Décision dans l'incertain

Une courte introduction

Denis Bouyssou

CNRS
Paris, France

LAMSADE — septembre 2007

Plan

Décision dans l'Incertain

Contexte

- impossibilité de prévoir avec certitude les conséquences de la mise à exécution d'une décision
- pas de probabilités
- la Nature décide de tout ce qui n'est pas sous mon contrôle
- les conséquences de mes décisions dépendent à la fois de mes décisions et des décisions de la Nature (« états de la Nature » ou « scénarios »)
- la Nature est indolente (beurrer sa tartine du côté Pile n'implique pas qu'elle tombera du côté Pile en cas de chute)

Problème

- on doit choisir une action avant d'avoir connaissance de la décision de la Nature

Modélisation

Modélisation

- A : ensemble d'actions. Un élément $a \in A$ représente une action qu'il est possible pour vous de mettre à exécution
- E : ensemble d'états de la nature. Un élément $e \in E$ représente une décision que peut prendre la Nature et susceptible d'influencer les conséquence de l'exécution de l'une, au moins, des actions de A
- X : ensemble de conséquences
- c : fonction associant à chaque couple de $A \times E$ un élément de X

Matrice de décision (cas fini : m actions, n états)

Matrice de décision

c	e_1	e_2	$\cdots$	e_i	$\cdots$	e_n
a_1	$c(a_1, e_1)$	$c(a_1, e_2)$	$\cdots$	$c(a_1, e_i)$	$\cdots$	$c(a_1, e_n)$
a_2	$c(a_2, e_1)$	$c(a_2, e_2)$	$\cdots$	$c(a_2, e_i)$	$\cdots$	$c(a_2, e_n)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
a_j	$c(a_j, e_1)$	$c(a_j, e_2)$	$\cdots$	$c(a_j, e_i)$	$\cdots$	$c(a_j, e_n)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
a_m	$c(a_m, e_1)$	$c(a_m, e_2)$	$\cdots$	$c(a_m, e_i)$	$\cdots$	$c(a_m, e_n)$

Remarque

L'obtention d'une telle « matrice de décision » requiert, en pratique, un lourd travail de modélisation

Exemple : Confection d'une omelette

L'omelette

$A = \{\text{Saladier}, \text{Poubelle}, \text{Bol}\}$
$E = \{\text{Bon}, \text{Mauvais}\}$

c	Bon	Mauvais
Saladier	O. de 6	Pas d'O.
Poubelle	O. de 5	O. de 5
Bon	O. de 6 + Bol à laver	O. de 5 + Bol à laver

Remarques

- pas de probabilités
- goûts et croyances
- possibilité d'acquérir de l'information (expérimentation)

Exemples

Décision bancaire

	Défaillant	$\overline{\text{Défaillant}}$
Accepter	...	...
Refuser	...	...
Accepter avec garantie	...	...

Décision marketing

	Réussite	$\overline{\text{Réussite}}$
Lancer	...	...
$\overline{\text{Lancer}}$	...	...

Exemple

Exemple

$X = \mathbb{R}$, la préférence croît avec les valeurs (€)

c	e_1	e_2	e_3
a_1	40	70	-20
a_2	-10	40	100
a_3	20	40	-5

Critères classiques

- aucune information concernant la vraisemblance relative des divers états de la Nature
- dominance (rare !)

aller plus vite

Dominance

Definition

$a \in A$ domine (strictement) $b \in A$ ($a \; D \; b$) si :

- $c(a,e) \geq c(b,e), \forall e \in E$,
- $\exists e \in E$ tel que $c(a,e) > c(b,e)$

Remarque

D est une relation binaire transitive et asymétrique

Definition

$a \in A$ est efficace si elle n'est dominée par aucune autre action de A. Lorsque A et E sont finis, l'ensemble des actions efficaces $A^* \subseteq A$ défini par :

$$A^* = \{a \in A : \text{Non}[b \; D \; a], \forall b \in A\}$$

est toujours non vide

Dominance

Remarques

- $a\ D\ b \Rightarrow a \succ b$, quelle que soit la vraisemblance relative des divers états de la Nature
- dans les problèmes réels il est rare qu'une action en domine une autre et l'on a souvent $A^* = A$
- restreindre son attention au sous-ensemble A^* peut ne pas être pertinent si l'on a des doutes sur la faisabilité des actions de A. L'ensemble A^* peut ne pas contenir les « brillants seconds »
- mêmes difficultés qu'en multicritère

Exemple

c	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
a	100	100	100	100	100	100
b	99	99	99	99	99	99
c	$100,5$	0	0	0	0	0
d	0	$100,5$	0	0	0	0

- $A = \{a, b, c, d\}$
- $A^* = \{a, c, d\}$ car $a \; D \; b$
- b est un « brillant second »

Critère de Wald (Max Min)

Idée

- prudence : fonder son choix sur la situation la pire (Max Min)
- choisir toute action $a \in A$ solution de :

$$\max_{a \in A} \min_{e \in E} c(a, e)$$

Exemple

choisir a_3
(perte maximale $= -5$)
a_1 (perte maximale $= -20$)
a_2 (perte maximale $= -10$)

c	e_1	e_2	e_3	min
a_1	40	70	-20	-20
a_2	-10	40	100	-10
a_3	20	40	-5	-5

Remarques

- mauvaise utilisation de l'information
- aucune compensation possible entre les conséquences sur les divers états de la nature
- prime au *statu quo*
- suppose seulement que X est ordonné

Exemple

c	e_1	e_2	e_3	$\dots$	$e_{1\,000}$
a	-100	$10\,000$	$10\,000$	$\dots$	$10\,000$
b	-99	-99	-99	$\dots$	-99

Autres critères

- Max Max
  - dual optimiste du Max Min
- Hurwicz
  - « compromis » entre Max Min et Max Max
- Laplace
  - EMG avec probabilités égales (principe de « raison insuffisante »)

aller plus vite

Critère du Max Max

Idée

- optimisme : fonder son choix sur la situation la meilleure (Max Max)
- choisir toute action $a \in A$ solution de :

$$\max_{a \in A} \max_{e \in E} c(a, e)$$

Exemple

choisir a_2
(gain maximal $= 100$)
a_1 (gain maximal $= 70$)
a_3 (gain maximal $= 40$)

c	e_1	e_2	e_3	max
a_1	40	70	-20	70
a_2	-10	40	100	100
a_3	20	40	-5	40

Remarques

- mauvaise utilisation de l'information
- aucune compensation possible entre les conséquences sur les divers états de la nature
- suppose seulement que X est ordonné

Critère de Hurwicz

Idée

- compromis entre prudence (Max Min) et optimisme (Max Max)
- étant donné un nombre $\alpha \in [0;1]$ appelé « coefficient de pessimisme », choisir toute action $a \in A$ solution de :

$$\max_{a \in A} \left[\alpha \min_{e \in E} c(a,e) + (1-\alpha) \max_{e \in E} c(a,e) \right]$$

$\alpha = 1/2$

Choisir a_2 $(90/2 = 45)$
a_1 $(50/2)$
a_3 $(35/2)$

c	e_1	e_2	e_3	min	max	$\alpha = 1/2$
a_1	40	70	-20	-20	70	25
a_2	-10	40	100	-10	100	45
a_3	20	40	-5	-5	40	$17,5$

Remarques

- mauvaise utilisation de l'information
- compromis entre deux mauvaises solutions
- X doit avoir une structure légitimant l'opération de combinaison linéaire !
- détermination pratique du coefficient de pessimisme α ?

Critère de Savage (Min Max Regret)

Idée

- critère adapté aux univers « bureaucratiques »
- choix de a_2 et e_1 survient
  - meilleure décision : a_1 (40)
  - décision prise : a_2 (-10)
  - regrets : $40 - (-10) = 50$

c	e_1	e_2	e_3
a_1	40	70	-20
a_2	-10	40	100
a_3	20	40	-5

Définition

Choisir toute action de $a \in A$ solution de :

$$\min_{a \in A} \max_{e \in E} R(a, e)$$

avec

$$R(a, e) = \max_{b \in A} c(b, e) - c(a, e)$$

Exemple

c	e_1	e_2	e_3
a_1	40	70	-20
a_2	-10	40	100
a_3	20	40	-5

R	e_1	e_2	e_3	max
a_1	0	0	120	120
a_2	50	30	0	50
a_3	20	30	105	105

Choisir a_2 (regret maximum 50) a_1 (120), a_3 (105)

Remarques

- ce critère distinct du Max Min (choix de a_3)
- X doit avoir une structure légitimant d'effectuer des différences
- la différence doit « mesurer » les regrets de façon adéquate
- le choix dépend de l'ensemble des actions de A. L'adjonction de nouvelles actions peut modifier le choix de façon imprévisible

Exemple

c	e_1	e_2
a_1	8	0
a_2	2	4

R	e_1	e_2	max
a_1	0	4	4
a_2	6	0	6

- Choix de a_1

Exemple (ajout de a_3)

c	e_1	e_2
a_1	8	0
a_2	2	4
a_3	1	7

R	e_1	e_2	max
a_1	0	7	7
a_2	6	3	6
a_3	7	0	7

- Choix initial de a_1
- Choix de a_2 après ajout de a_3 !
- risque de « manipulations »

Critère de Laplace

Idée

- Principe de « raison insuffisante »

Déinition

Choisir toute action de A solution de :

$$\max_{a \in A} \sum_{e \in E} \frac{1}{|E|} c(a, e)$$

Exemple

Choisir a_2 (130/3)
a_1 (90/3)
a_3 (55/3)

c	e_1	e_2	e_3	
a_1	40	70	-20	90/3
a_2	-10	40	100	130/3
a_3	20	40	-5	55/3

Remarques

- X doit avoir une structure légitimant l'opération de combinaison linéaire !
- soit vous deviendrez Président de la République ivoirienne soit non. Peut-on pour autant considérer que ces deux états sont également vraisemblables ?
- critère sensible au choix, généralement arbitraire, du nombre des états de la Nature considéré (E peut toujours se subdiviser : « E et il pleuvra demain » et « E et il ne pleuvra pas demain »)
- l'espérance de gain est-elle un bon critère de choix même en supposant tous les états également vraisemblables ?

aller plus vite

Exemple de synthèse

Exemple

c	e_1	e_2	e_3	e_4
a	2	2	0	1
b	1	1	1	1
c	0	4	0	0
d	1	3	0	0

Résultats

- Wald : b
- Max Max : c
- Laplace : a
- Savage : d

Conclusion

Critères « classiques »

- aucun de ces divers critères n'est réellement satisfaisant !
  - nécessité de modéliser la vraisemblance relative des divers états de la nature (croyances)
  - nécessité de modéliser la désirabilité des conséquences (goûts)

Questions centrales

- pourquoi n'y-a-t-il pas de probabilités ?
- d'où viennent les probabilités ?

En pratique

- état le plus vraisemblable + analyses de sensibilité ?

Rappels

Expérience aléatoire

- expérience dont on ne peut prévoir le résultat avec certitude avant de l'effectuer

Exemples

- jet d'une pièce de monnaie
- cours du $/€ dans un an
- ventes au cours du mois prochain

Définitions

- S : ensemble d'événements élémentaires = ensemble de tous les résultats possibles de l'expérience aléatoire.
  - jet d'un pièce : $S = \{P; F\}$
  - jet de dé : $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
  - cours du \$/€ dans un an : $S = \mathbb{R}_+$
- $\mathcal{S}$: ensemble d'événements construit sur la base de S (permettant de parler de la réunion, l'intersection, etc. d'événements élémentaires)

Propriétés

- $S \in \mathcal{S}$
- $A \in \mathcal{S} \Rightarrow S \setminus A \in \mathcal{S}$
- $A, B \in \mathcal{S} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{S}$

(tribu, σ-algèbre)

Définition

Une probabilité P est une fonction de $\mathcal{S}$ dans $\mathbb{R}$, associant à chaque événement A sa probabilité $P(A)$ et telle que :

1. $P(A) \geq 0$
2. $P(S) = 1$
3. $A \cap B = \varnothing \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

(Axiomes de Kolmogorov)

Résultats

- nombreux !
- se déduisent logiquement à partir des axiomes de Kolmogorov

aller plus vite

Rappels

Définition

La probabilité de « A sachant B », notée $P(A/B)$, est définie par :

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Propriété

$$P(A/B) = \frac{P(B/A)P(A)}{P(B)}$$

Formule des probabilités totales

Si $A_1, A_2, ..., A_n$ forment une partition de S alors :

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A/A_i)P(A_i)$$

Formule de Bayes

$$P(A/B) = \frac{P(B/A)P(A)}{\sum_{i=1}^{n} P(B/A_i)P(A_i)}$$

Probabilités ?

Source des probabilités ?

- deux écoles
  - école « logico-fréquentiste »
  - école « subjectiviste »

École Classique (« Logico-fréquentiste »)

Probabilité

- source logique
- source fréquentiste

Source logique

Principe de « raison insuffisante »

- $P(\text{Pile}) = P(\text{Face}) = 1/2$
- $P(E) = \text{Nombre de cas favorables}/\text{Nombre de cas possibles}$

Problèmes

- restreint aux « objets parfaits »
- portée limitée en pratique (ex. : cours du $/€ dans un an ?)
- problème de preuve (« objet parfait » ?)

École Classique (« Logico-fréquentiste »)

Source fréquentiste

Loi des grands nombres

- si l'on fait n répétitions *identiques et indépendantes* d'un événement E de probabilité p :

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\left|\frac{n(E)}{n} - p\right| > \varepsilon\right) = 0$$

- « si on ne connaît pas p, on fait un grand nombre d'expériences pour l'estimer »
- « estimer les probabilités par des fréquences »

Problèmes

- événements non « répétables »
- problème de preuve (passé = avenir)
- résultats $\neq$ si répétitions identiques ? (« Dieu joue-t-il aux dés ? »)
- rôle de l'information peu clair

Exemple : clou de tapissier

- 10 000 € si Pile
- −5 000 € si Face

Question

allez-vous accepter de faire 1 000 jets du clou de tapissier avant de vous décider ?

École Subjectiviste

Faits

- 2 personnes différentes et également rationnelles peuvent avoir des jugements de probabilité différents sur le même événement
- l'expérience transforme les jugements de probabilité (même si les expériences sont indépendantes) : cf. clou de tapissier
- le langage courant dispose d'une très grande richesse pour qualifier la vraisemblance d'un événement

Définition : probabilité subjective

- une probabilité est la mesure subjective qu'accorde un individu à la vraisemblance d'un événement

Probabilités subjectives

Problèmes

- pourquoi des probabilités ? (axiomes de Kolmogorov)
- comment mesurer de telles probabilités ?

Idée

- accepter de comparer des paris « incertains » avec des paris « risqués » (où les probabilités sont issues d'un mécanisme aléatoire incontestable : cartes, dés, urnes, etc.)

Comparaison

Hypothèse de « cupidité minimale »

- selon que la première loterie est ou non préférée à la seconde on aura $P(E) > p$ ou $P(E) < p$
- la probabilité subjective de l'événement est la valeur p qui assure l'indifférence entre ces deux loteries

Exemples d'utilisation

- SR sera-t-elle la prochaine Présidente de la République française ?

Problèmes

- ces nombres sont-ils des probabilités ?
- ces probabilités sont-elles de vraies probabilités ?
- justifications ?
- utilisation ?

Résultats

Idée

- ajouter à $L(X)$ des loteries « incertaines »
- imposer les axiomes A1-A5 (modifiés) sur ce nouvel ensemble

Théorème (Savage, Aunscombe-Aumann)

Il existe une fonction $u : X \to \mathbb{R}$ et une mesure de probabilité P sur $\mathcal{S}$ telle que la comparaison de deux loteries (risquées ou incertaines) se ramène à la comparaison de leurs espérances d'utilité (p pour les loteries risquées et P pour les loteries incertaines)

La mesure de probabilité est unique. La fonction d'utilité est définie à l'origine et à l'unité près

- goûts : u (subjectifs)
- croyances : P (subjectives)

Conséquence

- même analyse que dans le cas risqué en remplaçant « probabilités » par « probabilités subjectives »

Idée de la démonstration

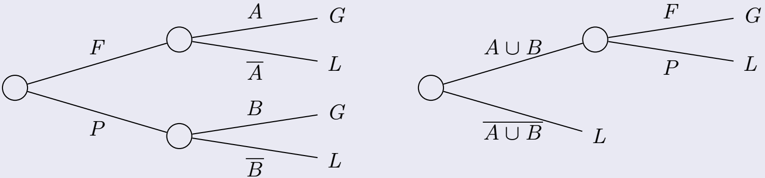
$$A \cap B = \varnothing \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Exemple ($A \cap B = \varnothing$)

L_1	F	P
A	G	L
B	L	G
A ou B	L	L

L_2	F	P
A	G	L
B	G	L
A ou B	L	L

A2 $\Rightarrow$ [G si Pile; L si Face] $\sim$ [L si Pile; G si Face]
A4 $\Rightarrow L_1 \sim L_2$



Conséquences

- $A4 \Rightarrow L_1 \sim L_2$
- Posons $u(G) = 1$ et $u(P) = 0$
- On a:

$$\begin{aligned} E[u(L1)] &= 0,5[P(A)u(G) + (1 - P(A))u(L)] + \\ &\quad 0,5[P(B)u(G) + (1 - P(B))u(L)] \\ &= 0,5[P(A) + P(B)] \\ E[u(L2)] &= 0,5P(A \cup B) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad P(A) + P(B) = P(A \cup B)$$

Problème : Paradoxe d'Ellsberg

Expérience : 90 boules dans une urne

- 30 Rouges
- 60 Noires ou Jaunes

Paris : choix entre

- a_1 : 100 \$ si Rouge ou a_2 : 100 \$ si Noire
- a_3 : 100 \$ si Rouge ou Jaune ou a_4 : 100 \$ si Noire ou Jaune

Résultats

- majorité des sujets : $a_1 \succ a_2$ et $a_4 \succ a_3$
- incompatible avec une préférence SEU

Analyse

- $E[u(a_1)] = P(R)u(100)$
- $E[u(a2)] = P(N)u(100)$
    - $a_1 \succ a_2 \Rightarrow P(R) > P(N)$
- $E[u(a_3)] = P(R)u(100) + P(J)u(100)$
- $E[u(a_4)] = P(N)u(100) + P(J)u(100)$
    - $a_4 \succ a_3 \Rightarrow P(N) > P(R)$
- aversion à l'ambiguïté (généralisation : CEU)

Urne d'Ellsberg

	R	N	J
a_1	100	0	0
a_2	0	100	0
a_3	100	0	100
a_4	0	100	100

Heuristiques et biais

- surconfiance
- ancrage
- similarité
- disponibilité
- perception de l'aléatoire

Les gens se plaignent souvent de leur mémoire. Ils se plaignent rarement de leur jugement

François de la Rochefoucauld
Maximes

aller plus vite

Surconfiance

Questions: IC à 98%

- Nombre d'œufs produits aux U.S.A. en 1965 (en millions)
- Nombre d'objets (lettres, paquets, etc.) acheminés par les PTT en France en 1985

Surconfiance

Réponses

- Nombre d'œufs produits aux U.S.A. en 1965 (en millions) 64 588
- Nombre d'objets (lettres, paquets, etc.) acheminés par les PTT en France en 1985 15 940 000 000

Surconfiance

Analyse

- Nombre d'œufs produits aux U.S.A. en 1965 (en millions) 64 588

Calcul

- 200 millions d'habitants
- 365 jours / an
- 1 œuf / jour / personne

$\Rightarrow$ 73 000 millions d'œufs produits par an (64 588)

Idée

- une combinaison de valeurs non invraisemblables ne doit pas être jugée invraisemblable

Analyse

- Nombre d'objets (lettres, paquets, etc.) acheminés par les P.T.T. en 1985 15 940 000 000

Calcul

- 50 millions d'habitants
- 365 jours / an
- 1 lettre / jour / personne

$\Rightarrow$ 18 250 millions d'objets (15 940)

Exemples

Déclarations

- *"Heavier-than-air flying machines are impossible"*
  Lord Kelvin, President of the British Royal Society, 1895
- *"A severe depression like that of 1920–21 is outside the range of probability"*
  Harvard Economic Society, 16 November 1929

Ancrage

Idée

- pour réaliser une estimation on utilise souvent l'heuristique suivante
  - on recherche dans la mémoire une situation semblable (Ancrage)
  - on ajuste pour tenir compte des spécificités de la situation actuelle (Ajustement)

Heuristique = Ancre + Ajustement

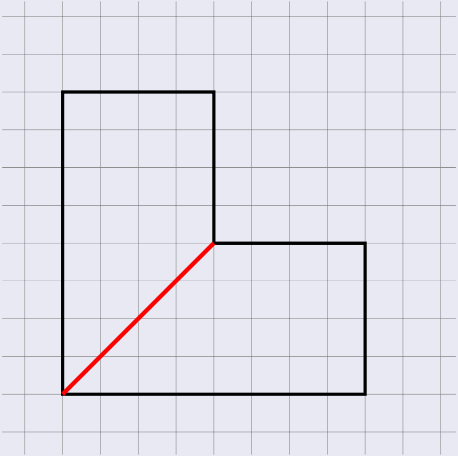
- manipulations possibles de l'ancre
- insuffisance de l'ajustement

Calcul mental : 5 secondes pour évaluer 8!

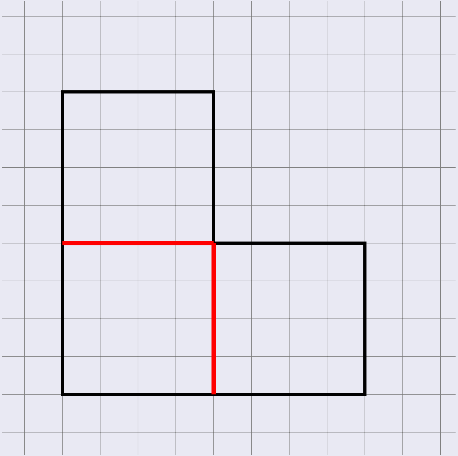
- condition 1 : $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$
  valeur moyenne $= 2\,250$
- condition 2 : $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8$
  valeur moyenne $= 512$
- $8! = 40\,320$!

Ancrages

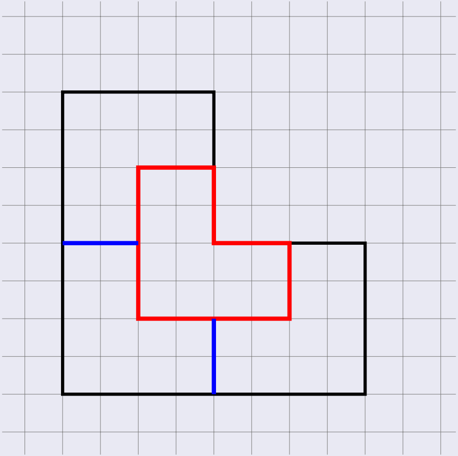
- donnée parasite
- donnée concrète



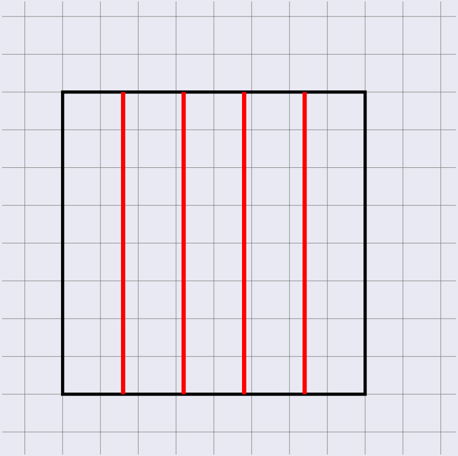
Découper en deux parties égales et superposables



Découper en trois parties égales et superposables



Découper en quatre parties égales et superposables



Découper en cinq parties égales et superposables

Similarité

Portrait

Voici le portrait rapide établi par un psychologue d'une personne de nationalité française :

> *Paul a 35 ans. Sa vue n'est pas excellente : il porte des lunettes. Il est plutôt introverti voire timide. Il marche un peu voûté et parle avec le sourire. Paul est fort aimable et s'exprime avec aisance. Il aime l'ordre et le rangement*

Question : selon vous Paul est-il ?

- Avocat
- Médecin
- Libraire
- Agriculteur

sachant que l'on est certain qu'il exerce une de ces professions

Idée

- pour réaliser une estimation on se fonde souvent sur des situations « similaires » à celle que l'on doit juger
- cette similarité fait largement appel à des stéréotypes

$$P(A/B) = f(\text{degré avec lequel } A \text{ ressemble à } B)$$

$$P(A/B) = \frac{P(B/A)P(A)}{P(B)}$$

Similarité

Analyse

- réponse modale = Libraire (le stimulus correspond à l'« archétype » d'un libraire)
- hypothèses :
  - $P(S/L) = 0,9$
  - $P(S/Ag) = 0,1$
  - $P(L) = 0,0005$ (600 librairies générales en France)
  - $P(Ag) = 0,015$ (3% d'agriculteurs dans la population active)
- conclusion :

$$P(L/S) = \frac{P(L)P(S/L)}{P(S)} = 0,00045/K$$

$$P(Ag/S) = \frac{P(Ag)P(S/Ag)}{P(S)} = 0,0015/K$$

Similarité

Question : Classer ces événements par ordre de vraisemblance

- A : Tirer une boule R d'une urne 50 R/50N
- B : Tirer 7 fois de suite une boule R d'une urne 90R/10N
- C : Tirer au moins une R dans 7 tirages dans une urne 10R/90N

Réponse modale : $B \rhd A \rhd C$

- $P(C) = (1 \times 0,9)^7 = 0,521$
- $P(B) = 0,9^7 = 0,478$
- $P(A) = 0,5$

Similarité

Question : Classer ces événements par ordre de vraisemblance

Linda a 26 ans. Elle est américaine. C'est une femme brillante et active. Elle a obtenu un MBA d'une université prestigieuse. Durant ses études elle a été très active dans divers mouvements féministes en anti-racistes.

Question : Classer ces événements par ordre de vraisemblance

a Linda est institutrice

b Linda travaille dans une librairie et fait du Yoga

c Linda est active dans le mouvement écologiste

d Linda est assistante sociale

e Linda est banquière

f Linda vend des polices d'assurance

g Linda est membre de la NAACP

h Linda est banquière et active dans le mouvement écologiste

Réponse modale: $h \triangleright e \triangleright c$

Disponibilité

Idée

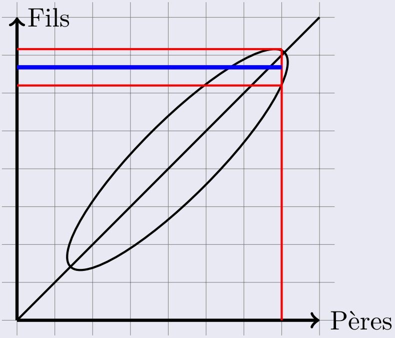
- la facilité avec laquelle une information « vient à l'esprit » est souvent un élément central dans notre recherche d'information

Question

- y-a-t-il plus de mot en anglais avec un r en troisième position ou un r en première position ?
- y-a-t-il plus de morts causées par des cancers du poumon ou des accidents de voitures ?

Régression à la moyenne

- en moyenne, les enfants de parents exceptionnellement grands sont moins grands que leurs parents



Incitations

- après une performance très bonne, on doit s'attendre à une performance moins bonne
- après une performance très mauvaise, on doit s'attendre à une performance meilleure

Problème

- « se reposer sur ses lauriers »
- « se ressaisir »

Récompenses

"With all due respect, Sir, what you are saying is really for the birds. I've often praised people warmly for beautifullly excecuted maneuvers and the next time they almost always do worse. And I've screamed at pupils for badly excecuted maneuvers, and, by and large, the next time they improve. Don't tell me that reward works and punishments doesn't. My experience contradicts it"

An Israeli Defense Force Flight Instructor (1965)

Valeur de l'information

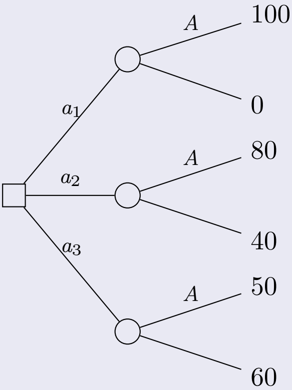
Problème

	A	$\overline{A}$
	$0,5$	$0,5$
a_1	100	0
a_2	80	40
a_3	50	60

Hypothèse

- individu respectant A1–A5 et neutre vis-à-vis du risque (EMG)

Arbre de décision



Sans Information

Analyse

- a_1 : 50
- a_2 : 60
- a_3 : 55

	A 0, 5	$\overline{A}$ 0, 5	EMG
a_1	100	0	50
a_2	80	40	60
a_3	50	60	55

Valeur Espérée Sans Information

$$VESI = \max_{a \in A} \sum_{e \in E} p(e)c(a, e)$$

$VESI = 60\ (a_2)$

Acquisition d'information

3 stratégies

- contrôle
- information parfaite
- information imparfaite

Contrôle

Question

- prix maximal d'un contrat garantissant le choix de l'état de la nature avant la décision
- assurance, couverture sur marché à terme, etc.

Analyse

- prix du contrat $= x$
- Valeur Avec Contrôle : VAC

$$VAC(x) = \max_{a \in A} \max_{e \in E} c(a, e) - x$$

- $VAC(x) = VAC(0) - x = 100 - x$
- contrat avantageux tant que $VAC(x) > VESI$
- prix maximal x^* est tel que $VAC(x^*) = VESI$
- $x^* = VAC(0) - VESI = 40 = VC$
- $VC =$ Valeur de Contrôle du problème

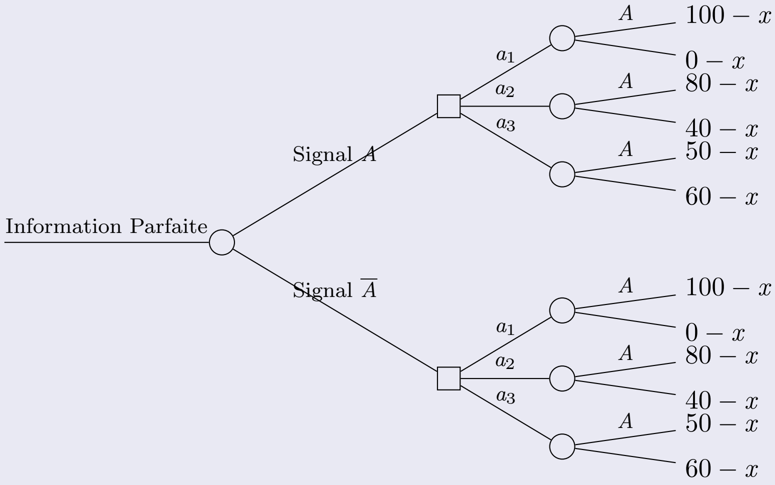
Remarques

- $VC \geq 0$
- VC est une borne supérieure à tout achat d'information (sondage, études, etc.) relativement à l'occurrence de l'événement A
- règle de décision : si coût d'une étude $> VC \Rightarrow$ refuser l'étude !

Information parfaite

Question

combien suis-je prêt à payer un contrat garantissant que je connaîtrai avec certitude avant de me décider la décision que prendra la Nature (A ou $\overline{A}$) ?


Information Parfaite
Signal A
Signal $\overline{A}$
a_1
a_2
a_3
a_1
a_2
a_3
A
$100 - x$
$0 - x$
A
$80 - x$
$40 - x$
A
$50 - x$
$60 - x$
A
$100 - x$
$0 - x$
A
$80 - x$
$40 - x$
A
$50 - x$
$60 - x$

Analyse

- $P(A/\text{Signal} = A) = 1,\ P(\overline{A}/\text{Signal} = A) = 1$
- $P(\overline{A}/\text{Signal} = \overline{A}) = 1,\ P(A/\text{Signal} = \overline{A}) = 1$

$$\begin{aligned}
P(A) &= P(A/\text{Signal} = A)P(\text{Signal} = A) + \\
&\quad P(A/\text{Signal} = \overline{A})P(\text{Signal} = \overline{A}) \\
P(A) &= P(\text{Signal} = A) \\
P(\overline{A}) &= P(\text{Signal} = \overline{A})
\end{aligned}$$

Analyse

- si Signal $= A \Rightarrow a_1 \ (100 - x)$
- si Signal $= \overline{A} \Rightarrow a_3 \ (60 - x)$
- Valeur Espérée Avec Information Parfaite ($VEAIP$)

$$VEAIP(x) = \sum_{e \in E} \left[\max_{a \in A} c(a, e) \right] - x$$

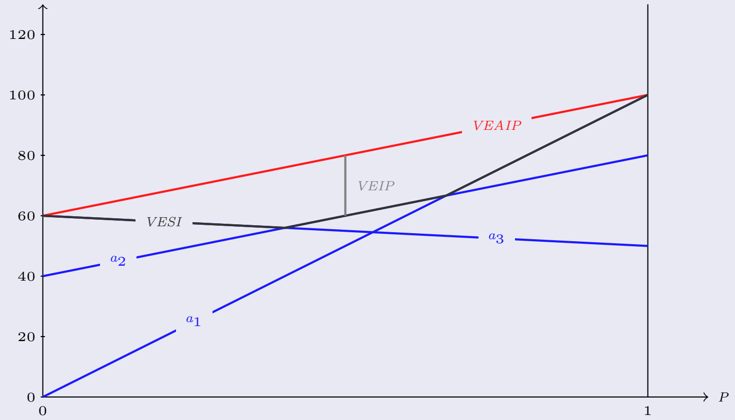
- $VEAIP(x) = P(\text{Signal} = A)(100 - x) + P(\text{Signal} = \overline{A})(60 - x) = 80 - x$
- prix maximal x^* tel que $VEAIP(x^*) = VESI$
- EMG : $x^* = VEAIP(0) - VESI = VEIP$
- $VEIP = VEAIP(0) - VESI = 80 - 60 = 20$

Remarques

- $VC \geq VEIP \geq 0$
- $VEIP$ est une borne supérieure à tout achat d'information relativement à l'occurrence de l'événement A
  - règle de décision : si coût d'une étude $>$ $VEIP \Rightarrow$ refuser l'étude !
- valeur $\Rightarrow$ ajustement (sans info. a_2, puis a_1 ou a_3)
  - si aucun signal possible ne conduit à remettre en cause son choix antérieur, l'information est de valeur nulle !
  - nature des études ?
- une source d'information qui enverrait un signal systématiquement erroné serait de même valeur pour nous (signal dichotomique)
  - pas de liens strict entre précision et valeur d'une information
- analyse de sensibilité : $P(A) = p$ et calcul de $VEIP$ en fonction de p

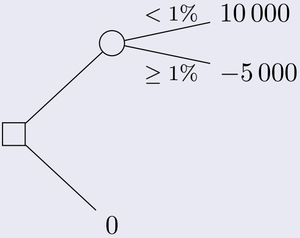
Problème

	A p	$\overline{A}$ $1-p$	EMG
a_1	100	0	$100p$
a_2	80	40	$40+40p$
a_3	50	60	$60-10p$
$VEAIP$	100	60	$60+40p$


120
100
80
60
40
20
0
0
1
P
VEAIP
VEIP
VESI
a_3
a_2
a_1

Remarques

- $VEIP \geq 0$: faux en situation de concurrence (assurance automobile)
- $VEIP = f$(Info initiale) mais f non nécessairement monotone (% de cygnes noirs dans un périmètre donné)



Valeur de l'information sans EMG

Exemple

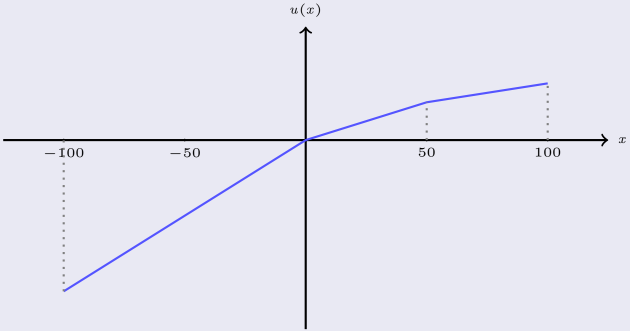
	A $0,8$	$\overline{A}$ $0,2$	EMG
a_1	40	-20	28
a_2	-5	100	16
a_3	0	0	0

$VESI = 28\ (a_1)$

Utilité

$$u(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0 \\ 0,5x & \text{si } 0 < x \leq 50 \\ 0,25x + 12,5 & \text{si } x > 50 \end{cases}$$

Fonction d'utilité : aversion pour le risque



$$u(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0 \\ 0,5x & \text{si } 0 < x \leq 50 \\ 0,25x + 12,5 & \text{si } x > 50 \end{cases}$$

	$c(A)$	$u(c(A))$	$c(\overline{A})$	$u(c(\overline{A}))$	$E(u)$
a_1	40	20	-20	-20	12
a_2	-5	-5	100	$37,5$	3,5
a_3	0	0	0	0	0

Résultats

- choix de a_1 et $UESI = 12$
- Prix de vente de la loterie $= u^{-1}(12) = 24$
- $VESI = 28$ (prime de risque $28 - 24 = 4$)

Analyse

- $UEAIP(x) = 0,8u(40 - x) + 0,2u(100 - x)$
- x^* (prix maximal de l'information parfaite) tel que :
  $0,8u(40 - x^*) + 0,2u(100 - x^*) = 12$
- Hypothèse $x^* < 40$:
  $0,8(20 - 0,5x^*) + 0,2(37,5 - 0,25x^*) = 12 \Rightarrow x^* = 25,555$
  $VEIP = 24$ (EMG)

	0,8	0,2
	A	$\overline{A}$
a_1	40	−20
a_2	−5	100
a_3	0	0

$$u(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0 \\ 0,5x & \text{si } 0 < x \leq 50 \\ 0,25x + 12,5 & \text{si } x > 50 \end{cases}$$

Information imparfaite

Analyse identique

- $P(A/\text{Signal} = A) < 1$
- $P(\overline{A}/\text{Signal} = \overline{A}) < 1$

Information imparfaite

Problème

- 1 000 urnes de 2 types
- 800 type I : 10 boules dont 4 rouges et 6 noires
- 200 type II : 10 boules dont 9 rouges et 1 noire
- Choix au hasard d'une urne

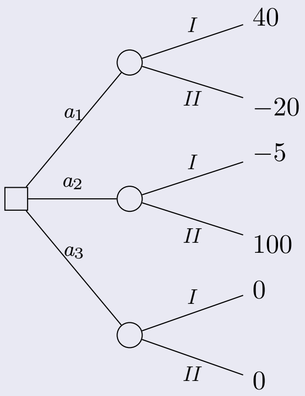
Choix

- a_1 parier que l'urne est de type I
- a_2 parier que l'urne est de type II
- a_3 ne pas parier

Question

- prix maximal que je suis prêt à payer pour tirer au hasard un boule dans l'urne avant de ma décider ?

aller plus vite


a_1
a_2
a_3
I
II
I
II
I
II
40
−20
−5
100
0
0

Exemple

	Type I $0,8$	Type II $0,2$	EMG
a_1	40	-20	28
a_2	-5	100	16
a_3	0	0	0

Information parfaite

- si Signal $=$ Type I : choisir a_1 $(40 - x)$
- si Signal $=$ Type II : choisir a_2 $(100 - x)$

$VEIP = 24$

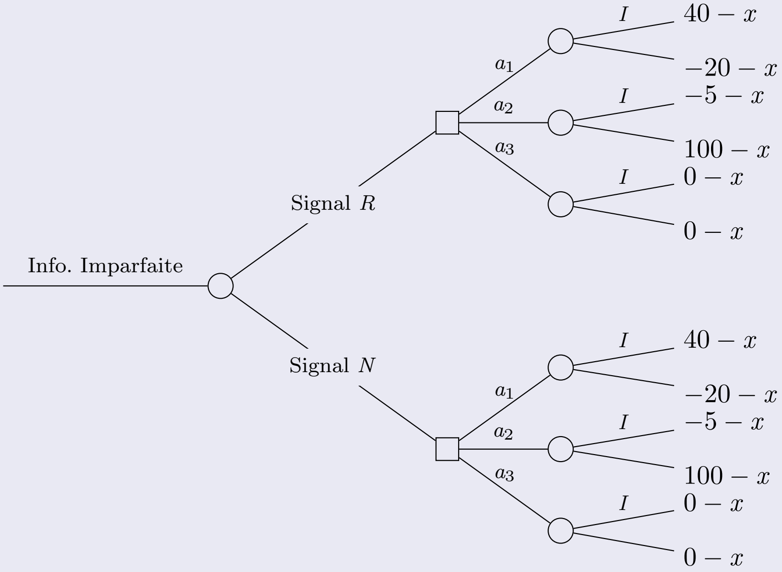
Information imparfaite

Analyse

- $VESI = 28$
- $VEIP = 24$

Problème

- l'expérimentateur vous propose alors avant de vous décidez de mettre la main dans l'urne et de prélevez une boule dont vous pourrez observer la couleur avant de vous décider
- combien êtes vous prêt à payer au maximum un tel contrat ? (information imparfaite)


Info. Imparfaite
Signal R
Signal N
a_1
a_2
a_3
I
$40 - x$
$-20 - x$
$-5 - x$
$100 - x$
$0 - x$
$0 - x$
a_1
a_2
a_3
I
$40 - x$
$-20 - x$
$-5 - x$
$100 - x$
$0 - x$
$0 - x$

Données

- $P(UI) = 0,8,\ P(UII) = 0,2$
- $P(R/UI) = 0,4,\ P(N/UI) = 0,6,$
- $P(R/UII) = 0,9,\ P(N/UII) = 0,1$

Conséquences

- $P(R) = P(R/UI)P(UI) + P(R/UII)P(UII) = 0,5$
- $P(N) = P(N/UI)P(UI) + P(N/UII)P(UII) = 0,5$
- $P(UI/R) = \frac{P(R/UI)P(UI)}{P(R)} = 0,64$ et $P(UII/R) = 0,32$
- $P(UI/N) = \frac{P(N/UI)P(UI)}{P(N)} = 0,96$ et $P(UII/R) = 0,04$

Si Signal $= R$

	Type I	Type II	EMG
	0,64	0,36	
a_1	40	-20	$18,4 - x$
a_2	-5	100	$32,8 - x$
a_3	0	0	$-x$

Si Signal $= N$

	Type I	Type II	EMG
	0,96	0,04	
a_1	40	-20	$37,6 - x$
a_2	-5	100	$0,8 - x$
a_3	0	0	$-x$

Valeur de l'information

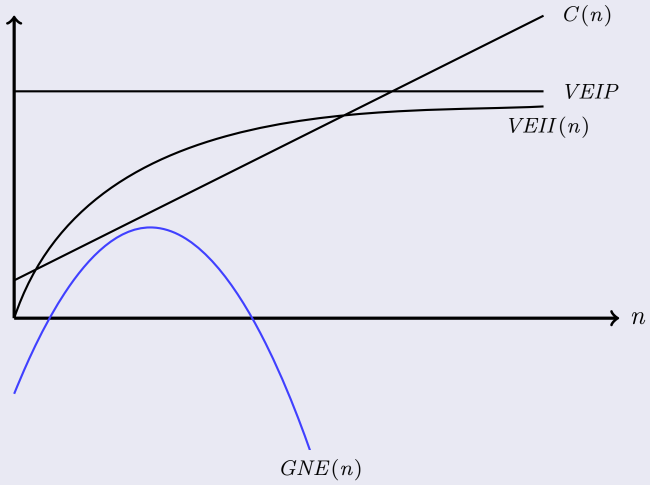
- $VEAII(x) = P(R)(32,8 - x) + P(N)(37,6 - x) = 35,2 - x$

$$VEAII(x) = \sum_{\sigma \in \Sigma} P(\sigma) \max_{a \in A} \left[\sum_{e \in E} P(e/\sigma) c(a,e) \right]$$

- contrat est avantageux tant que $VEAII(x) > VESI$
- prix maximal x^* tel que : $VEAII(x^*) = VESI$
- EMG : $x^* = VEAII(0) - VESI = 35,2 - 28 = 7,2 = VEII$

Remarques

- $VC \geq VEIP \geq VEII \geq 0$
- $VEIP/R$, $VEIP/N$, $VEIP/[R \text{ ou } N]$
- Statistique Bayésienne


C(n)
VEIP
VEII(n)
n
GNE(n)

Bilan

Théorie Bayésienne de la Décision

créativité	A
objectifs	X
croyances	P
goûts	u
évaluation	$E(u)$
information	VC, $VEIP$ et $VEII$

Extensions

Difficultés

1. plusieurs avis d'experts
2. plusieurs critères
3. situations de compétition

Partage des experts

Expert 1

	e_1 $0,8$	e_2 $0,2$	EU
a_1	10	0	8
a_2	4	8	$4,8$

Choix de a_1

Expert 2

	e_1 $0,2$	e_2 $0,8$	EU
a_1	0	10	8
a_2	8	4	$4,8$

Choix de a_1

Compromis : « couper la poire en deux »

	e_1 $0,5$	e_2 $0,5$	EU
a_1	5	5	5
a_2	6	6	6

Choix de a_2 !

Théorie de l'utilité multi-attribut

Idée

- les méthodes d'encodages d'une fonction d'utilité vN-M ne sont raisonnables « cogntivement » que si X est « unidimensionel »
- si $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_p$, décomposition de la fonction d'utilité en utilisant des hypothèses d'indépendance adéquate

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} k_i u_i(x_i) \qquad \text{forme additive}$$

$$(1+ku(x_1, x_2, \ldots, x_n)) = \prod_{i=1}^{n} k_i(1+kk_i u_i(x_i)) \quad \text{forme multiplicative}$$

Compétition

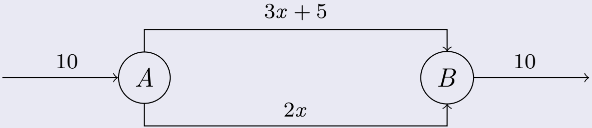
Problème

- réseau routier : point A vers point B
- 10 K usagers
- 2 itinéraires : haut et bas
- temps de transport sur un itinéraire (« cout ») dépend du nombre d'usagers w sur l'itinéraire
  - itinéraire haut : $3w + 5$
  - itinéraire bas : $2w$

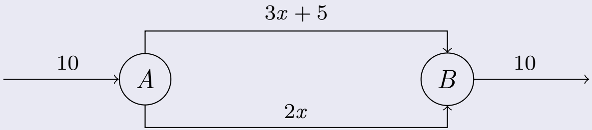
Question

- que se passe t-il dans un tel réseau ?

Réseau



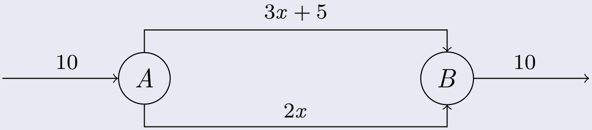
Situation 1



Régulation libérale

- usagers choisissent librement leur itinéraire en fonction de leur rapidité relative
- équilibre (loi dite de « Wardrope »)
  - coût des deux itinéraires identique
  - $3w + 5 = 2(10 - w) \Rightarrow w = 3$
  - 3 K usagers sur l'itinéraire du haut
  - $(10 - 3) = 7$ K usagers sur l'itinéraire du bas
  - chaque usager paye un « coût » de 14
- coût social $= 140$

Situation 2



Régulation bureaucratique

- régulateur installé au point A
- impose aux usagers un itinéraire
- cherche à minimiser le temps passé par la collectivité dans le réseau de transport

$$CT(w) = w(3w+5) + 2(10-w)^2 = 5w^2 - 35w + 200$$
$$CT'(w) = 10w - 35 = 0 \Rightarrow w = 3,5$$

Régulation bureaucratique

- $3,5$ K usagers sur l'itinéraire du haut payant chacun : $(3 \times 3,5 + 5) = 15,5$
- $6,5$ K usagers sur l'itinéraire du bas payant chacun : $2 \times 6,5 = 13$
- coût social $= 3,5(3 \times 3,5 + 5) + 2(10 - 3,5)^2 = 138,75 < 140$
- efficacité *versus* justice ?