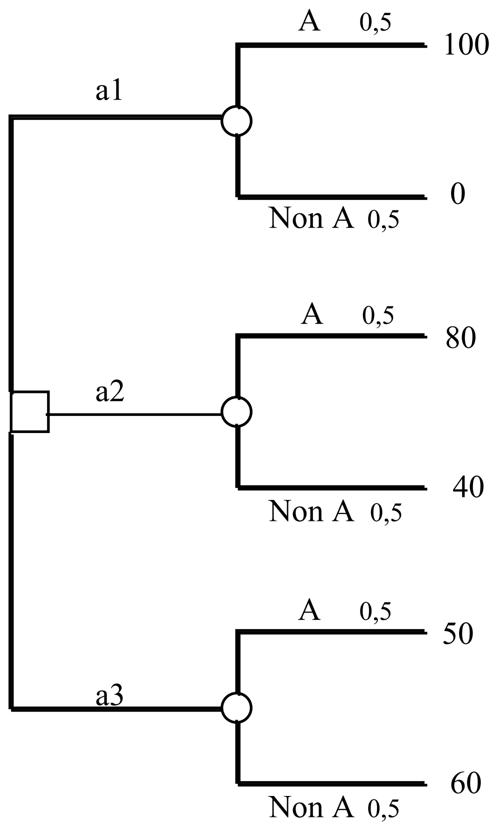
Analyse de la Décision
Denis Bouyssou

Valeur de l'Information

I- Introduction

On considère un individu confronté au problème de décision modélisé par l'arbre de décision suivant :



Soit encore, sous la forme d'une matrice de décision :

	0,5	0,5
	A	Non A
a1	100	0
a2	80	40
a3	50	60

En supposant que l'individu raisonne en Valeur Espérée (critère de l'« espérance mathématique de gain » ou EMG) la meilleure décision est a2 qui rapporte en valeur espérée

60, contre 50 à a1 et 55 à a2. Cette valeur est appelée « Valeur Espérée Sans Information » ou VESI. On a donc : VESI = 60.

La VESI représente ce que rapporte en valeur espérée la meilleure décision avant toute acquisition d'information. De façon générale, on a :

$$\text{VESI} = \underset{a \in A}{\text{Max}} \sum_{e \in E} p(e) c(a, e)$$

où A est l'ensemble des actions, E l'ensemble de états de la nature, p(e) la probabilité de $e \in E$ et c(a, e) les conséquences qui surviennent si on choisit $a \in A$ et la Nature choisit $e \in E$.

II- Contrôle

Supposons que l'on vous propose un contrat vous permettant, moyennant finance, de choisir à votre guise l'état de la Nature qui surviendra avant de prendre votre propre décision. Un tel contrat s'interprète comme un « contrôle » de la nature. L'assurance ou la couverture sur un marché à terme s'analyse comme des opérations de contrôle.

Quel est le prix maximum que l'on est prêt à payer un tel contrat ? Il est clair que si je paye le contrat un prix x, alors je choisirai de faire survenir l'état A et je prendrai la décision a1. Ceci rapportera 100 – x. C'est ce que l'on appelle la « Valeur Avec Contrôle (sur l'événement A) » du problème à un prix de x, ce que l'on note VAC(x). Plus généralement, on a :

$$\text{VAC}(x) = \underset{a \in A}{\text{Max}} \, \underset{e \in E}{\text{Max}} \, c(a, e) - x$$

Un raisonnement simple montre alors que le contrat est avantageux tant que VAC(x) > VESI. Le pris maximal que l'on est prêt à payer un tel contrat est donc la valeur x* telle que :

VAC(x*) = VESI

On a donc x* = VAC(0) - VESI.

Cette valeur x* est appelée la « Valeur de Contrôle (sur l'événement A) » du problème, notée VC.

On a donc ici VC = VAC(0) – VESI = 100 – 60 = 40.

Remarques

- Il est clair que l'on a toujours VC ≥ 0.
- VC est clairement une borne supérieure à tout achat d'information (sondage, études, etc.) relativement à l'occurrence de l'événement A.

III- Information parfaite

Supposons que l'on vous propose un contrat vous permettant, moyennant finance, de connaître *avec certitude* avant de vous décidez la décision que prendra la Nature (A ou Non A). Un tel contrat revient à acquérir de l'« Information Parfaite ».

Quel est le prix maximum que l'on est prêt à payer un tel contrat ? La possibilité de recourir à un tel contrat revient à ajouter à l'arbre de départ un nouvelle branche au noeud de décision de départ qui se présente comme indiqué à la page suivante.

L'information étant parfaite, on a P(A/Signal = A) = 1 et P(Non A/Signal = Non A) = 1. De même il est clair que P(Signal = A) = P(A). En effet on a :

P(A) = P(A/Signal = A)P(Signal = A) + P(A/Signal = Non A)P(Signal = Non A) =
P(Signal = A).

La résolution de cette branche de l'arbre est alors élémentaire. Si le signal est A on choisit a1, ce qui rapporte 100 – x ; si le signal est Non A, on choisit a3, ce qui rapporte 60 – x. Au total, la valeur espérée de la branche « Information Parfaite » est donc de 80 – x. Cette valeur est appelée « Valeur Espérée Avec Information Parfaite (sur l'événement A) à un coût de x », notée VEAIP(x).

Plus généralement, on a :

$$\text{VEAIP}(x) = \sum_{e \in E} p(e) \left[\underset{a \in A}{\text{Max}}\, c(a, e) \right] - x$$

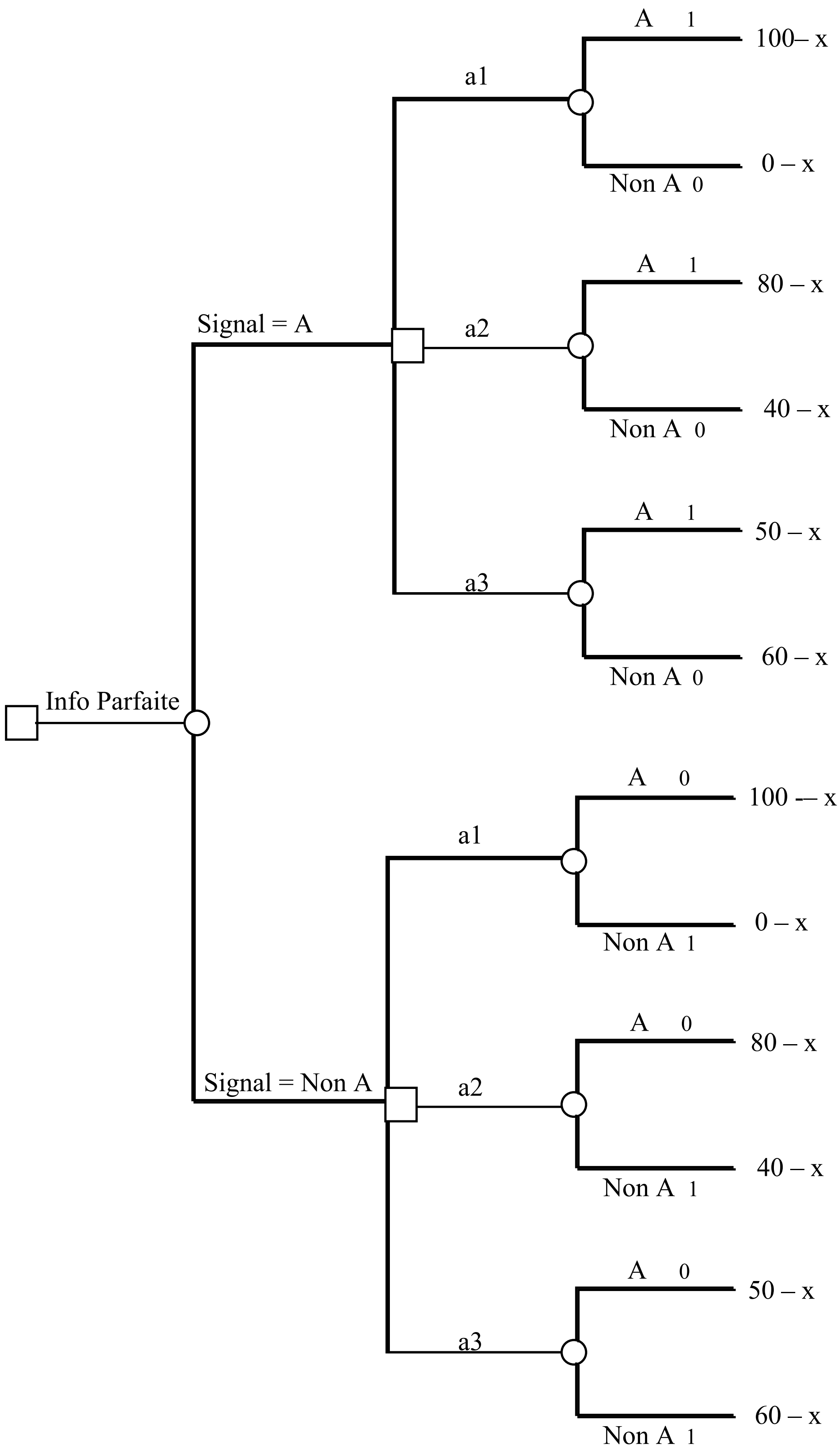
Un raisonnement simple montre alors que le contrat est avantageux tant que VEAIP(x) > VESI. Le pris maximal que l'on est prêt à payer un tel contrat est donc la valeur x* telle que :

VEAIP(x*) = VESI

On a donc x* = VEAIP(0) – VESI.

Cette valeur x* est appelée la « Valeur Espéré de l'Information Parfaite (sur l'événement A) », notée VEIP.

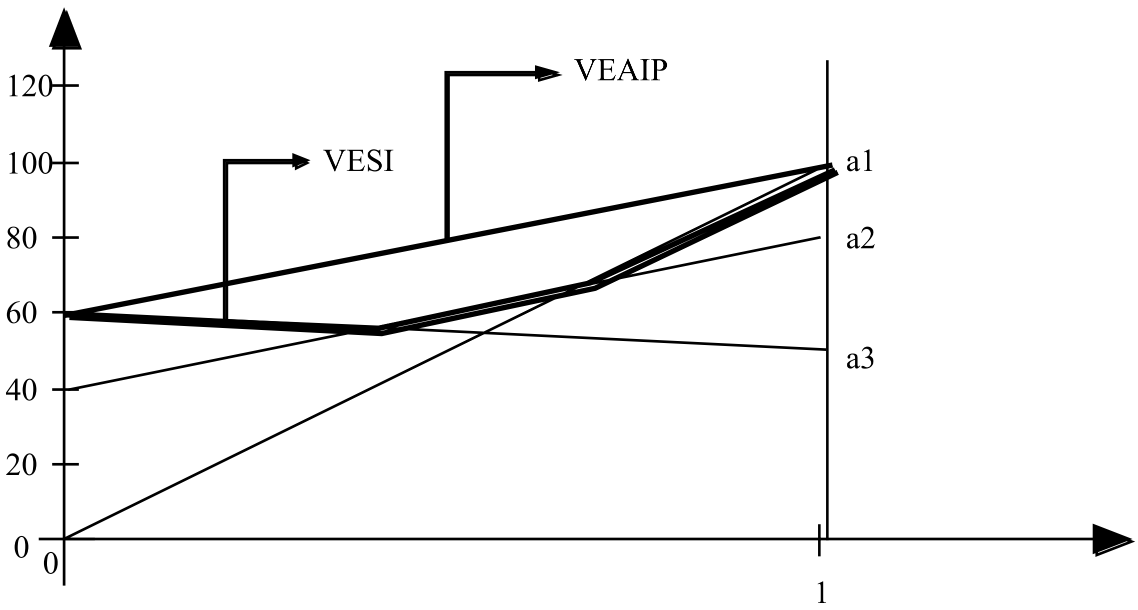
On a donc ici VEIP = VEAIP(0) – VESI = 80 – 60 = 20.



Info Parfaite
Signal = A
Signal = Non A
a1
a2
a3
A 1
Non A 0
A 0
Non A 1
100– x
0 – x
80 – x
40 – x
50 – x
60 – x
100 –– x

Remarques

– Il est clair que l'on a toujours VC ≥ VEIP ≥ 0.
– VEIP est clairement une borne supérieure à tout achat d'information (sondage, études, etc.) relativement à l'occurrence de l'événement A.
– Ce qui donne la valeur à l'information c'est le fait qu'elle permette un *ajustement* de la décision en fonction du signal reçu : ici on choisit a2 sans information et tantôt a1 tantôt a3 avec l'information parfaite. Si aucun signal possible ne conduit à remettre en cause son choix antérieur, l'information est de valeur nulle !
– Une source d'information qui enverrait un signal systématiquement erroné serait de même valeur pour nous (pourvu que nous connaissions la nature de ce signal !) que le signal envisagé qui est systématiquement correct. Ceci n'est vrai que le signal concerne un événement de type A ou Non A. Dans le cas d'une structure plus riche, l'information qui est systématiquement erronée a moins de valeur que l'information parfaite mais n'est pas sans valeur.
– Il est facile d'effectuer une analyse de sensibilité de VEIP en fonction de P(A) = p. On a :
  VESI = Max(100p ; 40p + 40 ; 60 – 10p)
  VEAIP(0) = 40p + 40.
  On peut alors dresser le graphique suivant :



On constatera sans difficulté que le VEIP est nulle lorsqu'il n'y a pas d'incertitude au départ (P(A) = 1 ou 0).

IV- Information imparfaite

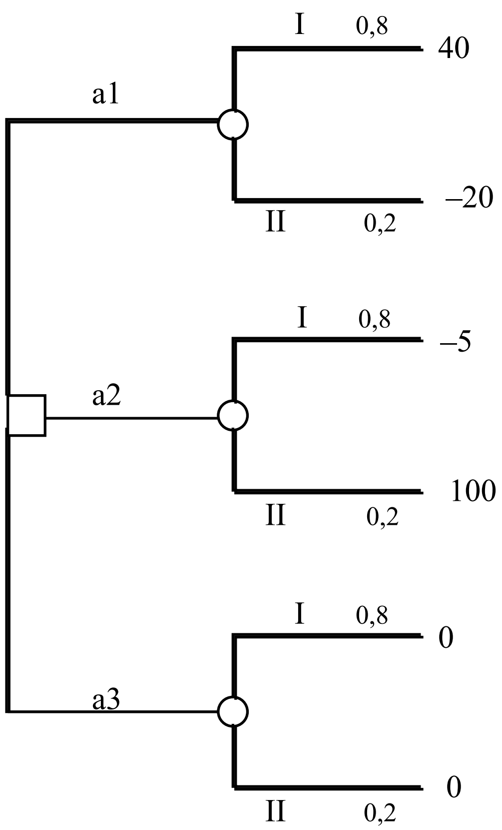
On considère le problème de décision suivant. Un expérimentateur a préparé 1000 urnes (opaques) qui peuvent être de deux types. Les urnes de type I contiennent 10 boules dont 4 sont rouges et 6 sont noires. Les urnes de type II contiennent 10 boules dont 9 sont rouges et une est noire. Il a préparé 800 urnes de type I et 200 urnes de type II. Il a ensuite extrait au hasard une urne sur laquelle il vous propose de parier : vous avez une urne devant vous et le problème consiste à savoir si elle est de type U1 ou de type U2. Vous pouvez soit :

– (a1) parier que l'urne est de type I,
– (a2) parier que l'urne est de type II,
– (a3) ne pas parier.

Les conséquences sont décrites dans la matrice suivante :

	0,8	0,2
	type I	type II
a1	40	–20
a2	–5	100
a3	0	0

On a donc l'arbre :



Un calcul simple montre alors que :

- sans information, la meilleure décision est a1 qui rapporte 28. On a donc VESI = 28.
- VEIP = 24.

L'expérimentateur vous propose alors avant de vous décidez de mettre la main dans l'urne et de prélevez un boule dont vous pourrez observer la couleur avant de vous décider. Combien êtes vous prêt à payer au maximum un tel contrat ? Il est clair que ce contrat s'analyse comme le recueil d'une information imparfaite et vaut donc moins que VEIP = 24.

Un tel sondage dans l'urne conduit à l'arbre suivant indiqué à la page suivante.

Il est facile d'associer des probabilités aux diverses branches de cet arbre. On a en effet :

P(UI) = 0,8, P(UII) = 0,2, P(R/UI) = 0,4, P(N/UI) = 0,6, PR/UII) = 0,9, P(N/UII) = 0,1. On obtient donc :

P(R) = P(R/UI)P(UI) + P(R/UII)P(UII) = 0,5

P(N) = P(N/UI)P(UI) + P(N/UII)P(UII) = 0,5

$P(UI/R) = \frac{P(R/UI)P(UI)}{P(R)} = 0{,}64$ et donc P(UII/R) = 0,32

$P(UI/N) = \frac{P(N/UI)P(UI)}{P(N)} = 0{,}96$ et donc P(UII/N) = 0,04.

La résolution de cette branche de l'arbre est alors élémentaire. Si le signal est R on choisit a2, ce qui rapporte 32,8 – x ; si le signal est N, on choisit a1, ce qui rapporte 37,6 – x. Au total, la valeur espérée de la branche « Information Imparfaite » est donc de 35,2 – x. Cette valeur est appelée « Valeur Espérée Avec Information Imparfaite (sur l'événement UI) à un coût de x », notée VEAII(x).

Plus généralement, on a :

$$VEAII(x) = \sum_{s \in S} p(s) \operatorname*{Max}_{a \in A} \left[\sum_{e \in E} p(e/s) c(a,e) \right]$$

en notant S l'ensemble des signaux possibles.

Un raisonnement simple montre alors que le contrat est avantageux tant que VEAII(x) > VESI. Le pris maximal que l'on est prêt à payer un tel contrat est donc la valeur x* telle que :

VEAII(x*) = VESI

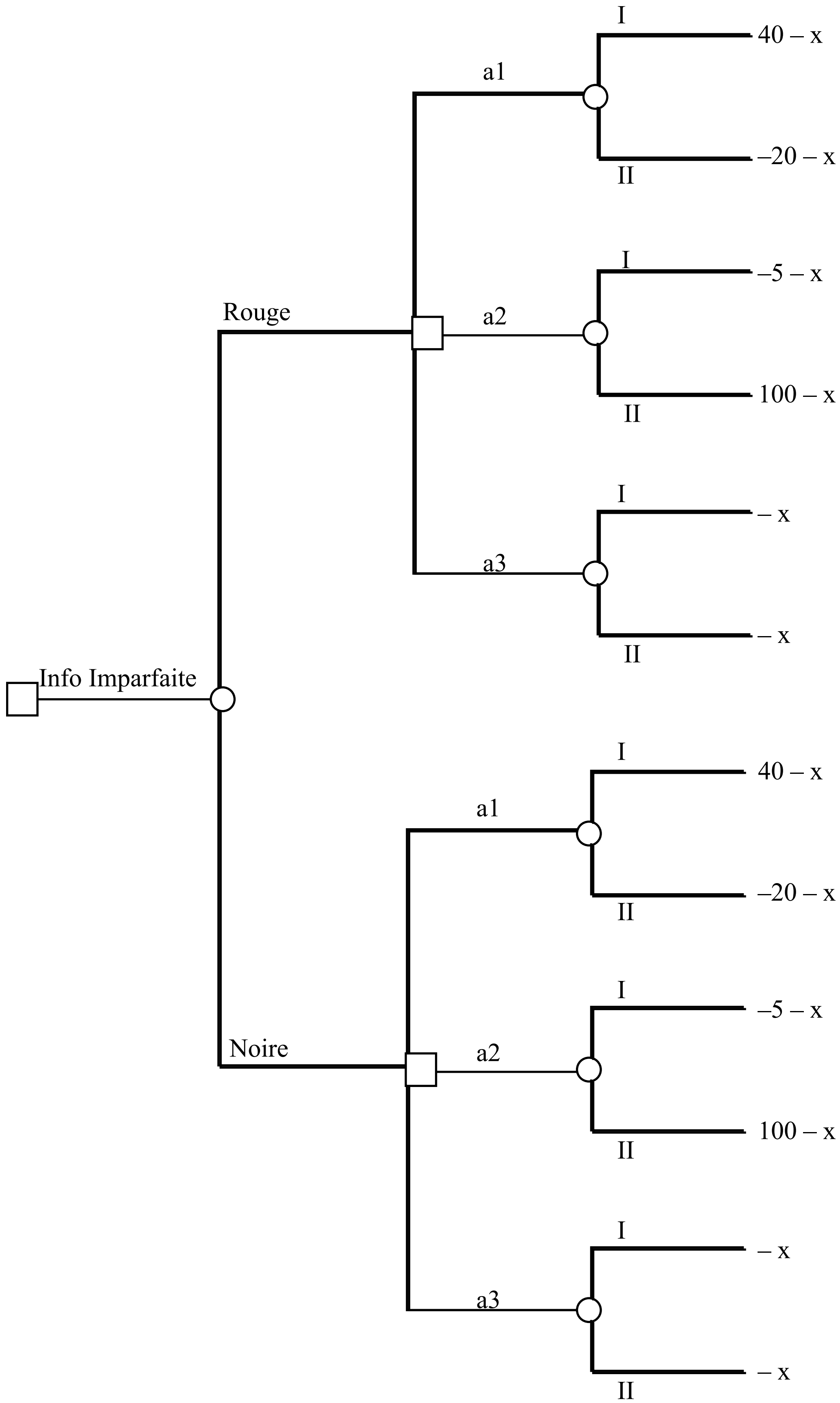
On a donc x* = VEAII(0) – VESI.

Cette valeur x* est appelée la « Valeur Espéré de l'Information Imparfaite (sur l'événement UI) », notée VEII.

On a donc ici VEII = VEAII(0) – VESI = 35,2 – 28 = 7,2.

Remarques

- Il est clair que l'on a toujours VC ≥ VEIP ≥ VEII ≥ 0.
- On peut procéder à une analyse de sensibilité sur VEII de la même manière que l'on a procédé avec VEIP.
- On constate ici encore que l'information a conduit à un *ajustement* de la décision prise sans information (on choisit a1 sans information alors que le signal « Rouge » conduit à choisir a2.



Info Imparfaite
Rouge
a1
I
40 – x
II
–20 – x
a2
I
–5 – x
II
100 – x
a3
I
– x
II
– x
Noire
a1
I
40 – x
II
–20 – x
a2
I
–5 – x
II
100 – x
a3
I
– x
II
– x