PARTIEL PL : 1h30

Exercice 1 (4 points)

Une raffinerie produit 4 types de carburant. Les deux caractéristiques principales d'un carburant sont son indice de performance IP et l'adhésivité de son évaporation AE. Le tableau suivant rend compte des caractéristiques des carburants et de leur production:

type	IP	AE	production (barils/jour)
Alkylate	107	5	5,814
Catalytic-cracked	93	8	2,666
Straight-run	87	4	4,016
Isopentane	108	21	1,300

Ces carburants peuvent être vendus soit brut à \$4.83 le baril, soit en mélange pour avion. Il y a deux qualités de mélange dont les exigences et le prix de vente sont donné par:

qualité	IP	AE	prix du baril
aviation gasoline A	au-moins 100	au plus 7	\$6.45
aviation gasoline B	au-moins 91	au plus 7	\$5.91

Le IP et le AE de chaque mélange est simplement la moyenne pondérée des IP et AE des carburants présents dans le mélange. Formuler par un PL la stratégie optimale de vente de la raffinerie.

Exercice 2 (8 points)

Soit le PL sous la forme $\max\{c^\top x : Ax = b, x \geq 0\}$ suivant:

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrl}
\max & 3x_1 & +x_2 & -4x_3 & -x_4 & -2x_5 & -9x_6 & -8x_7 & -x_8 & +9x_9 & -8x_{10} & -x_{11} & \\
& x_1 & & & & +2x_5 & & +x_7 & +x_8 & & & -x_{11} & = 2 \\
& x_1 & +5x_2 & & & -3x_5 & & & -3x_8 & +x_9 & -2x_{10} & & = 6 \\
& 2x_1 & +8x_2 & +x_3 & & +2x_5 & +x_6 & & & & +x_{10} & +5x_{11} & = 14 \\
& -3x_1 & +3x_2 & +9x_3 & +3x_4 & -3x_5 & & & +12x_8 & & -7x_{10} & +3x_{11} & = 3 \\
& x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6, & x_7, & x_8, & x_9, & x_{10}, & x_{11} & \geq 0
\end{array}
$$

Soit $I = \{1, 2, 3, \ldots, 11\}$. Pour tout $B \subseteq I$ on note:

- $\overline{B} := I \setminus B$,
- A_B la sous-matrice de matrice dont les colonnes sont dans B,
- x_B le sous-vecteur de x dont les composantes sont dans B,

- et, si A_B est inversible, on appelle dictionnaire associé à B le système (D) suivant:

$$(D)\begin{cases} x_B = \tilde{b} + \tilde{A}\, x_{\overline{B}} \\ c^\top x = \psi + \tilde{c}^\top\, x_{\overline{B}} \end{cases} \qquad \text{où} \qquad \begin{array}{l} \tilde{b} := A_B^{-1} b \\ \tilde{A} := -A_B^{-1} A_{\overline{B}} \\ \psi := c_B^\top A_B^{-1} b \\ \tilde{c}^\top := c_{\overline{B}}^\top - c_B^\top A_B^{-1} A_{\overline{B}} \end{array}$$

Dans les questions suivantes chacune des réponses doit être justifiée.

1. Exprimez le dictionnaire dans la base $B = \{4, 6, 7, 9\}$.
2. Montrez que $B = \{1, 2, 3, 4\}$ est une base réalisable.
3. Combien vaut ψ avec $B = \{1, 2, 3, 4\}$?
4. Démontrez que x_5 est une variable entrante possible pour la base $B = \{1, 2, 3, 4\}$ en donnant son coût réduit $\tilde{c}_5$.
5. Donnez la colonne $\tilde{A}_5$ pour la base $B = \{1, 2, 3, 4\}$.
6. En faisant entrer x_5 dans la base, donnez l'ensemble des variables sortantes possibles, choisissez-en une et donnez la valeur de ψ dans la nouvelle base que vous définirez.

Exercice 3 (3 points)

Démontrer ou infirmer: Si le PL $\max\{c^\top x : Ax \leq b,\ x \geq 0\}$, avec $c, x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ et $b \in \mathbb{R}^m$, est non-borné, alors il existe $k \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $\max\{x_k : Ax \leq b,\ x \geq 0\}$ est non-borné.

Exercice 4 (5 points)

Démontrer ou infirmer: Un dictionnaire réalisable de la forme décrite à l'exercice 2 décrit une solution optimale si et seulement si $\tilde{c}_i \leq 0$ pour tout $i \in I$.