

**Exercice 1** Recopier en la complétant cette fonction python de tri insertion d'un tableau A d'entiers.

```
def trins(A):
    for j in range(1,len(A)):
        x=A[j]
        i=j-1
        while

        A[i+1]=x
```

**Exercice 2** Recopier en la complétant cette fonction python pour qu'elle retourne un triplet  $(u,v,d) \in \mathbb{Z}^3$  tels que  $au + bv = d$ , où d est le pgcd de a, b.

```
def B(a,b):
    if b==0:

    else:
        [x,y,d]=B(b,a%b)
```

- Exercice 3**
1. Quelle est la parité du produit de deux entiers pairs ?
  2. Quelle est la parité du produit de deux entiers impairs ?
  3. Démontrez que  $\log_7 4 \notin \mathbb{Q}$ .

**Exercice 4** Soit

```
y=0
def f(x):
    global y
    if x>0:
        f(x//2)
        f(x//2)
        y=y+x
```

1. Combien vaut

$$\left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor}{2} \right\rfloor$$

$$\left\lfloor \frac{\vdots}{2} \right\rfloor$$

que l'on obtient par des divisions de x par 2 et des arrondis successifs ? Démontrez votre réponse.

2. Donnez l'expression de y en fonction de x, après l'appel à f(x).
3. Donnez la fonction f(x) telle que  $y = \Theta(f(x))$ .
4. Démontrez la réponse précédente.
5. Quelle est la complexité de f() ?

**Exercice 5** Soient  $n, b, p \geq 2$  des entiers, et soit  $T(n)$  une fonction, représentant le temps d'exécution d'un algorithme en fonction de la taille n de son entrée, telle que  $T(b^p) = (p + 1)b^{cp}$ , lorsque n est une puissance de b. Montrez que  $T(n) = \Theta(n^c \log n)$ .

**Exercice 6** 1. Donnez la définition complète de  $f(n) = \Theta(g(n))$ .

2. Sous quelle(s) condition(s) sur l'entier  $b$  et sur la fonction  $f()$ , a-t-on  $f(n) - b = \Theta(f(n))$  ?

3. Démontrez la réponse précédente.

**Exercice 7** Considérons un algorithme dont la taille des entrées peut-être représentée par un entier  $n$ , et dont le temps d'exécution  $T(n)$  satisfait:

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{si } n < b \\ aT(n-b) + \Theta(n^c) & \text{si } n \geq b \end{cases}$$

où  $a, b, c \in \mathbb{N}$  et  $b \geq 1$ .

1. Donnez la fonction  $f(n)$  telle que  $T(n) = \Theta(f(n))$ , à l'aide des paramètres  $a, b, c$ .

2. À quelle condition, nécessaire et suffisante, sur les paramètres, l'algorithme n'est pas exponentiel ?

3. En supposant cette condition satisfaite, donnez le polynôme  $p(n)$  telle que  $T(n) = \Theta(p(n))$ .

4. Démontrez la réponse précédente.

**Exercice 8** Expliquez l'algorithme de Strassen multipliant les matrices carrées  $n \times n$  plus rapidement qu'en  $\Theta(n^3)$ .