Algorithmique et Programmation 3
TP 6: Arbres

03/12/2020

Soient un ensemble fini T, un élément $r \in T$ et une fonction $p : T \setminus \{r\} \to T$. Si pour tout $x \in T \setminus \{r\}$, il existe un entier k tel que $p^k(x) = r$ (où nous avons noté $p^k(x) = p(p^{k-1}(x))$) avec $p^0(x) = x$), alors T muni de la fonction p est un **arbre**. Nous disons que r est la **racine** de T, que $p(x)$ est le **pere** de x, et que x est un **fils** de $p(x)$.

Plus généralement, pour $k \geq 1$, $p^k(x)$ est un **ancêtre** de x, et x est un **descendant** de $p^k(x)$. Un élément sans descendant est une **feuille** de l' arbre.

Étant donné $x \in T$, sa **hauteur** sera 0 si x est une feuille, ou la valeur maximum de k tel que $x = p^k(y)$, pour un descendant feuille y de x. En particulier, la **hauteur** de T est -1 si $T = \emptyset$, ou la hauteur de sa racine r.

Vous allez construire des fonctions permettant la représentation et la manipulation d'arbres. Un arbre sera implémenté sous la forme d'un tableau.

1. Écrivez une fonction qui, étant donné (T, x, p) avec T un ensemble fini, $x \in T$ et p une fonction père, calcule le père de x.
2. Écrivez une fonction qui, étant donné (T, r, p) avec T un ensemble fini, r une racine et p une fonction père, calcule tous les éléments de l'arbre et retourne une matrice M de dimension $T \times T$ où, pour tout $i, j \in T$:

$$M_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{if } i = p(j) \\ -1 & \text{if } j = p(i) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   M sera appelée la **matrice d'adjacence** de l'arbre (T, r, p).
3. Écrivez une fonction qui, étant donné une matrice d'adjacence M, calcule la racine de l'arbre.
4. Écrivez deux méthodes récursives calculant la profondeur d'un arbre (T, r, p), d'abord en recevant comme paramètre T, r et p ; et puis en recevant comme paramètre la matrice d'adjacence M.