# Corrigé PARTIEL PL : 1h30

**Exercice 1** (4 points)

Soients:

| | |
|---|---|
| $x_1$ | barils vendus brut de Alkylate (par jour) |
| $x_2$ | barils vendus brut de Catalytic-cracked |
| $x_3$ | barils vendus brut de Straight-run |
| $x_4$ | barils vendus brut de Isopentane |

| | |
|---|---|
| $x_1^A$ | barils vendus en mélange A de Alkylate |
| $x_2^A$ | barils vendus en mélange A de Catalytic-cracked |
| $x_3^A$ | barils vendus en mélange A de Straight-run |
| $x_4^A$ | barils vendus en mélange A de Isopentane |

et

| | |
|---|---|
| $x_1^B$ | barils vendus en mélange B de Alkylate |
| $x_2^B$ | barils vendus en mélange B de Catalytic-cracked |
| $x_3^B$ | barils vendus en mélange B de Straight-run |
| $x_4^B$ | barils vendus en mélange B de Isopentane |

Alors il faut résoudre le PL suivant:

$$(PL)\left\{\begin{array}{rll}
\multicolumn{3}{l}{\max \sum_{i=1}^{i=4} 4.83 x_i + \sum_{i=1}^{i=4} 6.45 x_i^A + \sum_{i=1}^{i=4} 5.91 x_i^B} \\
x_1 + x_1^A + x_1^B & \leq 5,814 & \\
x_2 + x_2^A + x_2^B & \leq 2,666 & \\
x_3 + x_3^A + x_3^B & \leq 4,016 & \\
x_4 + x_4^A + x_4^B & \leq 1,300 & \\
7x_1^A - 7x_2^A - 13x_3^A + 8x_4^A & \geq 0 & \\
16x_1^B + 2x_2^B - 4x_3^B + 17x_4^B & \geq 0 & \\
-2x_1^A + x_2^A - 3x_3^A + 14x_4^A & \leq 0 & \\
-2x_1^B + x_2^B - 3x_3^B + 14x_4^B & \leq 0 & \\
x_i, x_i^A, x_i^B & \geq 0 & \text{pour } i = 1,2,3,4.
\end{array}\right.$$

**Exercice 2** (8 points)

1. Il est facile de trouver les quatres premières lignes par substitution:

$$\begin{array}{rrrrrrrrr}
x_7 = & 2 & -x_1 & & & -2x_5 & -x_8 & & +x_{11} \\
x_9 = & 6 & -x_1 & -5x_2 & & +3x_5 & +3x_8 & +2x_{10} & \\
x_6 = & 14 & -2x_1 & -8x_2 & -x_3 & -2x_5 & & -x_{10} & -5x_{11} \\
x_4 = & 1 & +x_1 & -x_2 & -3x_3 & +x_5 & -4x_8 & +\frac{7}{3}x_{10} & -x_{11}
\end{array}$$

Une fois les 4 premières lignes connues, on peut trouver la dernière ligne en injectant les expressions trouvées, pour cela il peut être commode de poser un tableau comme:

| | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_5$ | $x_8$ | $x_{10}$ | $x_{11}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-x_4$ | $-1$ | $-1$ | $1$ | $3$ | $-1$ | $4$ | $-7/3$ | $1$ |
| $-9x_6$ | $-126$ | $18$ | $72$ | $9$ | $18$ | | $9$ | $45$ |
| $+9x_9$ | $54$ | $-9$ | $-45$ | | $27$ | $27$ | $18$ | |
| $-8x_7$ | $-16$ | $8$ | | | $16$ | $8$ | | $-8$ |
| | | $3$ | $1$ | $-4$ | $-2$ | $-1$ | $-8$ | $-1$ |
| | $-89$ | $19$ | $29$ | $8$ | $58$ | $38$ | $50/3$ | $37$ |

On connait alors la dernière ligne et le dictionnaire est donc

$$\begin{array}{rrrrrrrrr}
x_7 = & 2 & -x_1 & & & -2x_5 & -x_8 & & +x_{11} \\
x_9 = & 6 & -x_1 & -5x_2 & & +3x_5 & +3x_8 & +2x_{10} & \\
x_6 = & 14 & -2x_1 & -8x_2 & -x_3 & -2x_5 & & -x_{10} & -5x_{11} \\
x_4 = & 1 & +x_1 & -x_2 & -3x_3 & +x_5 & -4x_8 & +\frac{7}{3}x_{10} & -x_{11} \\
\hline
c^\top x = & -89 & +19x_1 & +29x_2 & +8x_3 & +60x_5 & +38x_8 & +\frac{50}{3}x_{10} & +37x_{11}
\end{array}$$

Mais cela reste fastitieux et peut conseillé. En fait pour trouver cette dernière ligne, dont l'expression formelle est:

$$c^\top x = c_B^\top A_B^{-1} b + (c_{\overline{B}}^\top - c_B^\top A_B^{-1} A_{\overline{B}}) x_{\overline{B}}$$

on pouvait aussi calculer

$$A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ou mieux directement le vecteur $y^\top = c_B^\top A_B^{-1}$ qui est la solution du système

$$\begin{array}{rrrrl}
 & & & 3y_4 & = -1 \\
 & & y_3 & & = -9 \\
y_1 & & & & = -8 \\
 & y_2 & & & = 9
\end{array}$$

dont la solution est triviale. On peut vérifier qu'en effet

$$y^\top = (-8, 9, -9, -1/3) = (-1, -9, -8, 9) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a ensuite

$$\psi = (-8, 9, -9, -1/3) \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 14 \\ 3 \end{pmatrix} = -89$$

On peut vérifier par exemple le coût réduit $\tilde{c}_8$:

$$\tilde{c}_8 = -1 - (-8, 9, -9, -1/3) \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} = 38$$

2. La matrice $A_B$ est inversible donc $B$ est une base. Cette base n'est réalisable que si la solution de base associée, $(x_B, x_{\overline{B}}) = (\tilde{b}, \mathbf{0})$ (avec $\tilde{b} = A_B^{-1}b$) est telle que $x_B \geq 0$. Donc il vaut vérifier que la solution du système $A_B x_B = b$ est bien positive. Pour $B = \{1, 2, 3, 4\}$ ce système est

$$\begin{array}{rrrrl} x_1 & & & & = 2 \\ x_1 & +5x_2 & & & = 6 \\ 2x_1 & +8x_2 & +x_3 & & = 14 \\ -3x_1 & +3x_2 & +9x_3 & +3x_4 & = 3 \end{array}$$

dont la solution est

$$\begin{array}{ccccl} x_1 & & & & = 2 \\ & x_2 & & & = 4/5 \\ & & x_3 & & = 18/5 \\ & & & x_4 & = -43/5 \end{array}$$

Puisque $x_4 < 0$ on en déduit qu'en fait la base n'est pas réalisable.

3. Cette solution non-réalisable donne une valeur (non-atteignable) $\psi = c_B^\top x_B$ soit, puisque $c_B^\top = (3, 1, -4, -1)$, $\psi = 3 \times 2 + \frac{4}{5} - 4 \times \frac{18}{5} + \frac{43}{5} = 1$.

4. $x_5$ ne peut pas être une variable entrante puisque la base n'est pas réalisable. On peut toutefois calculer sont coût réduit $\tilde{c}_5 = c_5 - c_B^\top A_B^{-1} A_5$. Le vecteur $y^\top = c_B^\top A_B^{-1}$ qui est la solution du système

$$\begin{array}{rrrrl} y_1 & +y_2 & +2y_3 & -3y_4 & = 3 \\ & +5y_2 & +8y_3 & +3y_4 & = 1 \\ & & +y_3 & +9y_4 & = -4 \\ & & & +3y_4 & = -1 \end{array}$$

dont la solution est

$$\begin{array}{ccccl} y_1 & & & & = 2 \\ & y_2 & & & = 2 \\ & & y_3 & & = -1 \\ & & & y_4 & = -1/3 \end{array}$$

D'où $\tilde{c}_5 = -2 + 2 \times 2 - 2 \times 3 - 1 \times 2 + 1 = -5$.

5. La colonne $\tilde{A}_5 = -A_B^{-1} A_5$ vérifie $\tilde{A}_5 = -a$ où $a$ est la solution du système

$$\begin{array}{rrrrl} a_1 & & & & = 2 \\ a_1 & +5a_2 & & & = -3 \\ 2a_1 & +8a_2 & +a_3 & & = 2 \\ -3a_1 & +3a_2 & +9a_3 & +3a_4 & = -3 \end{array}$$

dont la solution est

$$\begin{array}{llllll} a_1 & & & & = 2 \\ & a_2 & & & = -1 \\ & & a_3 & & = 6 \\ & & & a_4 & = 16 \end{array}$$

6. Il n'y a pas de variable entrante possible car la base n'est pas réalisable.

**Exercice 3** (3 points)

Pour montrer que la proposition est vraie, montrons que la contraposée est vraie: Si, pour tout indice $j \in \{1, \ldots, n\}$, il existe $M_j$ tel que $\bar{x}_j \leq M_j$ pour tout $\bar{x}$ réalisable, alors il existe un $M$ tel que $c^\top \bar{x} \leq M$. C'est clairement vrai en prenant $M := \sum_{j=1}^{j=n} c_j M_j$.

**Exercice 4** (5 points)

Pour montrer que la proposition est fausse, donnons un contre-exemple:

$$(PL) \begin{cases} \max x_1 \\ x_1 \leq 0 \\ x_1 \geq 0 \end{cases}$$

Le premier dictionnaire a un coût réduit positif mais il est optimal:

$$\begin{array}{l} x_2 = 0 - x_1 \\ \hline z = x_1 \end{array}$$

Le simplexe se termine avec le deuxième, qui est:

$$\begin{array}{l} x_1 = 0 - x_2 \\ \hline z = -x_2 \end{array}$$