$;
  $A \in \boldsymbol{S} \Rightarrow S \backslash A \in \boldsymbol{S}$;
  $A, B \in \boldsymbol{S} \Rightarrow A \cap B \in \boldsymbol{S}$.

On appelle **MESURE DE PROBABILITÉ** (ou plus simplement probabilité) toute fonction :

$$P : \boldsymbol{S} \mapsto 1$$
$$A \to P(A)$$

vérifiant pour tout A, B $\in \boldsymbol{S}$

1- $P(A) \geq 0$
2- $P(S) = 1$
3- $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Il existe une infinité de fonctions vérifiant ces conditions. Elles possèdent néanmoins toutes de nombreuses propriétés remarquables que nous n'avons pas la place de rappeler ici. Rappelons cependant que ces trois conditions impliquent, bien sûr, que P(A) est toujours comprise entre 0 et 1 (le démontrer est un exercice très salutaire).

Remarquez que dans ce qui précède le mot *fréquence* est absent.

Définition : La probabilité de « A sachant B », notée P(A/B) est définie par :

$$P(A/B) = P(A \cup B)/P(B).$$

De tout cela on tire facilement la :

Formule des probabilités totales (ou formule d'expansion)

Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ forment une partition de S alors :

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A / A_i) \cdot P(A_i)\,.$$

(rappelons qu'une partition d'un ensemble est un ensemble d'ensembles non vides et disjoints dont la réunion redonne l'ensemble de départ).

Il découle de la définition d'une probabilité conditionnelle que :

$P(A \cup B) = P(A/B)\ P(B) = P(B \cup A) = P(B/A)\ P(A)$.

D'où la formule bien connue :

$$P(A / B) = \frac{P(B / A) \cdot P(A)}{P(B)}.$$

En combinant cette dernière expression avec la formule des probabilités totales on obtient alors le célèbre

Théorème de Bayes

$$P(A / B) = \frac{P(B / A) \cdot P(A)}{\sum_{i=1}^{n} P(B / A_i) \cdot P(A_i)}.$$

Ce théorème permet de réviser ses croyances concernant l'occurrence de l'événement A en fonction d'une nouvelle information B. On appelle généralement P(A) une probabilité *a priori* et P(A/B) une probabilité *a posteriori*.

Application.

Vous souhaitez lancer un nouveau produit. A priori vous pensez P(marché favorable) = 0,6. Afin d'obtenir plus d'information vous avez commandé une étude de marché à un cabinet de conseil que vous connaissez bien. Votre expérience passée avec ce cabinet vous permet d'affirmer que les résultats de ses enquêtes sont fiables à 80%, c'est à dire que :

P(étude favorable/marché favorable) = 0,8
P(étude défavorable/marché défavorable) = 0,8

Vous recevez le rapport d'étude où l'on vous indique que le marché sera favorable à votre produit. Sachant cette nouvelle information, vous révisez vos croyances.

Ce qui nous intéresse c'est P(marché favorable/étude favorable). Nous ne l'avons pas mais nous pouvons la calculer simplement. En effet, les événements (marché favorable) et (marché défavorable) forment une partition de l'ensemble des événements. On peut alors appliquer le théorème de Bayes et poser :

$$\begin{aligned} P(MF/EF) &= P(EF/MF)P(MF)/[P(EF/MF)P(MF)+P(EF/MD)P(MD)] \\ &= 0{,}8 \times 0{,}6/(0{,}8 \times 0{,}6+0{,}2 \times 0{,}4) = 6/7 \end{aligned}$$

Au passage vous pouvez également calculer, si cela vous amuse, P(EF) qui est égale au dénominateur de l'expression précédente, soit $0{,}8 \times 0{,}6+0{,}2 \times 0{,}4 = 0{,}56$.

Tout ceci est élémentaire, il suffit de s'entraîner.

Pour tout le reste, reportez-vous à votre manuel habituel de probabilités (en cherchant bien je suis sûr que vous en avez un).