

Décision dans le risque

Une courte introduction

Denis Bouyssou

CNRS
Paris, France

LAMSADE — septembre 2007

Plan

- 1 Introduction
- 2 Critères classiques
- 3 Théorie de l'utilité espérée
- 4 Goût et aversion pour le risque

Décision

Décision « dans le certain »

- A : ensemble d'actions (décisions possibles)
- X : ensemble de conséquences
- $c(a) \in X$: conséquence de la mise à exécution de $a \in A$

Problème

- aider à comparer les actions de A sur la base de leurs conséquences

Problèmes classiques

- $|A|$ « grand » : problèmes combinatoires, programmation mathématique
- $x \in X$ tel que $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$: problèmes multicritères

Décision dans le risque/dans l'incertain

Problème

- « La décision ne dispose que pour l'avenir »
 - $c(a)$ n'est pas connu avec certitude

Décision dans le risque

- $c(a)$ est une distribution de probabilité sur X

Décision dans l'incertain

- $c(a)$ est connu par référence à un certain nombre de « scénarios »

Décision dans le risque : Modélisation

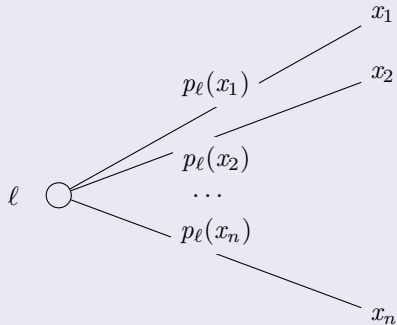
Modélisation

- X : ensemble de conséquences
- X fini = $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$
- $X \subseteq \mathbb{R}$ (p. ex. des sommes monétaires)

Loterie simple sur X

- v.a. (discrète) sur X
- $\ell = (x_1, p_1; x_2, p_2; \dots; x_n, p_n)$
- $p_\ell(x_i)$: probabilité d'obtenir la conséquence x_i avec la loterie ℓ

Loterie simple ℓ sur X



Loteries

Ensemble des loteries

- loteries simples sur X
- loteries composées du premier ordre sur X : loteries sur les loteries simples
- loteries composées du deuxième ordre sur X : loteries sur les loteries composés du premier ordre
- etc.

- $L(X)$: ensemble de toutes les loteries simples et composées (à ordre fini)
 - $L(X)$ est toujours infini

Loteries

Remarque

- $L(X)$ comprend toutes les loteries correspondant à la mise à exécution des actions de A ainsi que d'autres loteries « hypothétiques »

Problème

- aider à comparer les loteries de $L(X)$

Notations

- $\ell \in L(X)$: loteries (simples ou composées)
- $x \in X$: conséquences
- $p_\ell(x)$: probabilité d'obtenir la conséquence x avec la loterie ℓ

Critère Classique

Espérance Mathématique de Gain (EMG)

$$\ell \succ \ell' \Leftrightarrow \sum_{x \in X} xp_{\ell}(x) > \sum_{x \in X} xp_{\ell'}(x)$$

$$\ell \sim \ell' \Leftrightarrow \sum_{x \in X} xp_{\ell}(x) = \sum_{x \in X} xp_{\ell'}(x)$$

- \succ : préférence stricte
- \sim : indifférence

Critère *EMG*

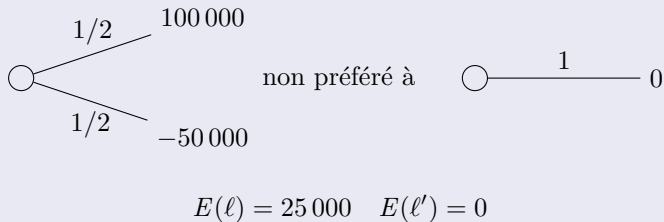
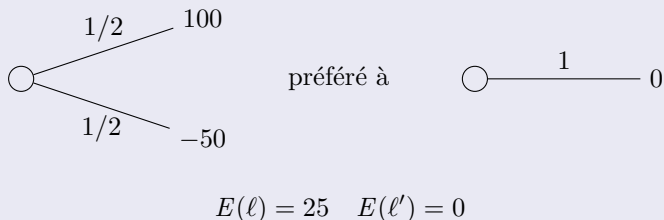
Avantages

- simple
- bonne utilisation de l'information
- « délégable »

Inconvénients

- restreint aux conséquences numériques
- pas de justification claire
- en contradiction avec le comportement observé de personnes « rationnelles » (diversification, assurance)

Exemple



Problèmes

- répétition de l'expérience ?
 - loi des grands nombres
 - le gain moyen va converger vers l'*EMG*
- risque de ruine ?

Paradoxe de Saint Petersburg (D. Bernoulli)

Jeu

- un « banquier » joue avec un « joueur ». Le joueur paye un droit d'entrée au banquier
- le banquier jette ensuite une pièce autant de fois qu'il faut pour que « face » apparaisse
- le jeu s'arrête ensuite
- si « face » est apparue au n^{e} coup, le banquier verse 2^n € au joueur
- combien un joueur rationnel devrait être prêt à payer pour participer à ce jeu ?

$$EMG = 2 \times \frac{1}{2} + 2^2 \times \frac{1}{2^2} + \dots$$

(une chance sur deux de ne gagner que 2€!)

Remarque

- si enjeux « petits » (peu ou pas de risque de ruine) et
- si les décisions sont « répétitives »

alors le critère EMG peut constituer une approximation satisfaisante

Autre Critère Classique

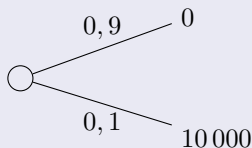
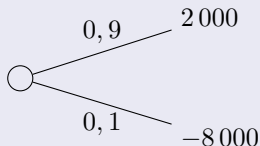
Espérance Mathématique de Gain (EMG) + Variance

- ajouter une mesure de « risque » (dispersion) à la mesure de tendance centrale

Problèmes

- plus compliqué
- comment traiter les deux critères ? (sous-ensemble efficace ou critère de synthèse ?)
- la variance est-elle une bonne mesure du risque ? (écart inter-quartile, semi-variance, etc.)

Exemple



$$E(\ell) = 0,9 \times 2\,000 + 0,1 \times -8\,000 = 1\,000$$

$$= 0,9 \times 0 + 0,1 \times 10\,000$$

$$\text{Var}(\ell) = 0,9 \times (2\,000 - 1\,000)^2 + 0,1 \times (-8\,000 - 1\,000)^2$$

$$= 0,9 \times 1\,000^2 + 0,1 \times 9\,000^2$$

$$= 0,9 \times (0 - 1\,000)^2 + 0,1 \times (10\,000 - 1\,000)^2$$

Ces deux loteries sont nécessairement indifférentes

Limites des critères classiques

Problème central

- ces critères ne prennent pas en compte la **psychologie** d'un individu vis-à-vis du risque
 - quel est le patrimoine de l'individu ?
 - quels sont ses revenus ?
 - quel est son attitude vis-à-vis du risque ?
 - etc.

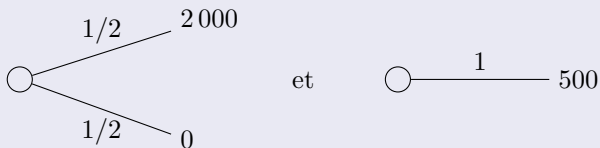
Pseudo-Solution

- interroger **directement** un individu sur ses préférences

Problèmes

- cohérence ?
- non délégable !
- effort cognitif important !

Exemple : choix entre



Exemple : choix entre

- $\mathcal{N}(878, 32; 72, 45)$ et
- $Bi(1200; 0, 75)$

Théorie de l'utilité espérée

J. von Neumann et O. Morgenstern (1945)

Idée

- interroger un individu sur des **choix simples**
- modéliser son comportement dans un **modèle mathématique**
- utiliser le modèle pour des cas plus compliqués

Questions

- quel modèle ?
- est-ce justifié ?
- comment interroger ?

Modèle mathématique

Idée

- remplacer l'EMG par une « espérance d'utilité »
- l'utilité prend en compte la psychologie d'un individu vis-à-vis du risque

$$\ell \succ \ell' \Leftrightarrow \sum_{x \in X} u(x)p_{\ell}(x) > \sum_{x \in X} u(x)p_{\ell'}(x)$$

$$\ell \sim \ell' \Leftrightarrow \sum_{x \in X} u(x)p_{\ell}(x) = \sum_{x \in X} u(x)p_{\ell'}(x)$$

Fonction d'utilité

- $u : X \rightarrow \mathbb{R}$
- $u(x)$ est l'« utilité » de la conséquence $x \in X$
- la fonction u est **propre à un individu**

Avantages

- simple
- délégable
- prend en compte les caractéristiques individuelles
- pas restreint aux conséquences monétaires
- justification claire (axiomes)

Analyse Théorique

Comment justifier un tel modèle ?

- analyse axiomatique

Interprétation des axiomes ?

- descriptive
- normative
- prescriptive

Axiome (A1 Rangement)

Pour tout $l, l' \in L(X)$ l'une au moins des deux propositions suivantes est vraie :

- l est préférée ou indifférente à l' ($l \succsim l'$)
- l' est préférée ou indifférente à l ($l' \succsim l$)

De plus, \succsim est transitive :

$$l \succsim l' \text{ et } l' \succsim l'' \Rightarrow l \succsim l''$$

$$\forall l, l', l'' \in L(X)$$

Remarque

- $l \succ l' \Leftrightarrow [l \succsim l' \text{ et Non}[l' \succsim l]]$
 - préférence stricte
- $l \sim l' \Leftrightarrow [l \succsim l' \text{ et } l' \succsim l]$
 - indifférence
- A1 implique que \sim et \succ sont transitives

Analyse descriptive

Difficultés

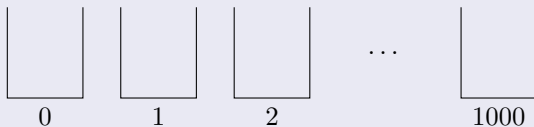
- préférence incomplètes
- indifférence non transitive
- préférence stricte non transitive

Préférences complètes ?

- la raison d'être de la théorie est d'aider à structurer des préférences !

Luce (1956)

Comparaison de tasses de café



$$0 \sim 1, 1 \sim 2, \dots, 999 \sim 1000 \Rightarrow 0 \sim 1000$$

- pouvoir discriminant imparfait \Rightarrow indifférence non transitive

Dominance avec seuils

Exemple

$$x \succ y \Leftrightarrow \begin{cases} x \text{ au moins aussi bon que } y \text{ sur tous les critères} \\ x \text{ meilleure que } y \text{ sur au moins un critère} \end{cases}$$

	g_1	g_2	g_3
a	10	10	10
b	11	11	8
c	12	9	9

- seuil de discrimination = 1,1 (en dessous de ce seuil, on ne fait pas de distinction)
- $a \succ b$, $b \succ c$, $c \succ a$

Paradoxe de Condorcet

Données

- Votant 1 : $a \succ b \succ c$
- Votant 2 : $c \succ a \succ b$
- Votant 3 : $b \succ c \succ a$

majorité : $a \succ b; b \succ c, c \succ a$

Effets de seuils

Exemple

1	Voiture	15 000 €
2	Voiture + AR	15 500 €
3	Voiture + AR + TO	16 000 €
4	Voiture + AR + TO + JL	16 500 €
⋮		
n	Voiture + ...	18 000 €

Préférence d'un consommateur « naïf »

$2 \succ 1, 3 \succ 2, 4 \succ 3, n \succ (n-1)$ mais $1 \succ n$

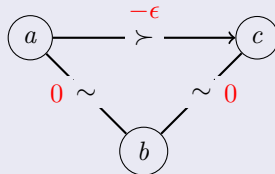
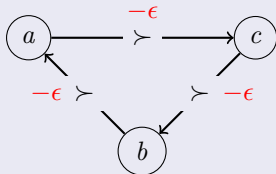
Analyse

Approche prescriptive

- efficacité
 - il est simple d'aider à faire un choix sur la base de préférences complètes et transitives

Approche normative

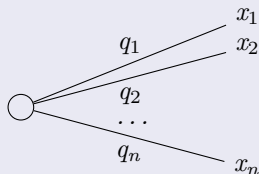
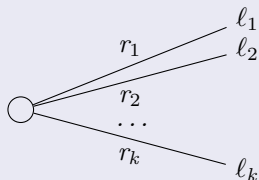
- « pompe à argent »
 - échanges à partir de c



Axiomes

Axiome (A2 Réduction)

l_j : loteries composées du premier ordre



avec $q_i = \sum_{j=1}^k r_j p_{l_j}(x_i)$

\Rightarrow Indifférence

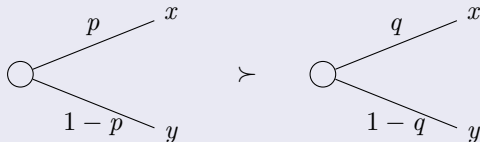
Interprétation

- « on ne s'amuse pas au jeu »

Axiomes

Axiome (A3 Monotonie)

Si $(x, 1) \succ (y, 1)$ alors



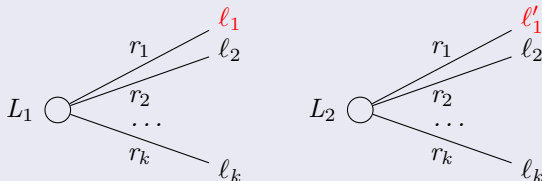
si et seulement si $p > q$ ($\forall x, y \in X$)

Interprétation

- « on est âpre au gain »
- « on ne ruse pas avec les probabilités » (superstition)

Axiomes

Axiome (A4 Indépendance (Substituabilité))



Si $l_1 \sim l'_1$ alors $L_1 \sim L_2$

Interprétation

- « l'indifférence est de l'indifférence »

Axiomes

Axiome (A5 Continuité)

Si $(x, 1) \succ (y, 1) \succ (z, 1)$ alors il existe une probabilité $p \in]0; 1[$ telle que :



Remarque

- l'axiome de monotonie implique que cette probabilité est unique

Interprétation

- « on n'est pas naïf avec les probabilités » (pas de discontinuité : certain / risque)

Axiomes

Exemple

- x : gagner 2 bonbons
- y : gagner 1 bonbon
- z : être pendu demain à l'aube

$$(x, 1) \succ (y, 1) \succ (z, 1)$$

Problème

- existe-t-il une probabilité $p \in]0; 1[$ telle que :

$$y \sim (x, p; z, (1 - p))$$

- $p = 1 - 10^{-100}$?

Conséquences des axiomes

Théorème (Représentation)

Soit une relation de préférence \succsim sur $L(X)$.

Cette relation vérifie les axiomes A1-A5

si et seulement si

il existe une fonction $u : X \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\ell \succsim \ell' \Leftrightarrow \sum_{x \in X} u(x)p_{\ell}(x) \geq \sum_{x \in X} u(x)p_{\ell'}(x) \quad (\text{vNM})$$

Remarque

- nécessité évidente
- u est liée à \succsim et donc à l'individu

► sauter la preuve

Démonstration

5 étapes

- constructive!

Cas fini : $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

Considérons une loterie $\ell \in L(X)$

1)

En utilisant un nombre fini de fois A1 (rangement), A2 (réduction) et A4 (substitution), on peut toujours trouver une loterie simple telle que : $\ell \sim (x_1, p_\ell(x_1); x_2, p_\ell(x_2); \dots; x_n, p_\ell(x_1))$

On suppose, s.p.d.g., que :

$$(x_n, 1) \succ (x_{n-1}, 1) \succ \dots \succ (x_1, 1)$$

2)

A5 (continuité) : puisque

$$(x_n, 1) \succ (x_{n-1}, 1) \succ \cdots \succ (x_1, 1)$$

il existe $u_i \in]0; 1[$ telle que

$$(x_i, 1) \sim [x_n, u_i; x_1; (1 - u_i)]$$

On pose :

$$u_n = 1, u_1 = 0$$

3)

En utilisant un nombre fini de fois A4 (substitution), A1 (rangement) et A2 (réduction), on sait que :

$$\begin{aligned} \ell &\sim (x_1, p_\ell(x_1); x_2, p_\ell(x_2); \dots; x_{n-1}, p_\ell(x_{n-1}); x_n, p_\ell(x_n)) \\ \ell &\sim [x_1, (1 - K_\ell); x_2, 0; \dots; x_{n-1}, 0; x_n, K_\ell] \end{aligned}$$

avec

$$K_\ell = \sum_{i=1}^n p_\ell(x_i) u_i$$

4)

Utilisons les étapes 1) à 3) pour transformer une loterie

$$\ell' \sim (x_1, p_{\ell'}(x_1); x_2, p_{\ell'}(x_2); \dots; x_{n-1}, p_{\ell'}(x_{n-1}); x_n, p_{\ell'}(x_n))$$

On a :

$$\ell' \sim [x_1, (1 - K_{\ell'}); x_2, 0; \dots; x_{n-1}, 0; x_n, K_{\ell'}]$$

avec

$$K_{\ell'} = \sum_{i=1}^n p_{\ell'}(x_i) u_i$$

5)

En utilisant A1 (Rangement) et A3 (Monotonie) on sait que :

$$\begin{aligned} \ell \succ \ell' &\Leftrightarrow \\ (x_1, p_\ell(x_1); x_2, p_\ell(x_2); \dots; x_n, p_\ell(x_n)) &\succ \\ (x_1, p_{\ell'}(x_1); x_2, p_{\ell'}(x_2); \dots; x_n, p_{\ell'}(x_n)) &\Leftrightarrow \\ [x_1, (1 - K_\ell); x_2, 0; \dots; x_n, K_\ell] &\succ [x_1, (1 - K_{\ell'}); x_2, 0; \dots; x_n, K_{\ell'}] \\ &\Leftrightarrow \\ K_\ell &> K_{\ell'} \Leftrightarrow \\ \sum_{i=1}^n p_\ell(x_i) u_i &> \sum_{i=1}^n p_{\ell'}(x_i) u_i \end{aligned}$$

et l'on définit u en posant :

$$u(x_i) = u_i$$



Conséquences des axiomes

Théorème (Unicité)

S'il existe deux fonctions u et v vérifiant (vNM) alors il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avec $\alpha > 0$ tels que :

$$v(x) = \alpha u(x) + \beta$$

$\forall x \in X$

Interprétation

« les préférences se mesurent comme la température »

Démonstration

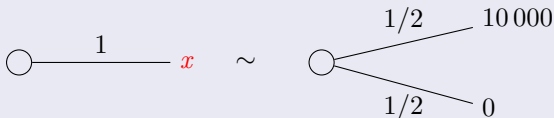
évidente car si u et v ne sont pas liées par une transformation affine, on peut toujours trouver une paire de loteries dont les espérances d'utilité se compareront de façon différente avec u et v □

Encodage d'une fonction d'utilité

Hypothèses

- $X = \mathbb{R}$ (sommes d'argent)
- on pose $u(0) = 0$ et $u(10\,000) = 1$

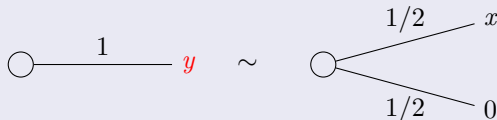
Encodage



$$1 \times u(x) = u(x) = 1/2 \times u(10\,000) + 1/2 \times u(0) = 1/2$$

Encodage d'une fonction d'utilité

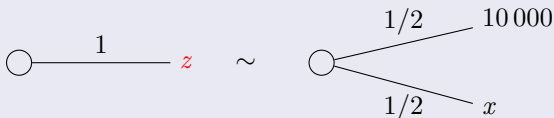
Encodage



$$u(y) = 1/2 \times u(x) + 1/2 \times u(0) = 1/4$$

Encodage d'une fonction d'utilité

Encodage

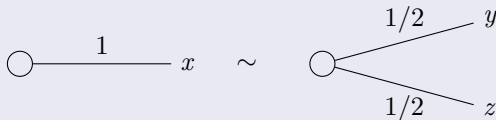


$$u(z) = 1/2 \times u(10000) + 1/2 \times u(x) = 3/4$$

Encodage d'une fonction d'utilité

Contrôle

- on doit avoir:



- sinon : revenir en arrière

Encodage d'une fonction d'utilité

Cas général



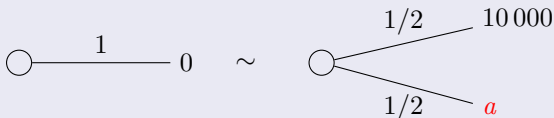
$$u(x) = pu(z) + (1 - p)u(w)$$

- 4 inconnues
- en fixer 3 et trouver l'indifférence sur la 4^e

▶ aller plus vite

Encodage d'une fonction d'utilité

Interpolation basse



$$1 \times u(0) = 1/2 \times u(10\,000) + 1/2 \times u(a) \Rightarrow u(a) = -1$$

Encodage d'une fonction d'utilité

Interpolation haute



$$1 \times u(10\,000) = 1/2 \times u(b) + 1/2 \times u(0) \Rightarrow u(b) = 2$$

Encodage d'une fonction d'utilité

Remarques

- utilisation de probabilités « simples »: $1/2$, $1/3$, $1/4$
- interrogation par encadrements successifs
- vérifications indispensables

Difficultés

Expériences

- effet du contexte
- effet de référence
- paradoxe d'Allais

Généralisations possibles

- Modèles Non EU (EURDP, Local EU, Regret, etc.)
 - non abordés ici

Effet du contexte

Expérience

- L_1 : vous courez le risque de perdre 1 000 \$ avec $p = 1/100$
- L_2 : vous pouvez vous assurer pour 10 \$ contre ce risque
- L_3 : vous perdez 10 \$ avec certitude mais vous ne supportez plus de risque

Résultats

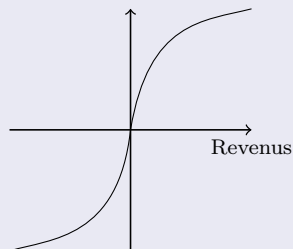
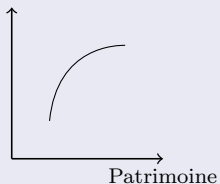
- 80% : $L_2 \succ L_1$
- 56% : $L_3 \succ L_1$

Interprétation

- importance du contexte des questions
- généralement clair dans un contexte décisionnel

Effet du référence

Fonction d'utilité sur le patrimoine ou sur les revenus ?



► sauter l'exemple

Exemple : choix épidémiologique

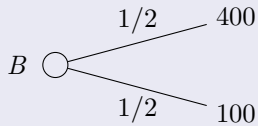
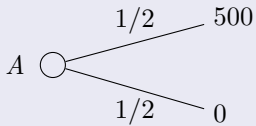
Présentation 1 : diminution du nombre de morts

Niveau actuel de mortalité = 500 morts / an

- Choix A : diminuer ce nombre de 500 (1/2) ou de 0 (1/2)
- Choix B : diminuer ce nombre de 400 (1/2) ou de 100 (1/2)

majorité des médecins : $B \succ A$

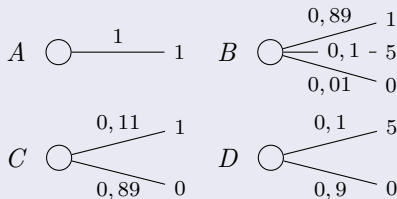
Présentation 2 : nombre de morts



majorité des médecins $A \succ B$

Paradoxe d'Allais (10^6 €)

Expérience



Résultats

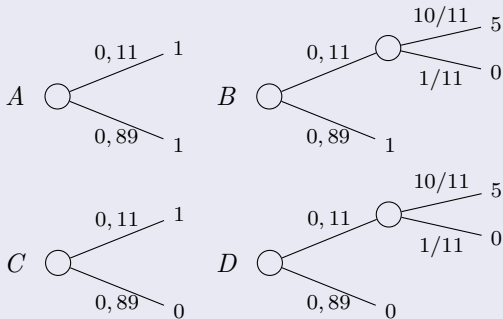
- $A \succ B$ et $D \succ C$

Interprétation

- $A \succ B \Rightarrow$
 $u(1) > 0,89u(1) + 0,1u(-5) + 0,01u(0)$
 $\Rightarrow u(1) > 10/11$
- $D \succ C \Rightarrow$
 $0,1u(5) + 0,9u(0) > 0,11u(1) + 0,89u(0)$
 $\Rightarrow u(1) < 10/11$

Paradoxe d'Allais

Reformulation



► sauter les exemples

Paradoxe d'Allais

Reformulation

- urne contenant 89 boules R et 11 boules N

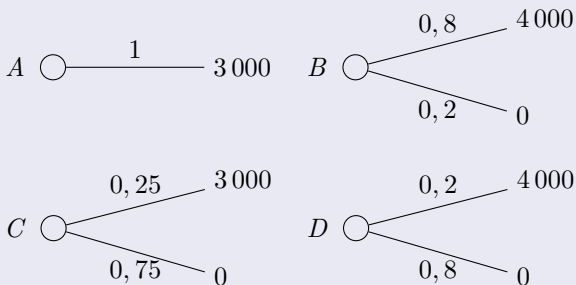
	R	N
X	Q	1
Y	Q	5 avec 10/11 0 avec 1/11

Le choix entre X et Y doit-il dépendre de Q ?

- $Q = 0$: $X = C$ et $Y = D$
- $Q = 1$: $X = A$ et $Y = B$

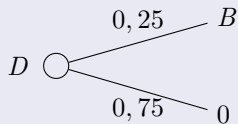
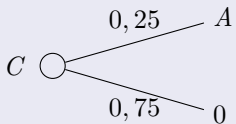
Effet de certitude (Kahneman et Tversky)

Expérience



- 95% des sujets disent : $A \succ B$ et $D \succ C$

Mais ...



Violation de l'indépendance

Analyse normative

- $(x; 1) \succ (y; 1)$ et $(y, p; z, (1 - p)) \succ (x, p; z, (1 - p))$
- $(x; 1) \succ (y; 1) \Rightarrow (x - \varepsilon; 1) \succ (y; 1)$
- $(y, p; z, (1 - p)) \succ (x, p; z, (1 - p)) \Rightarrow$
 $(y, p; z - \varepsilon, (1 - p)) \succ (x, p; z, (1 - p))$

Échanges à partir de $(x, p; z, (1 - p))$

- $(x, p; z, (1 - p))$ échangé pour $(y, p; z - \varepsilon, (1 - p))$
 - si E n'arrive pas gain = $(z - \varepsilon)$
 - si E arrive gain = y et y échangé contre $(x - \varepsilon)$
- on avait $(x, p; z, (1 - p))$ on a $x - \varepsilon, p; z - \varepsilon, (1 - p)$!

Violation « rationnelle » de l'indépendance

À l'école de sa maman

- une mère a deux enfants A et B
- elle a un seul cadeau à donner à A ou à B

Préférences de maman

- $(A, 1) \sim (B, 1)$
- $(B, 1/2; A, 1/2) \succ (A, 1/2; A, 1/2)$

⇒ violation « rationnelle » de l'indépendance

Goût et Aversion pour le risque

Contexte

- posons $X = \mathbb{R}$
- considérons un décideur « vérifiant » A1-A5
- il est peu restrictif de supposer que u est strictement croissante!
- P : patrimoine du décideur

Équivalent certain d'une loterie ℓ : $\hat{x}(\ell)$

- somme d'argent certaine que le décideur trouve équivalente au fait de posséder la loterie ℓ (prix minimal de vente de la loterie ℓ)

$$E(u(P + \hat{x}(\ell))) = u(P + \hat{x}(\ell)) = E(u(P + \ell))$$

\Rightarrow

$$\hat{x}(\ell) = u^{-1}[E(u(P + \ell))] - P$$

Prime de risque $\pi(\ell)$ associée à une loterie ℓ

Prime de risque

$$\pi(\ell) = E(\ell) - \hat{x}(\ell)$$

Goût et aversion

On dira qu'un décideur

- présente de l'*aversion* pour le risque si $\hat{x}(\ell) < E(\ell)$
- présente du *goût* pour le risque si $\hat{x}(\ell) > E(\ell)$
- est *neutre* vis à vis du risque si $\hat{x}(\ell) = E(\ell)$ (EMG)

pour toute loterie $\ell \in L(X)$

Goût et aversion pour le risque

Théorème (Aversion pour le risque : Arrow-Pratt)

Un décideur présente de l'aversion pour le risque si et seulement si sa fonction d'utilité est concave

Démonstration

Aversion pour le risque ($\hat{x}(\ell) < E(\ell)$)

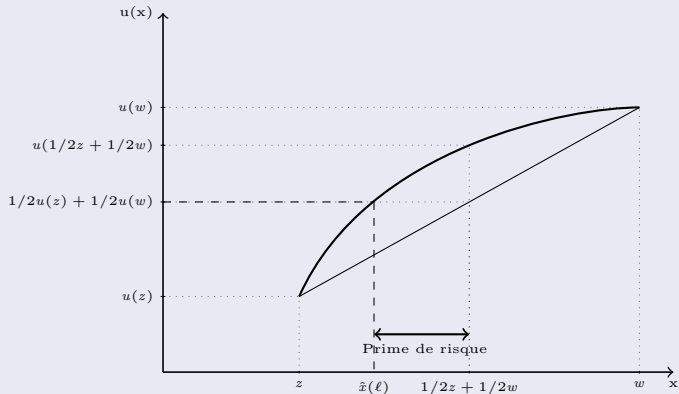
$$E[u(P + E(\ell))] = u(P + E(\ell)) > E(u(P + \ell)) = u(P + \hat{x}(\ell))$$

$$u(P + [\alpha x + (1 - \alpha)y]) = u(\alpha(x + P) + (1 - \alpha)(y + P)) > \\ E(u(P + \ell)) = \alpha u(x + P) + (1 - \alpha)u(y + P)$$

$$z = x + P, w = y + P$$

$$u(\alpha z + (1 - \alpha)w) > \alpha u(z) + (1 - \alpha)u(w)$$





Exemple

- assurance tous risques et loto (lotto?)
- forme de u ?

▶ sauter la mesure d'aversion

Mesure d'aversion pour le risque

Définition

- P = patrimoine du décideur
- $\hat{x}(\ell)$ = équivalent certain de ℓ (on suppose $E(\ell) = 0$, s.p.d.g.)
- $u(P + \hat{x}(\ell)) = E[u(P + \ell)]$
 $u(P + \hat{x}(\ell)) = u(P - \pi(\ell))$ (car $E(\ell) = 0$ et $\pi(\ell) = E(\ell) - \hat{x}(\ell)$)
 $\Rightarrow u(P - \pi(\ell)) = E[u(P + \ell)]$

$$u(P - \pi(\ell)) = E[u(P + \ell)]$$

- développements limités
- $u(P) - \pi(\ell)u'(P) + o(\pi^2) = E[u(P) + \ell u'(P) + 1/2\ell^2 u''(P) + o(\ell^3)]$
- $-\pi(\ell)u'(P) \approx E(\ell)u'(P) + 1/2E(\ell^2)u''(P) = 1/2 \text{Var}(\ell)u''(P)$

Résultat

$$\pi(\ell) \approx 1/2 \text{Var}(\ell) \frac{-u''(P)}{u'(P)}$$

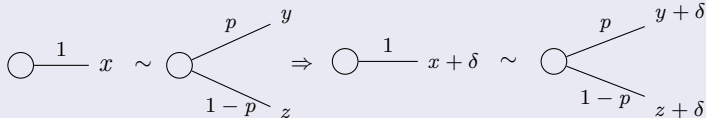
Mesure locale de l'aversion absolue pour le risque

$$r(P) = \frac{-u''(P)}{u'(P)}$$

Cas Particulier Important (CARA)

Théorème (Arrow-Pratt)

Si le décideur respecte l'axiome (A6) $\forall x, y, z, \delta \in \mathbb{R}$ et $\forall p \in [0; 1]$:



Alors sa fonction d'utilité est nécessairement du type :

- soit $u(x) = -e^{-\tau x}$ si $\tau > 0$ (aversion pour le risque)
- soit $u(x) = x$ (neutralité vis-à-vis du risque)
- soit $u(x) = e^{-\tau x}$ si $\tau < 0$ (goût pour le risque)

Fonctions d'utilité CARA

Intérêt

- simplification de l'encodage si A6 est admis
- prix d'achat maximum de toute loterie est identique à son prix de vente minimal
- pour une loterie se présentant sous la forme d'une loi normale on a exactement : $\hat{x}(\ell) = \mu - 1/2\tau\sigma^2$
- politique de gestion des risques dans une entreprise

Application à la Finance

Choix de portefeuille

- actif sans risque (rendement nul)
- actif risqué (rendement aléatoire)

Diversification mono-périodique

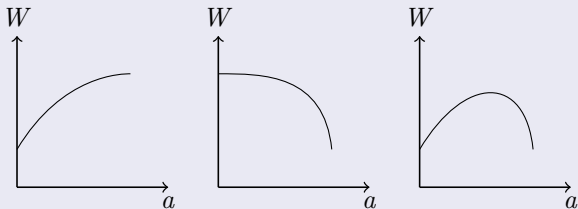
- P : richesse initiale
- a : montant investi dans l'actif risqué
- \tilde{x} : rendement de l'actif risqué,
- \tilde{Y} : richesse finale

Analyse

- \tilde{Y} : richesse aléatoire en fin de période
- $\tilde{Y} = (P - a) + (1 + \tilde{x})a = P + a\tilde{x}$
- Problème

$$\max_{a \in [0; P]} W(a) = E[u(\tilde{Y})] = E[u(P + a\tilde{x})]$$

- $W'(a) = E[\tilde{x}u'(P + a\tilde{x})]$
- $W''(a) = E[\tilde{x}^2u''(P + a\tilde{x})]$
- Aversion au risque : $u' > 0$ et $u'' < 0$
- $W''(a)$ est négative (W' décroissante)

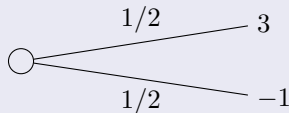


- optimum en $a = 0 \Leftrightarrow W'(0) < 0$
- $W'(a) = E[\tilde{x}u'(P + a\tilde{x})]$
- $W'(0) = E(\tilde{x})u'(P) < 0 \Leftrightarrow E(\tilde{x}) < 0$

Résultat (de base en Finance)

Un investisseur vN-M averse au risque diversifie dans l'actif risqué dès lors que le rendement espéré de l'actif risqué est supérieur au rendement de l'actif sans risque

Risk-sharing



$u(\cdot)$	I_1	I_2
3	1	1
1,5	0,7	0,6
0	0	0
-0,5	-0,35	-0,4
-1	-1,5	-1,2

- $E(u_1) < 0$, $E(u_2) < 0$
- il existe un partage du risque (ici 50% / 50%) mutuellement profitable
- vrai dans le cas général



C'EST
TOUT
POUR
AUJOURD'
HUI.