PARTIEL : Algorithme et Programmation Université Paris-Dauphine MIDO L2

Exercice 1 *Combien vaut* $\lfloor \log_2(1372) \rfloor$ *?*

(1 point) 10 (puisque $1024 = 2^{10} \leq 1372 < 2^{11} = 2048$).

Exercice 2 *Montrez que* $\log_b n = \log_b a \times \log_a n$.

(1 point) Avec u, v, w tels que $b^u = n$, $b^v = a$, et $a^w = n$, on a : $n = b^u = a^w = (b^v)^w = b^{vw}$. On a donc $u = vw$ (par bijectivité).

Exercice 3 *Montrez que* $a^{\log_b n} = n^{\log_b a}$.

(1 point) Avec u, v tels que $b^u = n$ et $b^v = a$, on a : $a^u = (b^v)^u = b^{uv} = (b^u)^v = n^v$. On accepte aussi les solutions utilisant l'exercice précédent.

Exercice 4 *Montrez que* $(b^q)^{\log_b a} = a^q$.

(1 point) Avec u tel que $b^u = a$ on a : $(b^q)^u = b^{uq} = (b^u)^q = a^q$.

Exercice 5 *Combien d'opérations élémentaires (tests, affectations, opérations arithmétiques) effectuent ce programme en python ?*

```
def A():
    a=8
    while a > 0:
          for i in range(2):
               a = a - 1
```

(1 point) `A()` fait 1 affectation, 5 tests dans while (pour a=8,6,4,2,0), 4 passages dans la boucle while soit 4x8=32 opérations sur i dans for, 8+8 opérations décrémentation de a = 6+32+16=54 opérations élémentaires. (Puisque range(n) fait n+1 tests, n+1 affectations et n addition soit 3n+2 opérations)

(Autre solution tolérée: On accepte aussi la réponse où l'on code `for` par un `do while` au lieu de `while do`, range(n) fait alors n tests, soit 3n+1 opérations, et on a pour `A()` 1 affectation, 5 tests while, 4x7=28 opérations for, 16 opérations décrémentation = 50)

Exercice 6 *Ecrire un programme en python retournant le plus grand diviseur commun de deux entiers.*

(1 point) On évalue surtout le python, donc on accepte aussi avec l'hypothèse $a \geq b$, et bien sur la version itérative, on accepte aussi l'exploration de tous les entiers entre 1 et a.

```
def e(a,b):
     if a*b==0:
         return a+b
     else:
         if a>b:
             return e(b,a%b)
         else:
             return e(a,b%a)
```

Exercice 7 *Quelle est la valeur de* `y` *après l'appel* `f(30)` *?*

```
y=0
def f(x):
        global y
        if x>0:
                f(x//3)
                f(x//3)
                f(x//3)
        else:
                y=y+1
```

(2 points) $f(30) = 3^{\lfloor \log_3 30 \rfloor + 1} = 3^4 = 81$. (c'est le nombre d'appels à $f(0)$)

Exercice 8 *Quelle est la valeur de* `y` *après l'appel* `f(31)` *?*

```
y=0
def f(x):
        global y
        if x>0:
                f(x//3)
                f(x//3)
                f(x//3)
                y=y+1
```

(2 points) $f(31) = 3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 = 40$ $(= \sum_{i=0}^{\lfloor \log_3 31 \rfloor})$ (c'est le nombre d'appels à $f(x)$ avec $x \neq 0$).

Exercice 9 *Soient deux entiers x, b tels que*

$$x = \sum_{i=0}^{\lfloor \log_b x \rfloor} x_i b^i$$

Exprimez x_i en fonction (uniquement) des trois entiers x, b et i.

(2 points) On a $x_i = \lfloor \frac{x}{b^i} \rfloor - b \lfloor \frac{x}{b^{i+1}} \rfloor$

Exercice 10 *Montrez qu'effectuer i divisions successives par 2 en arrondissant à chaque fois revient à diviser par 2^i et arrondir, c'est-à-dire que l'égalité ci-dessous est toujours vraie:*

$$\left\lfloor \frac{\overset{\left\lfloor \frac{\lfloor \frac{x}{2} \rfloor}{2} \right\rfloor}{\vdots}}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{2^i} \right\rfloor$$

A-t-on

$$\left\lceil \frac{\overset{\left\lceil \frac{\lceil \frac{x}{2} \rceil}{2} \right\rceil}{\vdots}}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{x}{2^i} \right\rceil$$

?

(1 point) (On accepte aussi les présentations, rigoureuses, par récurrence sur i). La première égalité de l'énoncé est vraie car si on exprime x en base 2, on a:

$$\begin{array}{cclllllll}
x & = & x_0 & +2x_1 & +2^2x_2 & +2^3x_3 & +\dots & +2^ix_i & +\dots & +2^nx_n \\
\lfloor \frac{x}{2} \rfloor & = & & x_1 & +2x_2 & +2^2x_3 & +\dots & +2^{i-1}x_i & +\dots & +2^{n-1}x_n \\
\left\lfloor \frac{\lfloor \frac{x}{2} \rfloor}{2} \right\rfloor & = & & & x_2 & +2x_3 & +\dots & +2^{i-2}x_i & +\dots & +2^{n-2}x_n \\
& \vdots & & & & & \vdots & & & \\
\left\lfloor \frac{\overset{\left\lfloor \frac{\lfloor \frac{x}{2} \rfloor}{2} \right\rfloor}{\vdots}}{2} \right\rfloor & = & & & & & & x_i & +\dots & +2^{n-i}x_n
\end{array}$$

et

$$\left\lfloor \tfrac{x}{2^i} \right\rfloor \quad = \quad \left\lfloor \tfrac{\sum_{j=0}^{i-1} 2^j x_j}{2^i} \right\rfloor \quad +x_i \quad +\ldots \quad +2^{n-i}x_n$$

or

$$\left\lfloor \frac{\sum_{j=0}^{i-1} 2^j x_j}{2^i} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{\sum_{j=0}^{i-1} 2^j}{2^i} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2^i - 1}{2^i} \right\rfloor = 0$$

(2 points) On a aussi la deuxième égalité de l'énoncé car si $x_0 = x_1 = \ldots = x_{i-1} = 1$ on a

$$\begin{array}{lllllllll}
x & = x_0 & +2x_1 & +2^2x_2 & +2^3x_3 & +\ldots & +2^ix_i & +\ldots & +2^nx_n \\
\left\lceil \frac{x}{2} \right\rceil & = 1 & +x_1 & +2x_2 & +2^2x_3 & +\ldots & +2^{i-1}x_i & +\ldots & +2^{n-1}x_n \\
\left\lceil \frac{\left\lceil \frac{x}{2} \right\rceil}{2} \right\rceil & = 1 & & +x_2 & +2x_3 & +\ldots & +2^{i-2}x_i & +\ldots & +2^{n-2}x_n \\
& \vdots & & & & \vdots & & & \\
\left\lceil \frac{\left\lceil \frac{\left\lceil \frac{x}{2} \right\rceil}{2} \right\rceil \vdots}{2} \right\rceil & = 1 & & & & & +x_i & +\ldots & +2^{n-i}x_n
\end{array}$$

et en fait la dernière égalité est vraie pour toutes les valeurs des x_j $(j < i)$ à moins que $x_0 = x_1 = \ldots = x_{i-1} = 0$. Par ailleurs on a

$$\left\lceil \tfrac{x}{2^i} \right\rceil \quad = \quad \left\lceil \tfrac{\sum_{j=0}^{i-1} 2^j x_j}{2^i} \right\rceil \quad +x_i \quad +\ldots \quad +2^{n-i}x_n$$

or

$$\left\lceil \frac{\sum_{j=0}^{i-1} 2^j x_j}{2^i} \right\rceil = 1$$

à moins que $x_0 = x_1 = \ldots = x_{i-1} = 0$, mais dans ce cas:

$$\left\lceil \frac{\left\lceil \frac{\left\lceil \frac{x}{2} \right\rceil}{2} \right\rceil \vdots}{2} \right\rceil \quad = \quad 0 \quad +x_i \quad +\ldots \quad +2^{n-i}x_n \quad = \left\lceil \tfrac{x}{2^i} \right\rceil$$

Exercice 11 *Montrez que* $\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{i} = \Theta(\log n)$.

(2 points) Avec $2^p \leq n < 2^{p+1}$, on a

$$\frac{1}{2^p} + \ldots + \frac{1}{9} + \frac{1}{8} + \frac{1}{7} + \frac{1}{6} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \leq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{2^{p+1}}$$

donc, pour $p \geq 2$,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \leq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^{p+1}} = \sum_{i=0}^{p+1} 2^i 2^{-i} = p + 2 \leq 2p = O(\log_2 n) = O(\log n)$$

et

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \geq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^p} = 1 + \sum_{i=1}^{p} 2^{i-1} 2^{-i} = 1 + \frac{p}{2} \geq \frac{p}{2} = \Omega(\log_2 n) = \Omega(\log n)$$

Exercice 12 *Montrez que* $\log(n!) = \Theta(n \log n)$.

(1 point) On a $n! \leq n^n$ donc $\log(n!) = O(n \log n)$.

$$n! = n \times (n-1) \times \ldots \times \frac{n}{2} \times \ldots \times 1 \geq n \times (n-1) \times \ldots \times \frac{n}{2} \geq (n/2)^{\frac{n}{2}}$$

donc $\log(n!) \geq \frac{n}{2} \log(n/2) = \frac{n}{2}(\log n - \log 2) = \Omega(n \log n)$.

Exercice 13 *Que fait ce programme où a et b en entrée sont deux entiers tels que $a \geq b$?*

```
def B(a,b):
        if b==0:
                return [a,1,0]
        else:
                [d,u,v]=B(b,a%b)
                return [d,v,u-(a//b)*v]
```

(2 points) Il retourne un triplet d'entiers relatifs `[d,u,v]` tel que $au + bv = d$ =pgcd(a, b).