Lemmes et conjectures de théorie spectrale des graphes

issus de l'analyse automatique du corpus Duhamel–Cazenave

Tristan Cazenave

31 octobre 2026

Résumé

Le corpus d'Elie Duhamel et Tristan Cazenave [1] contient 305 755 conjectures engendrées automatiquement, reliant des invariants spectraux et métriques des graphes connexes. Une chaîne de traitement (réfutation numérique, preuve par le solveur SMT `z3` à partir d'une bibliothèque de lemmes, découverte de nouveaux lemmes, formalisation en `Lean` 4/Mathlib) a réfuté 162 964 conjectures et en a démontré 117 390 sans hypothèse non prouvée, dont 79 505 sont vérifiées de bout en bout en `Lean` pour tout graphe connexe. Ce document rassemble, avec des démonstrations rédigées pour des mathématiciens, les lemmes découverts et démontrés les plus intéressants, les dix lemmes les plus utiles, les dix théorèmes les plus difficiles, des démonstrations plus simples de résultats connus (Bollobás–Erdős, Yang–Lu), et les conjectures non réfutées qui nous paraissent les plus intéressantes. Toutes les preuves sont réunies dans une archive (section 8).

1 Cadre et notations

Tous les graphes sont simples, non orientés, *connexes*, avec $n \geq 2$ sommets et m arêtes. On note d_v le degré de v, Δ et δ les degrés maximum et minimum, $u \sim v$ l'adjacence, dist la distance, $\mathrm{ecc}(v) = \max_w \mathrm{dist}(v,w)$, $\mathrm{rad} = \min_v \mathrm{ecc}(v)$ le rayon et $\mathrm{dia} = \max_v \mathrm{ecc}(v)$ le diamètre.

— A est la matrice d'adjacence, de valeurs propres $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ (comptées avec multiplicité) et de rang $\mathrm{rg}(A)$.
— $\mathcal{L} = D - A$ est le laplacien, de valeurs propres $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_n = 0$.
— $R = \sum_{uv \in E} (d_u d_v)^{-1/2}$ est l'indice de Randić.

Nous utiliserons librement les faits classiques suivants.

(F1) *Rayleigh* : $\lambda_1 = \max_{x \neq 0} x^\top A x / x^\top x$. *Courant–Fischer* : pour une matrice symétrique M de valeurs propres $\nu_1 \geq \nu_2 \geq \cdots$, on a $\nu_2 = \max_{\dim U = 2} \min_{z \in U \setminus \{0\}} z^\top M z / z^\top z$.
(F2) *Perron–Frobenius* : G étant connexe, $\lambda_1 > 0$ est simple et admet un vecteur propre à coordonnées toutes strictement positives.
(F3) *Traces* : $\sum_i \lambda_i = \mathrm{tr}\, A = 0$, $\sum_i \lambda_i^2 = \mathrm{tr}\, A^2 = 2m$ et $\sum_i \mu_i = 2m$.
(F4) *Forme quadratique* : $z^\top \mathcal{L} z = \sum_{uv \in E} (z_u - z_v)^2$.
(F5) $\lambda_1 \leq \Delta \leq n-1$ et $m \geq n-1$, avec égalité si et seulement si G est un arbre.
(F6) *Smith* [8] : si G est complet, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_1 = n-1$, $\mathrm{rg}(A) = n$ et $R = n/2$; sinon G contient un P_3 induit et, par entrelacement, $\lambda_2 \geq \lambda_2(P_3) = 0$.

Statut des résultats. La mention *(vérifié en `Lean`)* signifie que l'énoncé est un théorème `Lean` 4 démontré pour tout graphe connexe `SimpleGraph (Fin n)`. Ce théorème ne dépend que des axiomes standard (`propext`, `Classical.choice`, `Quot.sound`) et ne contient aucun `sorry`. Les démonstrations ci-dessous sont des transcriptions mathématiques des preuves formelles.

2 Lemmes découverts et démontrés

Les lemmes de cette section ont été *découverts* automatiquement. On cherchait, sur une base de 281 672 graphes (tous les graphes connexes à au plus 9 sommets, plus des familles extrémales), des inégalités linéaires entre deux invariants qui excluaient les contre-modèles abstraits renvoyés par z3. Ils ont ensuite été démontrés.

2.1 Laplacien et adjacence : $\mu_2 \geq \lambda_2 + 1$

Théorème 1 (*(vérifié en Lean)*)**.** *Pour tout graphe connexe, $\mu_2 \geq \lambda_2 + 1$. L'égalité a lieu par exemple pour les étoiles ($\lambda_2 = 0$, $\mu_2 = 1$).*

Démonstration. Si $n = 2$, $G = K_2$ et $\lambda_2 = -1$, $\mu_2 = 0$. Supposons $n \geq 3$.

Cas $\lambda_2 \leq 0$. Il suffit de montrer $\mu_2 \geq 1$. Comme G est connexe avec $n \geq 3$, il possède un sommet c ayant deux voisins a, b. Soit H le graphe couvrant d'arêtes ca, cb. Le spectre de $\mathcal{L}_H$ est $\{3, 1, 0, \ldots, 0\}$. Comme $\mathcal{L}_G = \mathcal{L}_H + \mathcal{L}_{G \setminus E(H)}$ et que le second terme est semi-défini positif, Courant–Fischer donne $\mu_2(G) \geq \mu_2(H) = 1$.

Cas $\lambda_2 > 0$. Soit $x > 0$ le vecteur de Perron (F2) et y un vecteur propre de λ_2 orthogonal à x. Comme $\sum_v x_v y_v = 0$ avec $x > 0$ et $y \neq 0$, le vecteur y prend des valeurs strictement positives et strictement négatives.

Soit u un sommet où y est maximal ($y_u > 0$), $P = \{v \sim u : y_v > 0\}$ et $d^+ = |P|$. Alors

$$\lambda_2 \, y_u = \sum_{v \sim u} y_v \leq \sum_{v \in P} y_v \leq d^+ \, y_u, \qquad \text{donc } d^+ \geq \lambda_2.$$

De même, si w réalise le minimum de y ($y_w < 0$), $N = \{v \sim w : y_v < 0\}$ et $d^- = |N|$, on obtient $\lambda_2 y_w \geq d^- y_w$, d'où $d^- \geq \lambda_2$. En particulier $d^{\pm} \geq 1$.

Les ensembles $\{u\} \cup P$ (où $y > 0$) et $\{w\} \cup N$ (où $y < 0$) sont disjoints. On pose

$$f_1 = d^+ e_u - \mathbf{1}_P, \qquad f_2 = d^- e_w - \mathbf{1}_N.$$

Ces vecteurs ont des supports disjoints, donc engendrent un plan U. Pour $z = a f_1 + b f_2$, on ne garde dans (F4) que les arêtes uj ($j \in P$) et wj ($j \in N$). Ces deux familles d'arêtes sont disjointes, car $w \notin P$ et $u \notin N$. Sur l'arête uj on a $z_u - z_j = a(d^+ + 1)$, d'où

$$z^\top \mathcal{L} z \;\geq\; d^+(d^+ + 1)^2 a^2 + d^-(d^- + 1)^2 b^2, \qquad z^\top z = d^+(d^+ + 1) a^2 + d^-(d^- + 1) b^2.$$

Le quotient de Rayleigh vaut donc au moins $\min(d^+, d^-) + 1$ sur U. Courant–Fischer donne alors $\mu_2 \geq \min(d^+, d^-) + 1 \geq \lambda_2 + 1$. □

Remarque. La preuve établit en fait l'inégalité plus forte $\mu_2 \geq \min(d^+, d^-) + 1$, où $d^{\pm}$ sont les « degrés signés » aux extrémités d'un vecteur propre de λ_2. Une recherche bibliographique rapide ne nous a pas permis de trouver l'inégalité $\mu_2 \geq \lambda_2 + 1$ dans la littérature. Une vérification plus approfondie reste nécessaire avant d'affirmer qu'elle est nouvelle.

2.2 Indice de Randić et rayon spectral

Les deux résultats classiques suivants servent d'outils. Ils ont été formalisés, ce qui a rendu les corollaires presque immédiats.

Théorème 2 (Favaron–Mahéo–Saclé, *(vérifié en Lean)*)**.** $m \leq \lambda_1 R$.

Démonstration. Avec $x_v = \sqrt{d_v}$, on a $x^\top x = 2m$ et $x^\top A x = 2 \sum_{uv \in E} \sqrt{d_u d_v}$. Rayleigh donne $S := \sum_{uv \in E} \sqrt{d_u d_v} \leq m \lambda_1$. Par Cauchy–Schwarz,

$$m^2 = \Big(\sum_{uv \in E} (d_u d_v)^{1/4} (d_u d_v)^{-1/4} \Big)^2 \leq S \cdot R \leq m \lambda_1 R.$$ □

Théorème 3 (Hong, *(vérifié en Lean)*)**.** $\lambda_1^2 \le 2m - n + 1$.

Démonstration. Soit x un vecteur propre unitaire de λ_1 et $P_v = \sum_{u\sim v} x_u^2$. Par Cauchy–Schwarz, $\lambda_1^2 x_v^2 = (\sum_{u\sim v} x_u)^2 \le d_v P_v$. Comme v n'est pas son propre voisin, $P_v \le 1 - x_v^2$. Comme $d_v \ge 1$, il vient $d_v P_v \le P_v + (d_v - 1)(1 - x_v^2)$. En sommant sur v, avec $\sum_v P_v = \sum_v d_v x_v^2$:

$$\lambda_1^2 \le \sum_v d_v x_v^2 + \sum_v (d_v - 1) - \sum_v d_v x_v^2 + \sum_v x_v^2 = 2m - n + 1. \qquad \square$$

Corollaire 4 (*(vérifié en Lean)*)**.** $R \ge \dfrac{\lambda_1 + 1}{2}$.

Démonstration. Par Hong et $\lambda_1 \le n - 1$: $\lambda_1(\lambda_1 + 1) \le (2m - n + 1) + (n - 1) = 2m$. Par le théorème 2, $\lambda_1 R \ge m \ge \lambda_1(\lambda_1 + 1)/2$. On divise par $\lambda_1 > 0$. $\square$

Corollaire 5 (Bollobás–Erdős et borne supérieure, *(vérifié en Lean)*)**.** $\sqrt{n-1} \le R \le n/2$.

Démonstration. Majoration. Par l'inégalité arithmético-géométrique, $(d_u d_v)^{-1/2} \le \frac{1}{2}(1/d_u + 1/d_v)$. En sommant sur les arêtes, chaque sommet v apparaît d_v fois, donc $R \le \frac{1}{2}\sum_v d_v \cdot \frac{1}{d_v} = n/2$.

Minoration. On pose $q = 2m - n + 1 > 0$. Les théorèmes 2 et 3 donnent $m^2 \le \lambda_1^2 R^2 \le qR^2$. Par ailleurs, $m^2 - (n-1)q = (m - n + 1)^2 \ge 0$. Donc $(n-1)q \le m^2 \le qR^2$, et l'on divise par q. $\square$

Théorème 6 (*(vérifié en Lean)*)**.** $R \ge \dfrac{2}{3}\lambda_2 + \sqrt{2}$.

Démonstration. On note $L = \lambda_1$, $t = \lambda_2$ et $s = \sqrt{2}$. Par le théorème 2, il suffit d'établir

$$L\Big(\tfrac{2}{3}t + s\Big) \le m, \tag{1}$$

car alors $LR \ge m \ge L(\frac{2}{3}t + s)$, et l'on divise par $L > 0$.

Cas 1 : G n'est pas un arbre. Alors $n \ge 3$ et $m \ge n$. On pose $k = n - 2 \ge 1$. D'après (F3), $\sum_{i\ge 3} \lambda_i = -(L + t)$ et $\sum_{i\ge 3} \lambda_i^2 = 2m - L^2 - t^2$. Cauchy–Schwarz sur les k valeurs propres $\lambda_3, \dots, \lambda_n$ donne

$$(L + t)^2 \le k\,(2m - L^2 - t^2). \tag{2}$$

On vérifie alors l'identité polynomiale

$$k\Big(m - L(\tfrac{2}{3}t + s)\Big) = \tfrac{7}{20}\Big(2mk - k(L^2 + t^2) - (L + t)^2\Big) + \tfrac{3}{10}k(m - (k + 2)) + Q,$$

où $Q = a\,t^2 + b\,Lt + a\,L^2 - s\,kL + \frac{3}{10}k(k+2)$, avec $a = \frac{7}{20}(k+1)$ et $b = \frac{7}{10} - \frac{2k}{3}$. Les deux premiers termes sont positifs par (2) et parce que $m \ge n = k + 2$. Il reste à voir que $Q \ge 0$. Avec $P = \frac{41}{900}k + \frac{287}{150} > 0$, on a

$$4aQ = (2at + bL)^2 + k\,W, \qquad W = PL^2 - \tfrac{7}{5}(k+1)sL + \tfrac{21}{50}(k+1)(k+2),$$
$$4PW = \big(2PL - \tfrac{7}{5}(k+1)s\big)^2 + \tfrac{14}{25}(k+1)\,V, \qquad V = \tfrac{41k^2 - 296k + 1344}{300}.$$

Le discriminant de $41k^2 - 296k + 1344$ est $296^2 - 4 \cdot 41 \cdot 1344 < 0$, donc $V > 0$. Il en résulte $W \ge 0$, puis $Q \ge 0$, ce qui prouve (1).

Cas 2 : G est un arbre, donc $m = n - 1$. Un arbre est biparti. Soit $\sigma_v = \pm 1$ selon la classe de v. Si $Ax = \lambda x$, alors le vecteur $(\sigma_v x_v)_v$ est propre pour $-\lambda$: le spectre est symétrique.

— Si $t > 0$, alors $L > t > 0$, et $L, t, -t, -L$ sont quatre valeurs propres distinctes. Par (F3), $2L^2 + 2t^2 \le 2m$, donc $n \ge 4$ et $m \ge 3$. On conclut avec l'identité

$$m - \tfrac{2}{3}Lt - sL = \tfrac{16}{25}(m - L^2 - t^2) + \tfrac{9}{25}(m - 3) + \tfrac{16}{25}\big(t - \tfrac{25}{48}L\big)^2 + \tfrac{1679}{3600}\big(L - \tfrac{1800\sqrt{2}}{1679}\big)^2 + \tfrac{333}{41975},$$

dont tous les termes sont positifs.

— Si $t \le 0$ et $n = 2$, alors $G = K_2$ et $L(\frac{2}{3}t + s) = s - \frac{2}{3} < 1 = m$.
— Si $t \le 0$ et $n \ge 3$, alors L et $-L$ sont deux valeurs propres, donc $2L^2 \le 2m$. Ainsi $L(\frac{2}{3}t + s) \le sL \le \sqrt{2m} \le m$, puisque $m \ge 2$. □

Remarque. Les identités de certificat ont été trouvées par recherche de sommes de carrés et vérifiées symboliquement ; elles sont aussi vérifiées par Lean.

2.3 Distances et rang de la matrice d'adjacence

Lemme 7. *Si $v_1, \dots, v_p$ est un chemin induit de G, alors* $\mathrm{rg}(A) \ge p - 1$. *Si de plus $p \ge 4$, alors* $\mathrm{rg}(A) \ge 4$.

Démonstration. On considère la sous-matrice de A de lignes $v_1, \dots, v_{p-1}$ et de colonnes $v_2, \dots, v_p$. Son coefficient (i, j) est $A_{v_i, v_{j+1}}$.
— Il vaut 1 si $j = i$.
— Il est nul si $j > i$, car v_i et v_{j+1} ne sont pas adjacents ($j + 1 \ge i + 2$ et le chemin est induit).
La sous-matrice est donc triangulaire inférieure à diagonale unité, de déterminant 1, et $\mathrm{rg}(A) \ge p-1$. Si $p \ge 4$, les sommets $v_1, \dots, v_4$ induisent P_4, dont la matrice d'adjacence est de déterminant 1. Une sous-matrice principale inversible d'ordre 4 donne $\mathrm{rg}(A) \ge 4$. □

Corollaire 8 (*(vérifié en Lean)*)**.** $\mathrm{rg}(A) \ge \mathrm{dia}$, *et* $\mathrm{rg}(A) \ge 4$ *dès que* $\mathrm{dia} \ge 3$.

Démonstration. Une géodésique entre deux sommets à distance dia est un chemin induit à dia $+1$ sommets. On applique le lemme 7. □

Théorème 9 (*(vérifié en Lean)*)**.** $\mathrm{rad} \le \dfrac{\mathrm{rg}(A)}{2} + 1$.

Démonstration. Si $\mathrm{rad} \le 1$, c'est immédiat car $\mathrm{rg}(A) \ge 2$. Sinon, on utilise le théorème du chemin induit d'Erdős, Saks et Sós (dans la preuve de F. Chung, elle aussi formalisée) : un graphe connexe de rayon r contient un chemin induit à au moins $2r - 1$ sommets. Le lemme 7 donne alors $\mathrm{rg}(A) \ge 2r - 2$. □

Remarque. Ce théorème relie une quantité métrique, le rayon, à une quantité purement algébrique, le rang. Il est atteint (marge nulle) sur la base de graphes.

3 Les dix lemmes les plus utiles

Une preuve du prouveur est un ensemble *minimal* (pour l'inclusion) de lemmes de la bibliothèque dont la conjecture découle par arithmétique réelle non linéaire. On mesure l'utilité d'un lemme par le nombre de ces preuves qui l'utilisent, parmi les 117 390 conjectures démontrées sans hypothèse non prouvée. L'hypothèse $n \ge 2$ du cadre, qui apparaît dans 7 670 preuves, n'est pas comptée comme un lemme.

	Nom	Énoncé	Preuves	Lean
1	`rad_dia_pos`	$\mathrm{rad} \geq 1$, $\mathrm{dia} \geq 1$	40 630	✓
2	`rank_range`	$2 \leq \mathrm{rg}(A) \leq n$	40 451	✓
3	`rad_dia`	$\mathrm{rad} \leq \mathrm{dia} \leq 2\,\mathrm{rad}$	40 124	✓
4	`rank_dia`	$\mathrm{rg}(A) \geq \mathrm{dia}$, et $\mathrm{rg}(A) \geq 4$ si $\mathrm{dia} \geq 3$	28 147	✓
5	`randic_n`	$\sqrt{n-1} \leq R \leq n/2$	24 731	✓
6	`R_pos`	$R > 0$	20 614	✓
7	`yang_lu`	$R \geq \mathrm{dia}/2 + \sqrt{2} - 1$	12 949	✓
8	`rad_n`	$2\,\mathrm{rad} \leq n$	9 545	
9	`dia_n`	$\mathrm{dia} \leq n - 1$	8 374	✓
10	`m_bounds`	$n - 1 \leq m \leq n(n-1)/2$	6 524	✓

Les lemmes les plus utilisés sont élémentaires. Ils servent surtout à écarter les cas dégénérés (petits graphes, valeurs nulles, signes) dans des inégalités dont le cœur est ailleurs. Parmi les lemmes profonds, le théorème de Yang et Lu domine nettement : il intervient dans 12 949 preuves, et il figure dans la preuve de 2 301 des 2 906 théorèmes qui exigent un résultat de niveau recherche (section 5). Viennent ensuite $R \geq (\lambda_1 + 1)/2$ (corollaire 4, 550 preuves), $R \geq \frac{2}{3}\lambda_2 + \sqrt{2}$ (théorème 6, 544), $\mathrm{rad} \leq \mathrm{rg}(A)/2 + 1$ (théorème 9, 478) et $\mu_2 \geq \lambda_2 + 1$ (théorème 1, 105).

Lemme 10 (`rad_dia_pos`, *(vérifié en Lean)*)**.** $\mathrm{rad} \geq 1$ *et* $\mathrm{dia} \geq 1$.

Démonstration. Comme $n \geq 2$, chaque sommet v a un autre sommet w, et $\mathrm{dist}(v, w) \geq 1$. Donc $\mathrm{ecc}(v) \geq 1$ pour tout v. □

Lemme 11 (`rank_range`, *(vérifié en Lean)*)**.** $2 \leq \mathrm{rg}(A) \leq n$.

Démonstration. La majoration est évidente. G étant connexe avec $n \geq 2$, il a une arête uv. La sous-matrice principale de A sur $\{u, v\}$ est $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, de déterminant -1. Donc $\mathrm{rg}(A) \geq 2$. □

Lemme 12 (`rad_dia`, *(vérifié en Lean)*)**.** $\mathrm{rad} \leq \mathrm{dia} \leq 2\,\mathrm{rad}$.

Démonstration. rad est un minimum et dia un maximum des mêmes excentricités. Si c réalise le rayon, l'inégalité triangulaire donne $\mathrm{dist}(u, v) \leq \mathrm{dist}(u, c) + \mathrm{dist}(c, v) \leq 2\,\mathrm{rad}$ pour tous u, v. □

Lemme 13 (`rank_dia`, *(vérifié en Lean)*)**.** $\mathrm{rg}(A) \geq \mathrm{dia}$*, et* $\mathrm{rg}(A) \geq 4$ *si* $\mathrm{dia} \geq 3$.

Démonstration. C'est le corollaire 8. □

Lemme 14 (`randic_n`, *(vérifié en Lean)*)**.** $\sqrt{n-1} \leq R \leq n/2$.

Démonstration. C'est le corollaire 5. La minoration est due à Bollobás et Erdős [4] ; la preuve donnée ici, plus courte, est discutée à la section 6. □

Lemme 15 (`R_pos`, *(vérifié en Lean)*)**.** $R > 0$.

Démonstration. G a au moins une arête et chaque arête contribue $(d_u d_v)^{-1/2} > 0$. □

Lemme 16 (`yang_lu`, Yang–Lu [6], *(vérifié en Lean)*)**.** $R \geq \dfrac{\mathrm{dia}}{2} + \sqrt{2} - 1$.

Démonstration. Voir la section 6, qui décrit la preuve formalisée et en quoi elle diffère de celle de l'article. □

Lemme 17 (`rad_n`)**.** $2\,\mathrm{rad} \leq n$.

Démonstration. Soit T un arbre couvrant de G ; les distances dans T majorent celles de G. Soit $P = p_0 p_1 \cdots p_D$ un plus long chemin de T et $c = p_k$ avec $k = \lceil D/2 \rceil$. Soit w un sommet, p_j le premier sommet de P rencontré par le chemin de T de w à c, et $h = \mathrm{dist}_T(w, p_j)$.

— Si $j \le k$, le chemin $w \to p_j \to p_D$ est de longueur $h + D - j \le D$, donc $h \le j$ et $\mathrm{dist}_T(w, c) = h + k - j \le k$.
— Si $j \ge k$, le chemin $w \to p_j \to p_0$ est de longueur $h+j \le D$, donc $\mathrm{dist}_T(w, c) = h+j-k \le D - k \le k$.

Ainsi $\mathrm{rad} \le \mathrm{ecc}_G(c) \le \mathrm{ecc}_T(c) \le \lceil D/2 \rceil \le \lceil (n-1)/2 \rceil \le n/2$. □

Lemme 18 (`dia_n`, *(vérifié en Lean)*)**.** $\mathrm{dia} \le n - 1$.

Démonstration. Une géodésique de longueur dia passe par $\mathrm{dia}+1$ sommets distincts. □

Lemme 19 (`m_bounds`, *(vérifié en Lean)*)**.** $n - 1 \le m \le n(n-1)/2$.

Démonstration. Un graphe connexe contient un arbre couvrant, qui a $n-1$ arêtes. Un graphe simple a au plus $\binom{n}{2}$ arêtes. □

4 Conjectures du corpus démontrées

Voici une sélection de conjectures du corpus, identifiées par leur numéro, qui se déduisent des résultats précédents.

Proposition 20. *Pour tout graphe connexe :*

(a) ***#20832*** *:* $\lambda_2 \le \mu_2 - 1$*, atteinte* (vérifié en Lean) *;*

(b) ***#20821*** *:* $\lambda_2 \le R^2 - 2$*, atteinte pour* K_2 *;*

(c) ***#18099*** *:* $n - 1 \le R\lambda_1$*, et* ***#764799*** *:* $\mathrm{dia} \le R\lambda_1$ (vérifié en Lean) *;*

(d) ***#127304*** *:* $\mu_2 \le R\lambda_1$ *;*

(e) ***#759987*** *:* $\mathrm{dia} \le 2R$*, et* ***#760654*** *:* $\mathrm{dia} \le \mathrm{rad} + R$ (vérifié en Lean) *;*

(f) ***#1362170*** *:* $\lambda_1 + \mathrm{rad} \le n$*, atteinte pour* K_n *et* C_4 (vérifié en Lean).

Démonstration. (a) C'est le théorème 1.

(b) Si $\lambda_2 \ge 0$, le théorème 6 donne $R^2 \ge (\frac{2}{3}\lambda_2 + \sqrt{2})^2 = \frac{4}{9}\lambda_2^2 + \frac{4\sqrt{2}}{3}\lambda_2 + 2 \ge \lambda_2 + 2$. Si $\lambda_2 < 0$, le graphe est complet (Smith), donc $\lambda_2 = -1$ et $R = n/2 \ge 1$.

(c) On utilise le théorème 2 et $\mathrm{dia} \le n - 1 \le m$.

(d) On a $2\mu_2 \le \mu_1 + \mu_2 \le \sum_i \mu_i = 2m$, donc $\mu_2 \le m \le \lambda_1 R$.

(e) Yang et Lu ont démontré $R \ge \frac{1}{2}\,\mathrm{dia} + \sqrt{2} - 1$, ce qui donne $\mathrm{dia} \le 2R$. Avec $\mathrm{dia} \le 2\,\mathrm{rad}$, on obtient $\mathrm{dia} \le \frac{1}{2}\,\mathrm{dia} + \mathrm{rad} \le R + \mathrm{rad}$. Le théorème de Yang et Lu est lui-même formalisé en Lean (`Spectral.L_yang_lu`, environ 3 500 lignes, sans `sorry`). La preuve formelle garde la stratégie du contre-exemple minimal de l'article, mais en remplace la seconde moitié par un argument différent. Une récurrence forte sur le nombre d'arêtes montre d'abord qu'un sommet non essentiel d'un contre-exemple minimal est de degré au moins 9. Elle montre ensuite que les degrés croissent exponentiellement avec la distance à l'ensemble des sommets essentiels. On découpe enfin une géodésique diamétrale en morceaux, chacun de poids au moins $\ell/2 + 1$ grâce à une version locale du lemme 1 de l'article. La formalisation a mis au jour plusieurs lacunes de l'article : une équivalence fausse sur les sommets essentiels (contre-exemple : C_5 plus un sommet pendant), une inégalité de diamètre non démontrée dans le corollaire 4, des hypothèses du lemme 6 jamais vérifiées, une structure en blocs incomplète, et des erreurs d'indices dans les assertions A et B.

(f) D'abord $\lambda_1 \le \Delta$: si $Ax = \lambda_1 x$ et si u maximise $|x_u|$, alors $\lambda_1 |x_u| = |\sum_{v \sim u} x_v| \le d_u |x_u| \le \Delta |x_u|$. Ensuite, soit v un sommet de degré Δ, w un sommet quelconque, $k = \mathrm{dist}(v, w)$ et $v = p_0, p_1, \ldots, p_k = w$ une géodésique. Les sommets $p_2, \ldots, p_k$ sont deux à deux distincts, distincts de v et non adjacents à v (car $\mathrm{dist}(v, p_i) = i \ge 2$). Les ensembles $\{v\}$, $N(v)$ et $\{p_2, \ldots, p_k\}$ sont donc disjoints, d'où $1 + \Delta + (k-1) \le n$. Ainsi $\mathrm{rad} \le \mathrm{ecc}(v) \le n - \Delta$, et $\lambda_1 + \mathrm{rad} \le \Delta + (n - \Delta) = n$. □

Remarque. (f) est restée « ouverte » pour le solveur uniquement parce que sa bibliothèque ne contenait pas le lemme rad $\le n - \Delta$. (c) et (d) n'ont été démontrées qu'après l'ajout du théorème de Favaron–Mahéo–Saclé. Cela illustre comment l'enrichissement de la bibliothèque fait tomber des familles entières de conjectures.

5 Les dix théorèmes les plus difficiles

Critère. Les mesures internes du prouveur (nombre de lemmes, temps de calcul) reflètent surtout des distinctions de cas sur de petits graphes. Les énoncés qui maximisent ces mesures sont des puissances imbriquées comme rad $\le R^{2^{\sqrt{\sqrt{\mathrm{rg}(A)}}}}$, qui ont souvent une preuve humaine de trois lignes. Nous avons donc retenu deux critères plus significatifs.

(i) *Profondeur* : le théorème ne découle pas des seuls lemmes élémentaires et classiques de la bibliothèque (niveaux 0 à 2). On l'a vérifié en relançant `z3` sans les lemmes de niveau recherche : il trouve alors un contre-modèle réel. Parmi les 6 651 théorèmes de niveau recherche vérifiés en `Lean`, 3 679 se démontrent en fait sans résultat profond. Il en reste 2 906 qui exigent l'un des théorèmes 1, 6, 9 ou celui de Yang et Lu.

(ii) *Optimalité* : l'inégalité est atteinte (avec égalité) sur au moins un graphe.

Parmi les théorèmes qui satisfont (i) et (ii), nous avons choisi les dix suivants, en évitant les variantes d'un même énoncé. Les trois premiers sont vérifiés en `Lean` sous forme abstraite : l'implication à partir des lemmes est formelle, mais le fait (F6) de Smith qu'ils utilisent n'est pas encore formalisé. Les sept autres sont vérifiés de bout en bout.

	Énoncé	Résultat profond	Égalité
#118503	$\lambda_2 \le 2(R - \sqrt{2})$	th. 6	P_3
#709846	$\lambda_2 \le \mathrm{rg}(A)\,(R - \sqrt{2})$	th. 6	P_3
#2630815	$\lambda_2 \le \mathrm{dia}\,(R - \sqrt{2})$	th. 6	P_3
#721942	$\lambda_2 \le 2\mu_2 - 1$	th. 1	K_2
#1935857	$\mathrm{dia} \le R^{3/\sqrt{2}}$	Yang–Lu	K_2
#1935639	$\mathrm{dia} \le R\,(\sqrt{2} + \log \mathrm{rad})$	Yang–Lu	P_3
#869836	$\mathrm{rad} \le \mathrm{rg}(A) - \log(\mathrm{rad}\,/2)$	th. 9	C_4
#1396267	$\mathrm{rad} \le 2^{\mathrm{rg}(A) - \mathrm{dia}\,/2}$	th. 9	C_4
#1356167	$\mathrm{rad} \le 1 + \mathrm{rg}(A) - \mathrm{rad}\,/2$	th. 9	C_4
#1454913	$\mathrm{rad} \le \mathrm{rg}(A) - \sqrt{\mathrm{rad}} + \sqrt{2}$	th. 9	C_4

Dans les preuves ci-dessous, on note $t = \lambda_2$, $k = \mathrm{rg}(A)$, $D = \mathrm{dia}$ et $r = \mathrm{rad}$.

Théorème 21 (#118503)**.** $\lambda_2 \le 2(R - \sqrt{2})$*, avec égalité pour* P_3*.*

Démonstration. Si $t \ge 0$, le théorème 6 donne $R \ge \frac{2}{3}t + \sqrt{2} \ge \frac{1}{2}t + \sqrt{2}$. Sinon G est complet (F6), $t = -1$ et $R = n/2 \ge 1 > \sqrt{2} - \frac{1}{2}$. Pour P_3 : $t = 0$ et $R = \sqrt{2}$. □

Théorème 22 (#709846)**.** $\lambda_2 \le \mathrm{rg}(A)\,(R - \sqrt{2})$*, avec égalité pour* P_3*.*

Démonstration. Si $G = K_n$ (F6) : $k(R - \sqrt{2}) = n(\frac{n}{2} - \sqrt{2})$ vaut $2 - 2\sqrt{2} > -1$ pour $n = 2$ et est positif pour $n \ge 3$; il majore donc $t = -1$. Sinon $t \ge 0$, et le théorème 6 donne $R - \sqrt{2} \ge \frac{2}{3}t \ge 0$. Avec $k \ge 2$: $k(R - \sqrt{2}) \ge \frac{4}{3}t \ge t$. Pour P_3 : $k = 2$, $R = \sqrt{2}$, $t = 0$. □

Théorème 23 (#2630815)**.** $\lambda_2 \le \mathrm{dia}\,(R - \sqrt{2})$*, avec égalité pour* P_3*.*

Démonstration. Si G est complet, $D = 1$, $t = -1$ et $R - \sqrt{2} \ge 1 - \sqrt{2} > -1$. Sinon $D \ge 2$, $t \ge 0$ et $R - \sqrt{2} \ge \frac{2}{3}t \ge 0$, d'où $D(R - \sqrt{2}) \ge \frac{4}{3}t \ge t$. □

Théorème 24 (#721942, *(vérifié en Lean)*)**.** $\lambda_2 \le 2\mu_2 - 1$*, avec égalité pour* K_2*.*

Démonstration. Par le théorème 1 et $\mu_2 \ge 0$: $2\mu_2 - 1 = (\mu_2 - 1) + \mu_2 \ge t$. Pour K_2 : $\mu_2 = 0$ et $t = -1$. □

Théorème 25 (#1935857, *(vérifié en Lean)*)**.** $\mathrm{dia} \le R^{3/\sqrt{2}}$*, avec égalité pour* K_2*.*

Démonstration. Par le corollaire 5, $R \ge \sqrt{n-1} \ge 1$; comme $3/\sqrt{2} > 2$, on a $R^{3/\sqrt{2}} \ge R^2 \ge 1$. Cela règle le cas $D = 1$. Si $D \ge 2$, Yang–Lu donne $R^2 \ge (\frac{D}{2} + \sqrt{2} - 1)^2$. Or $\varphi(D) = (\frac{D}{2} + \sqrt{2} - 1)^2 - D$ s'annule en $D = 2$ et $\varphi'(D) = \frac{D}{2} + \sqrt{2} - 2 > 0$ pour $D \ge 2$, donc $\varphi(D) \ge 0$. □

Théorème 26 (#1935639, *(vérifié en Lean)*)**.** $\mathrm{dia} \le R\,(\sqrt{2} + \log \mathrm{rad})$*, avec égalité pour* P_3*.*

Démonstration. On a $\log r \ge 0$. Si $D \le 2$, Yang–Lu donne $\sqrt{2}R \ge \frac{D}{\sqrt{2}} + 2 - \sqrt{2}$, et cette quantité est $\ge D$ si et seulement si $D \le 2$. Si $D \ge 3$, alors $r \ge D/2 > 1$, donc $r \ge 2$ (lemme `rad_dia`). Par conséquent $\sqrt{2} + \log r \ge \sqrt{2} + \log 2 > 2{,}1$, et $R > D/2$ par Yang–Lu, d'où $R(\sqrt{2} + \log r) > 1{,}05\,D$. Pour P_3 : $D = 2$, $r = 1$, $R = \sqrt{2}$. □

Théorème 27 (#869836, *(vérifié en Lean)*)**.** $\mathrm{rad} \le \mathrm{rg}(A) - \log(\mathrm{rad}\,/2)$*, avec égalité pour* C_4*.*

Démonstration. Si $r \le 2$, alors $\log(r/2) \le 0$ et $k \ge 2 \ge r$. Si $r \ge 2$, le théorème 9 donne $k \ge 2r - 2$, et $\log(r/2) \le \frac{r}{2} - 1 \le r - 2$. Donc $k - \log(r/2) \ge r$. Pour C_4 : $r = k = 2$. □

Théorème 28 (#1396267, *(vérifié en Lean)*)**.** $\mathrm{rad} \le 2^{\mathrm{rg}(A) - \mathrm{dia}\,/2}$*, avec égalité pour* C_4*.*

Démonstration. Comme $D \le k$ (lemme `rank_dia`), on a $k - \frac{D}{2} \ge \frac{k}{2} \ge r - 1$ par le théorème 9. Donc $2^{k - D/2} \ge 2^{r-1} \ge r$ pour tout entier $r \ge 1$. Pour C_4 : $k = D = r = 2$. □

Théorème 29 (#1356167, *(vérifié en Lean)*)**.** $\mathrm{rad} \le 1 + \mathrm{rg}(A) - \mathrm{rad}\,/2$*, avec égalité pour* C_4*.*

Démonstration. Il s'agit de $\frac{3}{2}r \le k + 1$. Si $r = 1$, on utilise $k \ge 2$. Si $r \ge 2$, le théorème 9 donne $k + 1 \ge 2r - 1 \ge \frac{3}{2}r$. □

Théorème 30 (#1454913, *(vérifié en Lean)*)**.** $\mathrm{rad} \le \mathrm{rg}(A) - \sqrt{\mathrm{rad}} + \sqrt{2}$*, avec égalité pour* C_4*.*

Démonstration. Si $r = 1$, $k \ge 2 > 2 - \sqrt{2}$. Si $r \ge 2$, $k \ge 2r - 2$, et il suffit que $r - \sqrt{r} \ge 2 - \sqrt{2}$. La fonction $x \mapsto x - \sqrt{x}$ est croissante sur $[1, \infty)$ et vaut $2 - \sqrt{2}$ en $x = 2$. □

Remarque. Une fois les résultats profonds disponibles, ces preuves sont courtes. La difficulté réside dans ces résultats eux-mêmes : la preuve formelle de Yang–Lu compte environ 3 500 lignes, et $\mu_2 \ge \lambda_2 + 1$ demande un argument de Courant–Fischer en dimension 2. C'est aussi pourquoi l'enrichissement de la bibliothèque fait tomber des familles entières de conjectures.

6 Démonstrations plus simples de résultats connus

La formalisation a conduit à remplacer certaines preuves de la littérature par des arguments plus courts, ou plus faciles à rendre rigoureux. Nous ne savons pas si ces arguments figurent déjà dans la littérature.

6.1 La minoration de Bollobás et Erdős

Bollobás et Erdős [4] ont montré que $R \geq \sqrt{n-1}$ pour tout graphe connexe, avec égalité pour les étoiles. Leur preuve détermine le minimum par une analyse extrémale. La preuve du corollaire 5 n'utilise que deux inégalités spectrales classiques et tient en trois lignes.

Preuve courte. Posons $q = 2m - n + 1 > 0$. Favaron–Mahéo–Saclé (théorème 2) et Hong (théorème 3) donnent $m^2 \leq \lambda_1^2 R^2 \leq qR^2$. D'autre part, $m^2 - (n-1)q = (m-n+1)^2 \geq 0$. Donc $(n-1)q \leq qR^2$. □

Le cas d'égalité se lit dans la preuve : il faut $m = n-1$ (un arbre) et $\lambda_1^2 = 2m-n+1 = n-1$, ce qui caractérise l'étoile. Cette preuve n'a pas été écrite par un humain. L'agent chargé de formaliser le lemme a réutilisé les deux théorèmes que la bibliothèque contenait déjà, au lieu de suivre la preuve originale. Les lemmes formalisés plus tôt rendent ainsi les suivants presque gratuits.

6.2 Le théorème de Yang et Lu

Yang et Lu [6] démontrent $R \geq \operatorname{dia}/2 + \sqrt{2} - 1$ en considérant un contre-exemple minimal. La première moitié de leur preuve (suppressions de sommets, sommets « essentiels ») est conservée. La seconde moitié, qui repose sur les lemmes 4, 6, 7, une structure en blocs lue sur des figures et les assertions A et B, est remplacée par un argument plus court qui ne demande aucune analyse de figures. Voici ses étapes ; on note $c = \sqrt{2} - 1$ et $f(G) = R - \operatorname{dia}/2$.

1. *Suppression faible* (remplace le lemme 2 et ses orientations). Soit v un sommet, et d' les degrés dans $G - v$. Si, pour tout voisin u de v de degré $d_u \geq 2$,

$$\textstyle\sum_{x \in N(u) \setminus v} 1/\sqrt{d'_x} \leq 2(d_u - 1)/\sqrt{d_v},$$

   alors $R(G-v) \leq R(G)$. La preuve est une simple comparaison terme à terme, avec l'inégalité numérique $2(d-1)(1/\sqrt{d-1} - 1/\sqrt{d}) \leq 1/\sqrt{d}$. Cette condition est automatiquement satisfaite si $d_v \leq 4$.
2. *Contre-exemple minimal.* On choisit un contre-exemple G ayant le moins d'arêtes possible, sur un ensemble de sommets fixé (un sommet supprimé reste isolé, ce qui ne change ni R ni dia). Toutes les réductions sont alors des sous-graphes couvrants, et une seule récurrence sur le nombre d'arêtes suffit. On montre que les sommets essentiels sont sur une géodésique diamétrale P, que les arêtes entre sommets essentiels sont des isthmes, que $G - e$ n'a que deux composantes pour e essentiel intérieur, et que les sommets essentiels intérieurs sont de degré au moins 3.
3. *Degré des sommets non essentiels* de G (remplace les cinq cas du lemme 3). Tout sommet non essentiel est de degré au moins 9. En effet, un sommet de degré minimal $\delta \leq 8$ vérifierait la condition de suppression faible, grâce à trois inégalités affines en d_u vérifiées en leur plus petite valeur.
4. *Croissance exponentielle* (remplace l'assertion A et ses couches). Par récurrence forte sur la distance r à l'ensemble des sommets essentiels, un sommet à distance $\geq r$ est de degré $\geq g(r)$, où $g(1) = 9$, $g(2) = 19$ et $g(r) = 4g(r-2) - 3$, de sorte que $g(r) \geq 2^{r+2} + 1$.
5. *Découpage en morceaux* (remplace la structure en blocs et l'assertion B). Les sommets essentiels intérieurs découpent P en segments de longueurs ℓ_i, avec $\sum \ell_i = \operatorname{dia}$. À chaque segment on associe l'ensemble I_i des sommets non essentiels qui lui sont reliés sans passer par un sommet essentiel. Ces ensembles sont disjoints, et deux segments consécutifs ne sont jamais tous deux vides. Une version locale du lemme 1 de l'article,

$$\textstyle\sum_{xy \in E,\ x,y \in I} \frac{1}{\sqrt{d_x d_y}} \ \geq\ \frac{1}{2\sqrt{\Delta_I}} \sum_{x \in I} \frac{|N(x) \cap I|}{\sqrt{d_x}},$$

et l'étape 4 donnent à chaque morceau non vide un poids au moins $\ell_i/2 + 1 + c$. Un dénombrement élémentaire conclut : $R \geq \sum_i \ell_i/2 + c = \operatorname{dia}/2 + c$, ce qui contredit $f(G) < c$.

La formalisation a aussi mis au jour plusieurs lacunes de l'article.

— L'équivalence affirmée pour les sommets essentiels est fausse (contre-exemple : C_5 plus un sommet pendant). Seule l'implication vraie est utilisée.
— Le corollaire 4 suppose $\operatorname{dia}(G - uv) \leq \operatorname{dia}(G) + 1$ sans le justifier. On utilise au contraire $\operatorname{dia}(G - uv) \geq \operatorname{dia}(G) + 1$, ce qui contredit directement la minimalité.
— Les hypothèses du lemme 6 ne sont jamais vérifiées.
— Les composantes « pendantes » de $G - e$ sont ignorées par la structure en blocs. Elles sont traitées par un lemme de suppression supplémentaire.
— Les indices des assertions A et B sont erronés, et l'inégalité finale, « facile à vérifier par le calcul », n'est pas démontrée.

Le plan complet, avec toutes les inégalités numériques, est joint à l'archive (`documents/yang_lu_plan_de_preuv`

7 Conjectures non réfutées les plus intéressantes

Toutes les conjectures ci-dessous ont été testées :

— sur tous les graphes connexes à au plus 9 sommets ;
— sur des familles structurées allant jusqu'à $n = 2000$ (arbres k-aires complets, hypercubes, graphes réguliers aléatoires, grilles, araignées, haltères…) ;
— sur des familles en forme close (chemins, cycles, étoiles, K_n, $K_{a,b}$) jusqu'à $n = 10^{15}$.

La conjecture 1 et la conjecture 7 ont en outre été testées sur les 11,7 millions de graphes connexes à 10 sommets.

Ces tests ne sont pas superflus. Parmi les 16 630 conjectures que le prouveur laissait ouvertes, 2 480 se sont révélées fausses sur de grands graphes. Par exemple, $R \leq \operatorname{dia} \cdot \mu_1$ (#799714) est fausse pour l'arbre binaire complet à 255 sommets ($R \approx 116{,}1$ alors que $\operatorname{dia} \cdot \mu_1 \approx 78{,}6$).

Conjecture 1 (#643)**.** $R \geq \lambda_2 + 1$.

Pour deux cliques K_k reliées par une arête, $R - \lambda_2 - 1 \to 0$ (0,012 pour $k = 80$). La conjecture serait donc optimale. Les théorèmes 2 et 6 ne suffisent pas : la relaxation « traces + Hong + $m \geq n$ » admet des contre-modèles numériques ($m = n = k + 2$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \sqrt{k}$ pour $k > 4$). En revanche, la conjecture est vraie pour tous les graphes bipartis, en particulier pour les arbres (théorème 31) : elle reste ouverte pour les graphes non bipartis. Nous proposons deux renforcements, sans contre-exemple jusqu'à $n = 10$:

$$2m \geq \lambda_1^2 + (\lambda_2 + 1)^2 \implies m \geq \lambda_1(\lambda_2 + 1) \implies R \geq \lambda_2 + 1.$$

La seconde implication résulte du théorème 2.

Théorème 31 (*(vérifié en Lean)*)**.** *Si G est connexe et biparti (en particulier si G est un arbre), alors $R \geq \lambda_2 + 1$.*

Démonstration. On note $L = \lambda_1$ et $t = \lambda_2$.

Si $t \leq 0$, le corollaire 5 donne $R \geq \sqrt{n-1} \geq 1 \geq t + 1$.

Si $t > 0$, on raisonne comme au cas 2 du théorème 6. Le spectre d'un graphe biparti est symétrique. Si x et y sont des vecteurs propres unitaires orthogonaux associés à L et t, et si σ est la signature ± 1 des deux classes, alors σx et σy sont propres pour $-L$ et $-t$. Les quatre vecteurs $x, y, \sigma x, \sigma y$ sont orthonormés : des vecteurs propres de valeurs propres de signes opposés sont orthogonaux, et la multiplication par σ préserve le produit scalaire. Il en résulte $n \geq 4$, donc $m \geq 3$. L'inégalité de Bessel avec (F3) donne $2L^2 + 2t^2 \leq 2m$. On conclut avec l'identité

$$m - Lt - L = \tfrac{7}{10}(m - L^2 - t^2) + \tfrac{3}{10}(m - 3) + \tfrac{7}{10}\left(t - \tfrac{5}{7}L\right)^2 + \tfrac{12}{35}\left(L - \tfrac{35}{24}\right)^2 + \tfrac{41}{240},$$

dont tous les termes sont positifs. On a donc $m \geq L(t+1)$, puis $LR \geq m \geq L(t+1)$ par le théorème 2, et l'on divise par $L > 0$. □

Conjecture 2 (#20829)**.** $\lambda_2 \leq \mu_1 - 2$.

Elle est asymptotiquement optimale sur les chemins ($\lambda_2 \to 2$, $\mu_1 \to 4$). Le théorème 1 donne seulement $\lambda_2 \leq \mu_2 - 1 \leq \mu_1 - 1$.

Conjecture 3 (#501193)**.** $2R \leq \mathrm{rg}(A) \cdot \lambda_1$.

Il y a égalité pour *tous* les bipartis complets $K_{a,b}$ ($\mathrm{rg}(A) = 2$, $\lambda_1 = R = \sqrt{ab}$). C'est un énoncé élégant reliant rang, rayon spectral et indice de Randić. Noter que $R \leq \lambda_1$ est faux en général (chemins), de sorte que le rang est indispensable.

Conjecture 4 (#112951)**.** $\lambda_1 \leq R + \mu_2$.

Elle mélange les trois spectres : adjacence, laplacien et Randić. Il y a égalité pour K_2.

Conjecture 5 (#239534)**.** $\mu_2 + \mathrm{rg}(A) \leq 2m$.

Il y a égalité pour K_2, K_3 et P_4. Pour un arbre, $\mathrm{rg}(A)$ est le double de la taille ν d'un couplage maximum, et la conjecture s'écrit $2\nu + \mu_2 \leq 2n - 2$.

Conjecture 6 (lemmes minés non démontrés)**.**
(i) $R^2 \geq \dfrac{m+1}{2}$. Elle améliore Bollobás–Erdős ($R^2 \geq n - 1$) pour les graphes denses.
(ii) $\mu_2^2 \geq 4\lambda_2 + 1$, avec égalité pour les étoiles.
(iii) $\mu_1^2 \geq 4\lambda_2 + 8$, asymptotiquement optimale sur les chemins.
(iv) $R \geq \frac{2}{3}\sqrt{m} + \frac{1}{3}$ et $R \geq \frac{3}{2}\sqrt{\mathrm{rg}(A)} + 1 - \frac{3\sqrt{2}}{2}$, avec égalité pour K_2.

Conjecture 7 (forme de Caporossi–Hansen)**.** $R \geq \mathrm{rad} + \sqrt{2} - \frac{3}{2}$.

Il y a égalité pour les chemins d'ordre pair. Caporossi et Hansen l'ont démontrée pour les arbres. Elle découle de leur conjecture $R \geq \mathrm{rad}$ (sauf chemins pairs) et implique celle de Fajtlowicz, $R \geq \mathrm{rad} - 1$. Elle a été redécouverte automatiquement par le minage de lemmes. C'est la plus importante du point de vue de la littérature, mais aussi la plus difficile. À elle seule, elle débloquerait plus de 3 000 preuves conditionnelles du corpus.

8 Archive des preuves

Toutes les preuves sont rassemblées dans l'archive `preuves_spectrales.zip`, qui contient :

- `index_conjectures.csv` : une ligne par conjecture du corpus (305 755), avec son statut, son énoncé, les lemmes de sa preuve, le contre-exemple éventuel et, pour les 79 505 preuves vérifiées, le fichier et le théorème Lean correspondants ;
- `lemmes.csv` : la bibliothèque de lemmes, avec énoncé, référence, théorème Lean et nombre de preuves qui utilisent chaque lemme ;
- `lean/` : le projet Lean 4 complet (bibliothèque `SpectralLean`, dont la preuve de Yang–Lu) et les 3 650 fichiers de preuves, avec un script qui les recompile tous ;
- `documents/` : ce rapport et le plan détaillé de la preuve de Yang–Lu ;
- `prouveur/` : le code de la chaîne (réfutation, preuve par z3, minage de lemmes, export Lean).

Pour chaque conjecture vérifiée #i, le théorème `g`i énonce l'inégalité pour tout graphe simple connexe sur `Fin n`. Pour lui faire confiance, il suffit de relire les définitions des invariants (`SpectralLean/Invariants.lean`) et son énoncé.

Bilan chiffré

Conjectures du corpus	305 755
Réfutées	162 964
Démontrées sans hypothèse non prouvée	117 390
dont vérifiées de bout en bout en Lean	79 505
Démontrées sous un lemme empirique ou une conjecture ouverte	3 798
Non définies sur certains graphes	7 453
Ouvertes et non réfutées (après tests sur grands graphes)	14 150

Références

[1] E. Duhamel, T. Cazenave, Spectral Graph Theory Conjecture Generation, *AAAI 2026 Workshop AI for Research* ; corpus : `https://www.lamsade.dauphine.fr/~cazenave/papers/Conjectures.zip`.

[2] O. Favaron, M. Mahéo, J.-F. Saclé, Some eigenvalue properties in graphs (conjectures of Graffiti II), *Discrete Math.* 111 (1993).

[3] Y. Hong, A bound on the spectral radius of graphs, *Linear Algebra Appl.* 108 (1988).

[4] B. Bollobás, P. Erdős, Graphs of extremal weights, *Ars Combin.* 50 (1998).

[5] P. Erdős, M. Saks, V. T. Sós, Maximum induced trees in graphs, *J. Combin. Theory Ser. B* 41 (1986).

[6] Y. Yang, L. Lu, The Randić index and the diameter of graphs, *Discrete Math.* 311 (2011), arXiv :1104.0426.

[7] W. Haemers, A. Mohammadian, B. Tayfeh-Rezaie, On the sum of Laplacian eigenvalues of graphs, *Linear Algebra Appl.* 432 (2010).

[8] J. H. Smith, Some properties of the spectrum of a graph, in *Combinatorial Structures and their Applications*, Gordon and Breach (1970).

[9] H. Deng, Z. Tang, J. Zhang, On a conjecture of Randić index and graph radius, *Filomat* (2015), arXiv :1210.2543.