Algorithmique et Programmation 3
TP 4: Algorithme de Karatsuba et Propagation des virus

19/11/2020

1 Multiplication de Karatsuba

Étant donné deux nombres de n chiffres, nous allons calculer leur produit. La méthode classique, celle qui multiplie chaque chiffre du multiplicateur par chaque chiffre du multiplicande, aussi connue comme la méthode de multiplication naïve, prend $O(n^2)$ opérations pour trouver le résultat. En 1962, Anatolii Karatsuba a développé son propre algorithme de multiplication, en réussissant une complexité de $O(n^{log_2(3)})$.

L'algorithme de Karatsuba se base sur le principe que, pour multiplier deux nombres

$$x = a \cdot 10^k + b, y = c \cdot 10^k + d, \text{ avec } 0 \leq k \leq n,$$

on a besoin de calculer seulement trois produits : ac, bd, et $(a-b)(c-d)$ (et pas quatre comme dans la multiplication naïve).

1. Écrivez la méthode de multiplication naïve pour deux nombres $x, y \in \mathbb{Z}$.
2. Écrivez l'algorithme récursive de Karatsuba, qui prend comme paramètres deux nombres $x, y \in \mathbb{Z}$. À chaque fois considérez $k = \lfloor n/2 \rfloor$.
3. Comparez la performance des deux algorithmes.

2 Algorithme inconnu

Implémentez et devinez ce que fait l'algorithme suivant.

Algorithm 1: Algorithme inconnu

```
Data: a, b entiers
Soit c = 0
while 0 < b do
    if b est impair then
        c = c + a
    a = 2a
    b = ⌊b/2⌋
Retourner c
```

3 Propagation de la Covid

On considère un groupe de personnes dont certaines sont infectées du virus de la Covid (état X) et certaines sont saines (état 0). On va étudier la propagation du virus dans le groupe. Pour cela, considérez que le groupe est une grille tel qu'il suit,

X	0	0	X
0	0	X	0
0	0	0	0
X	0	0	0

À chaque heure d'un jour on révise l'état de la grille. Si à une certaine heure h une personne saine a deux ou plus voisins infectés (vertical et/ou horizontal), elle passe à l'état X en $h + 1$. Quand une personne devient malade, elle reste malade pour toujours.

1. Écrivez une fonction qui, étant donné une grille comme celle de l'exemple, calcule l'état de la grille à l'heure suivante. Qu'est-ce que nous pouvons conclure si la grille ne change pas ?
2. Combien de personnes malades faut-il pour contaminer éventuellement toute une grille ? Est-ce que leur distribution initiale dans la grille peut affecter le résultat final ?
3. Considérez la grille de l'exemple. Combien d'heures faut-il attendre pour que tous soient infectés ?