# Théorie des Jeux

Décision dans l'incertain : *deux* « décideurs » dont l'un « indolent »

Théorie des Jeux : *plusieurs* décideurs dont aucun n'est indolent :

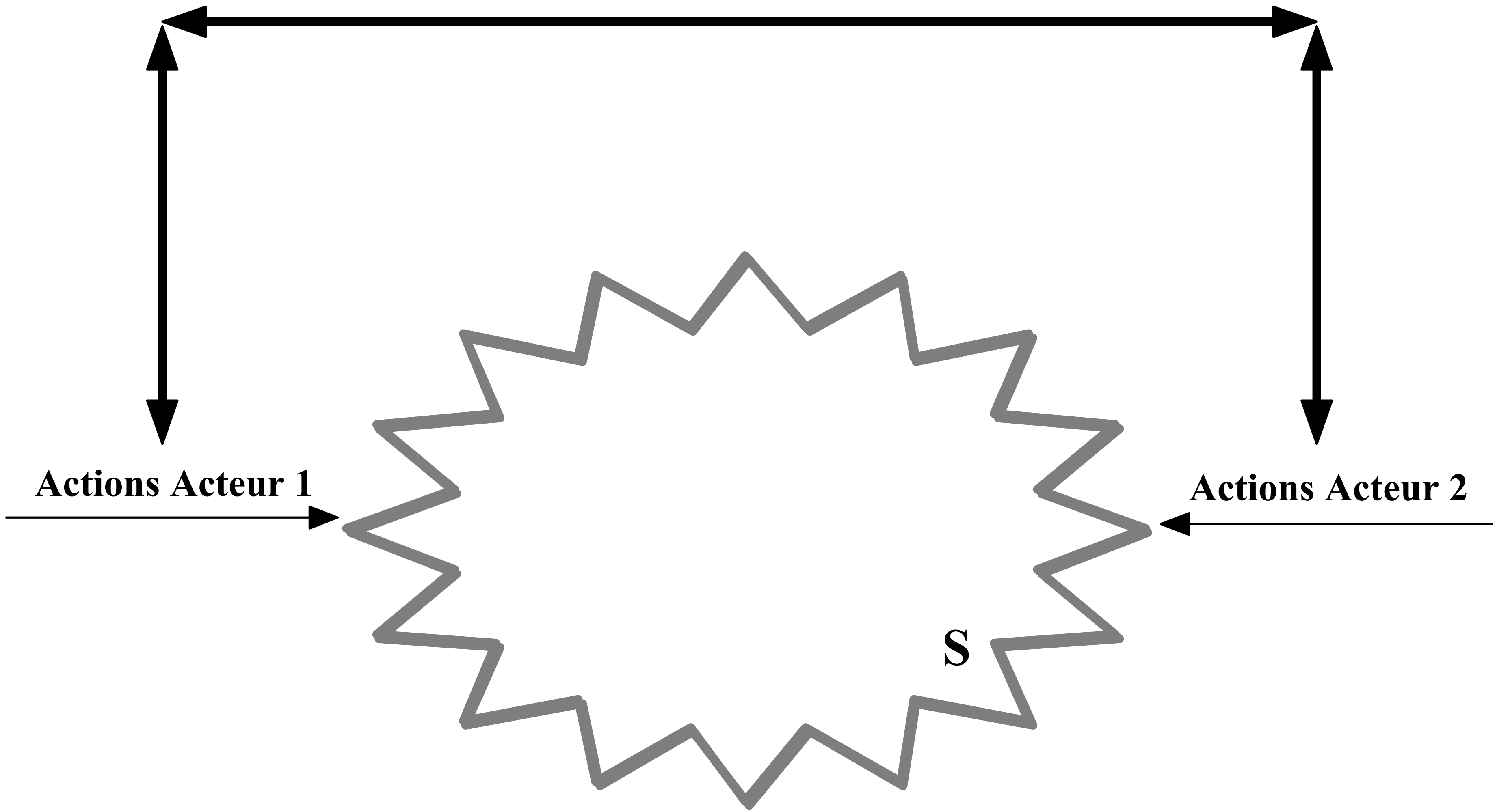
- compétition
- concurrence

Peu d'outils directement applicables pour :

- l'aide à la décision
- l'aide à la négociation

**Idée générale**

La notion de « comportement rationnel » devient singulièrement plus complexe dès lors que l'on suppose la présence de plusieurs individus

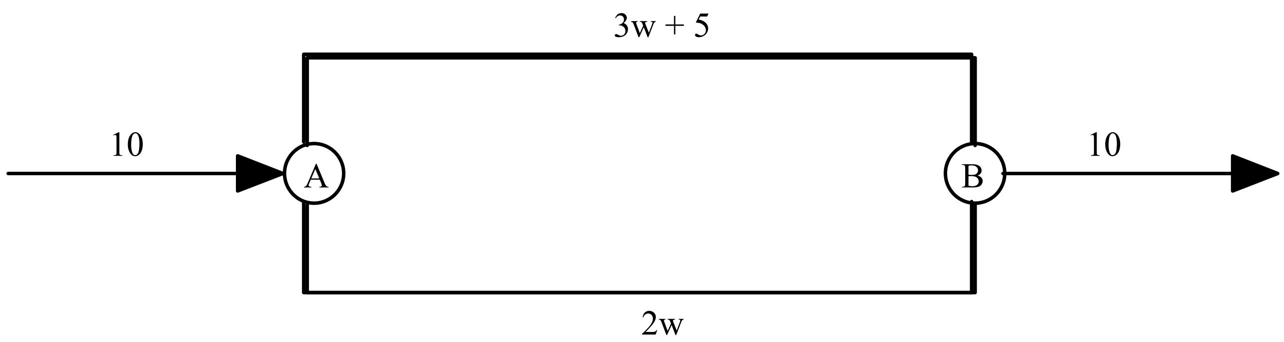

Actions Acteur 1
Actions Acteur 2
S

## Exemple : « Compétition » dans un réseau routier

**Réseau routier** : point A vers point B

- 10 Kusagers
- 2 itinéraires
- temps de transport sur un itinéraire (« coût ») = f(nb. d'usagers sur l'itinéraire)

$$\begin{cases} 3w + 5 \\ 2w \end{cases}$$



*Régulation libérale*

les usagers choisissent librement leur itinéraire en fonction de leur rapidité relative.

**Équilibre** (Loi dite de « Wardrope ») :
coût des deux itinéraires identique

$3w + 5 = 2(10 - w) \Rightarrow w = 3$

3 Kusagers sur l'itinéraire du haut
10 – 3 = 7 Kusagers sur l'itinéraire du bas

Chaque usager paye un « coût » de 14

Coût social = 140

*Régulation bureaucratique*

Un régulateur est installé au point A. Il impose aux usagers un itinéraire de manière à minimiser le temps passé par la collectivité dans le réseau de transport. Ce temps total s'écrit :

$CT(w) = w(3w + 5) + 2(10 - w)^2 = 5w^2 - 35w + 200$

Ce coût total est minimal pour :

$CT'(w) = 10w - 35 = 0 \Rightarrow w = 3{,}5$

3,5 Kusagers sur l'itinéraire du haut payant chacun un coût de :

$(3\times3{,}5 + 5) = 15{,}5$

6,5 Kusagers sur l'itinéraire du bas payant chacun $2\times6{,}5 = 13$

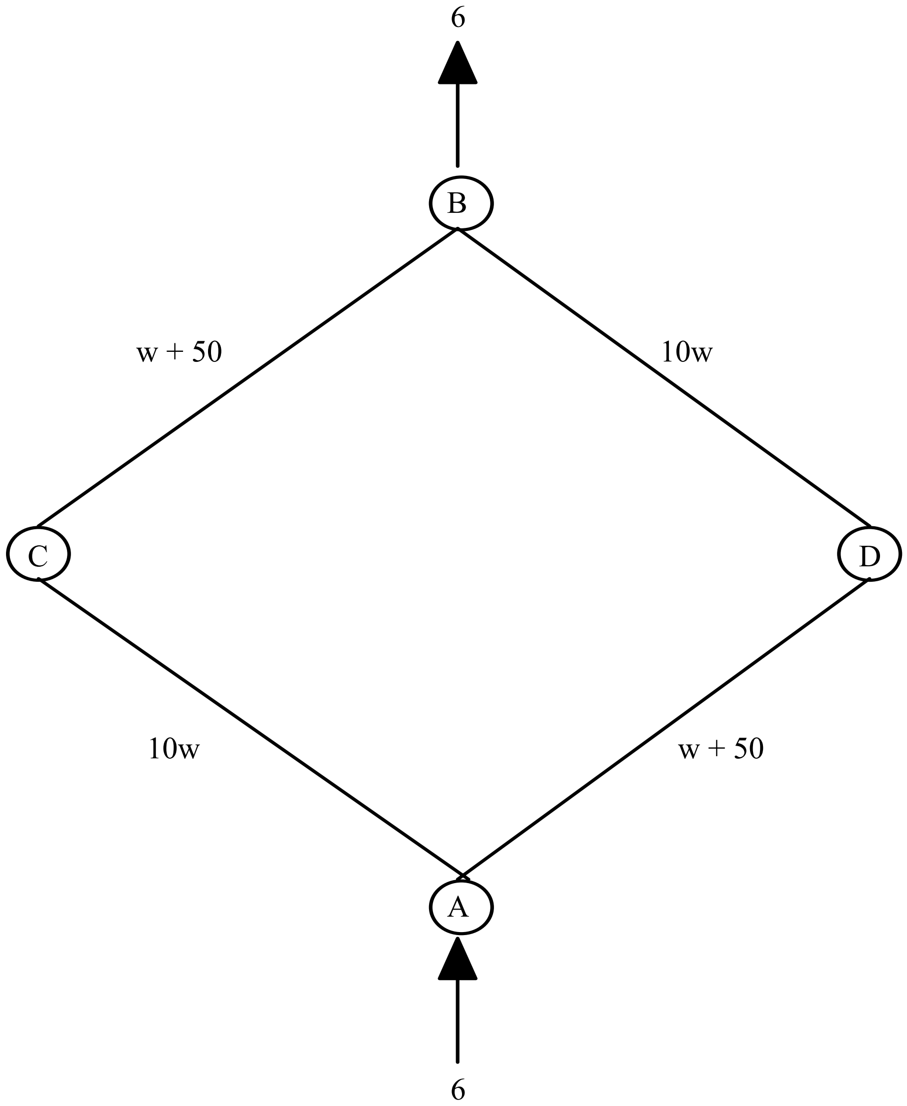
Coût social = $3{,}5(3\times3{,}5 + 5) + 2(10 - 3{,}5)^2 = 138{,}75$

**Efficacité *vs.* Justice ??**

# Exemple : Compétition dans un réseau routier (bis)

**Réseau routier** : point A vers point B

- 6 Kusagers
- 2 itinéraires passant par des points intermédiaires C et D
- Information parfaite


6
B
w + 50
10w
C
D
10w
w + 50
A
6

Régulation « libérale »

Équilibre :

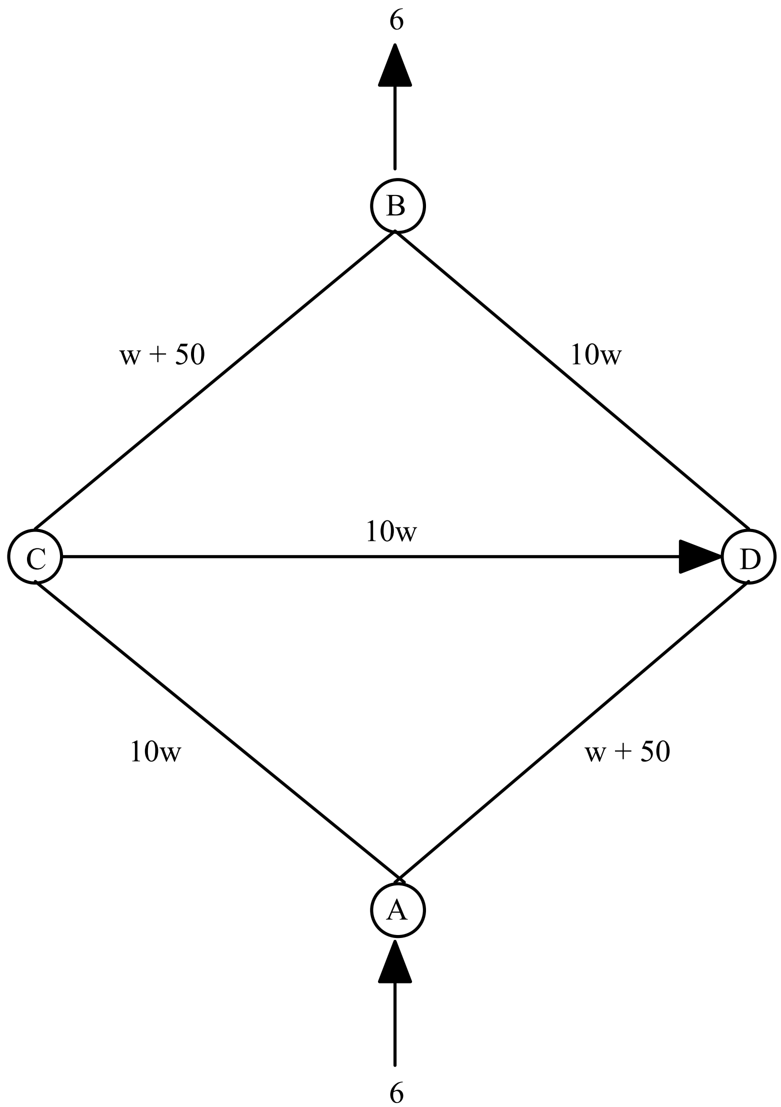
3 usagers sur ACB

3 usagers sur ADB

Coût par usager = $10 \times 3 + 50 + 3 = 83$

Coût total = $83 \times 6 = 498$

Nouvelle liaison rapide entre les points C et D


6
B
w + 50
10w
10w
C
D
10w
w + 50
A
6

3 itinéraires possibles pour se rendre de A à B :

- A C B ($w_1$ usagers)
- A D B ($w_2$ usagers)
- A C D B ($w_3$ usagers)

**Hypothèse** : Information parfaite mais *décision irrévocable* au point A (files distinctes)

**Coût par usager** :

- A C B : $c(1) = 10(w_1 + w_3) + w_1 + 50 = 11w_1 + 10w_3 + 50$,
- A D B : $c(2) = w_2 + 50 + 10(w_2 + w_3) = 11w_2 + 10w_3 + 50$,
- A C D B : $c(3) = 10(w_1 + w_3) + 10 + w_3 + 10(w_2 + w_3) =$

  $10w_1 + 10w_2 + 21w_3 + 10$

**Équilibre** :

$$11w_1 + 10w_3 + 50 = 10w_1 + 10w_2 + 21w_3 + 10,$$

$$11w_2 + 10w_3 + 50 = 10w_1 + 10w_2 + 21w_3 + 10,$$

$$w_1 + w_2 + w_3 = 6$$

**Solution** :

$$w_1 = w_2 = w_3 = 2$$

Coût par itinéraire = 92

Coût total = 6×92 = 552 > 498 !

# Typologie

- Nombre de joueurs (2 *vs* > 2)
- Coopératifs (possibilité de signer des accords impératifs) *vs* Non coopératifs
- Somme nulle *vs* Somme non nulle
- Absence de la Nature *vs* Présence de la Nature

- Type de jeux

## Jeux à information complète et parfaite

### Information complète

Chaque joueur connaît :

- les règles du jeu
- les conséquences du jeu pour lui et pour les autres
- les motifs des autres joueurs
- “Common Knowledge” : je sais qu’il sait que je sais qu’il sait …

### Information parfaite

- pas de coups simultanés. À chaque instant tout le monde connaît ce que les autres ont joué.

### Exemples

- Échecs, Dames, Go, Nim

**Exemple** : Jeu de Nim (bâtonnets)

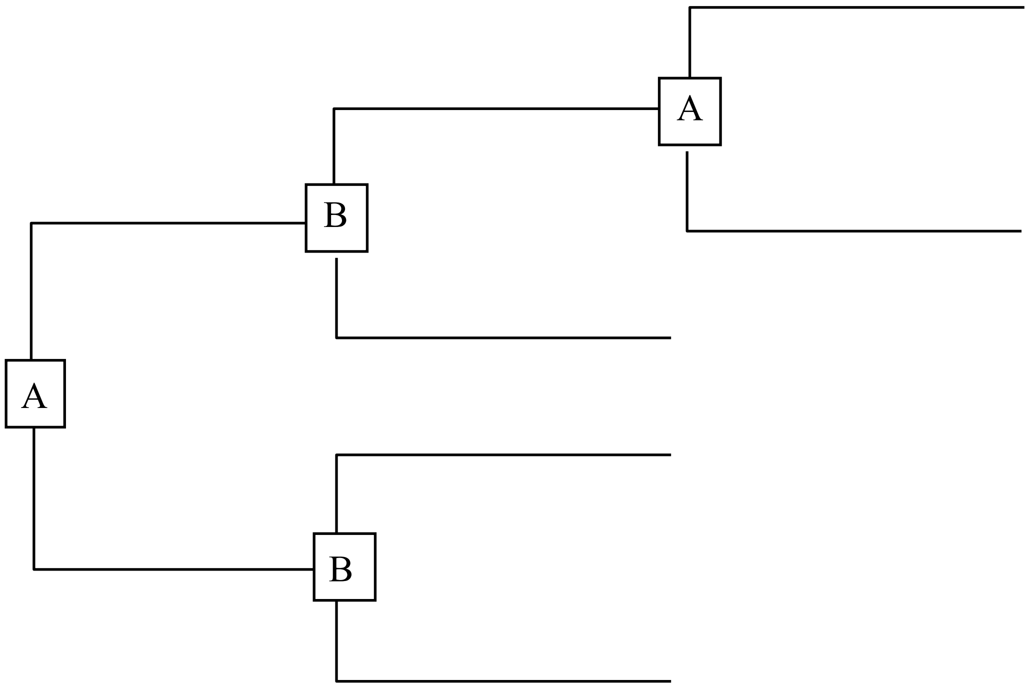
- 1 tas de bâtonnets
- 2 joueurs prennent à tour de rôle 1 ou 2 bâtonnets
- le joueur prenant le dernier bâtonnet gagne

| | |
|---|---|
| **1** | **G** |
| **2** | **G** |
| **3** | **P** |
| **4** | **G** |
| **5** | **G** |
| **6** | **P** |

**Conclusion** : si le nombre de bâtonnet est divisible par 3 le premier à jouer est **certain** de perdre

- **Méthode** : **récurrence à rebours** (“backwards induction”). On se place à la fin du jeu et on remonte peu à peu.

# Arbre de Jeu



**Théorème de Kuhn** : tout jeu **fini** à information complète et parfaite est soluble par récurrence à rebours

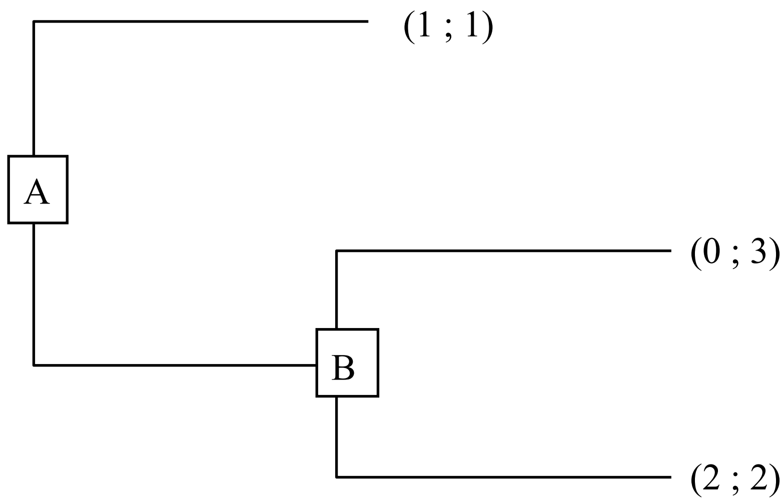
**Équilibre parfait**

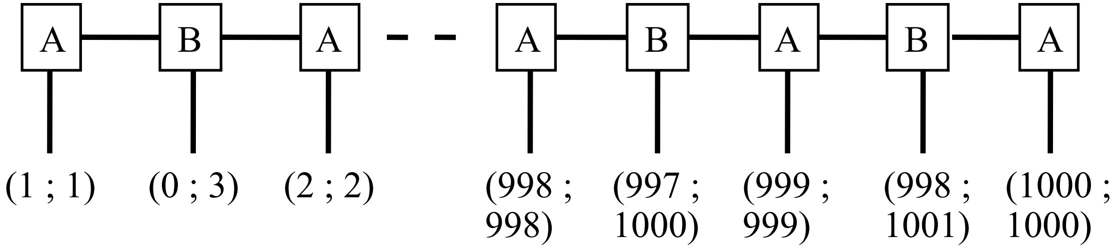
$\Rightarrow$ Le jeu est « résolu » dès le départ !

**Exemple** : Échecs (Théorème de Zermelo)

## Problèmes

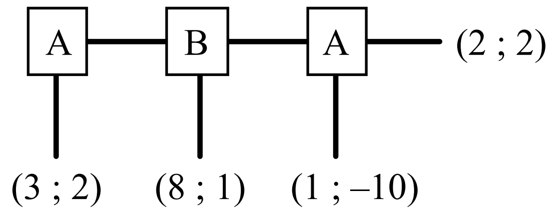
- Sélection si un joueur est indifférent entre deux conséquences
- Non optimalité du résultat


(1 ; 1)
A
(0 ; 3)
B
(2 ; 2)




- Répétition ?
- Main invisible ?

# Rationalité « Paradoxale »

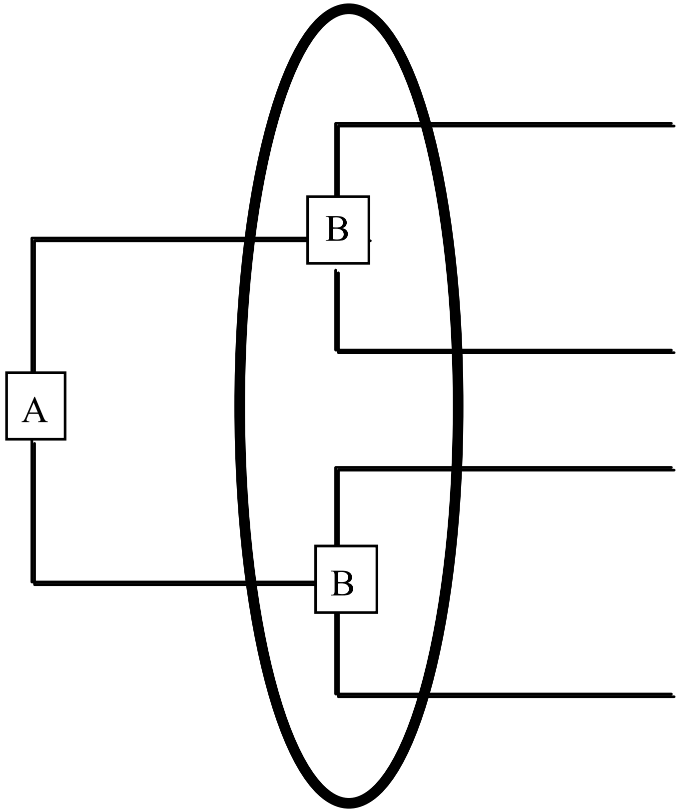



Équilibre Parfait : A arrête

Stratégie : faire croire à l'autre joueur que l'on n'est pas rationnel et continuer « contre toute attente »

# Jeux à information complète mais imparfaite

## Existence de coups simultanés



- **Pas de récurrence à rebours**
- **forme normale d’un jeu**

| | | | b | |
|---|---|---|---|---|
| | | | **L** | **R** |
| **a** | **H** | | | |
| | **B** | | | |

# Exemple

| | | b | | |
|---|---|---|---|---|
| | | L | M | R |
| a | H | 8 ; 8 | 4 ; 7 | 10 ; 6 |
| | B | 9 ; 2 | 5 ; 5 | 6 ; 3 |

- Itération de dominance (5 ; 5)
- Stabilité
- Non optimalité (∃ (8 ; 8) !)

## Exemple : Rationalité de la destruction

b

| a | | L | M | R |
|---|---|---|---|---|
| | H | 8 ; 8 | 4 ; 7 | 10 ; 6 |
| | B | 9 ; 2 | 5 ; 5 | 6 ; 3 |

le joueur a décide de « jeter de l’argent par les fenêtres » :

b

| a | | L | M | R |
|---|---|---|---|---|
| | H | 8 ; 8 | 4 ; 7 | 10 ; 6 |
| | B | **7** ; 2 | **3** ; 5 | **4** ; 3 |

- Itération de dominance (8 ; 8)

## Dilemme du Prisonnier

| | | b | |
|---|---|---|---|
| | | T | A |
| a | T | 1 ; 1 | 10 ; 0,3 |
| | A | 0,3 ; 10 | 8 ; 8 |

## Exemples

- free-riding
- assis-debout dans un stade
- OPA :

  prix actuel p, offre rachat v, valeur future q

| | Succès | Échec |
|---|---|---|
| Vente | v | p |
| Non Vente | q | p |

## Lutte pour le premier coup “Game of Chicken”

| | | b | |
|---|---|---|---|
| | | A | C |
| a | A | 1 ; 1 | 1 ; 2 |
| | C | 2 ; 1 | –10 ; –10 |

Se priver de moyens d’action (et le faire savoir !) est profitable

- jeu de dissuasion
- stabilisation du jeu = menace
- crédibilité des menaces

# Jeux à somme nulle

b

a

| | L | M | R |
|---|---|---|---|
| H | –2 ; 2 | 5 ; –5 | –3 ; 3 |
| M | –1 ; 1 | 0 ; 0 | –1 ; 1 |
| B | –3 ; 3 | 2 ; –2 | –2 ; 2 |

**Équilibre stable =** (–1 ; 1)

- Équilibre de Nash (sous réserve que l'autre ne dévie pas, je n'ai pas intérêt à dévier)
- Dans un jeu à somme nulle, s'il existe des équilibres de Nash, ils correspondent aux stratégies prudentes

**Absence d’équilibre de Nash**

- Baccarat du Bagne

| | Feuille | Pierre | Ciseaux |
|---|---|---|---|
| Feuille | 0 ; 0 | 1 ; –1 | –1 ; 1 |
| Pierre | –1 ; 1 | 0 ; 0 | 1 ; –1 |
| Ciseaux | 1 ; –1 | –1 ; 1 | 0 ; 0 |

**Rationalité** : être totalement imprévisible (confier tout son pouvoir de décision au hasard)

- Jeu du penalty
- Lutte pour le second coup

Dans un jeu à somme nulle il y a toujours au moins un équilibre de Nash en **stratégies mixtes** (probabilisées)

- théorie du Bluff

## Valeur de l’information en situation compétitive

- info secrète (je sais et les autres ne savent pas que je sais)
- info privée (je sais et les autres savent que je sais)
- info publique (tout le monde sait)

2 firmes

- 2 actions : « Luxe » ou « Standard »

2 états de la Nature

- demande « Luxe » ou « Standard »

# Demande Luxe

(a ; b) b

| | | L | S |
|---|---|---|---|
| a | L | 6 ; 6 | 12 ; –20 |
| | S | –20 ; 12 | 2 ; 2 |

# Demande Standard

(a ; b) b

| | | L | S |
|---|---|---|---|
| a | L | 2 ; 2 | –2 ; 40 |
| | S | 40 ; –2 | 20 ; 20 |

**Hypothèses**

- $P_a(\text{Luxe}) = P_b(\text{Luxe}) = 1/2$
- les deux firmes raisonnent en valeur espérée

| (a ; b) | | b | |
|---|---|---|---|
| | | L | S |
| a | L | 4 ; 4 | 5 ; 10 |
| | S | 10 ; 5 | 11 ; 11 |

**Équilibre** : (S ; S) $\Rightarrow$ (11 ; 11)

**Valeur de l'information pour A**

**Info publique**

Si Signal = L

| (a ; b) | | b | |
|---|---|---|---|
| | | L | S |
| a | L | 6 ; 6 | 12 ; –20 |
| | S | –20 ; 12 | 2 ; 2 |

A choisit L

B choisit L

$\Rightarrow$ (6 ; 6)

Si Signal = S

| (a ; b) | | b | |
|---|---|---|---|
| | | L | S |
| a | L | 2 ; 2 | –2 ; 40 |
| | S | 40 ; –2 | 20 ; 20 |

A choisit S

B choisit S

$\Rightarrow$ (20 ; 20)

$$\text{VEAIP}_{\text{Pub}} = \frac{1}{2}6 + \frac{1}{2}20 = 13$$

$$\text{VEIP}_{\text{Pub}} = 13 - 11 = 2$$

**Info secrète**

B choisit S

A choisit L si L et S si S

$$\text{VEAIP}_{\text{Sec}} = \frac{1}{2}12 + \frac{1}{2}20 = 16$$

$$\text{VEIP}_{\text{Sec}} = 16 - 11 = 5$$

**Info privée**

A choisit L si L et S si S

Si B choisit L : $\frac{1}{2}6+\frac{1}{2}-2=2$

Si B choisit S : $\frac{1}{2}-20+\frac{1}{2}20=0$

$\Rightarrow$ B choisit L

$VEAIP_{Pri} = \frac{1}{2}6+\frac{1}{2}40=23$

$VEIP_{Pri} = 23 - 11 = 12$

**Remarques**

- on a toujours $\mathrm{VEIP}_{\mathrm{Sec}} \geq 0$
- en général ordre quelconque sur $\mathrm{VEIP}_{\mathrm{Sec}}$, $\mathrm{VEIP}_{\mathrm{Pri}}$, $\mathrm{VEIP}_{\mathrm{Pub}}$
- stratégies complexes