EXAMEN PL

Exercice 1

Deux types de pétrole léger PL_1 et PL_2 sont produits dans une raffinerie en quantité respective de 30 et 70 tonnes par jour. PL_1 a un taux d'octane de 104 et PL_2 a un taux d'octane de 94. Des pétroles légers peuvent être mélangés dans n'importe quelles proportions, le taux d'octane du mélange obtenu variant alors linéairement avec les taux d'octane des parties constituant le mélange. Par exemple, un mélange obtenu à partir de 2 tonnes de PL_1 et de 3 tonnes de PL_2 pèsera 5 tonnes et aura un taux d'octane de $\frac{1}{5}(2 * 104 + 3 * 94) = 98$. De tels mélanges peuvent être vendus sur le marché sous le nom de “kérosène” si le taux d'octane est supérieur ou égal à 102 et sous le nom de “super” si le taux d'octane est supérieur ou égal à 96. La demande maximum de kérosène est de 20 tonnes par jour, la demande quotidienne de super n'est pas limitée. La vente d'une tonne de kérosène engendre un profit de 23 euros et la vente d'une tonne de super engendre un profit de 15 euros.
Formuler comme un programme linéaire le problème consistant à déterminer les quantités quotidiennes de kérosène et de super à produire à partir de PL_1 et de PL_2 afin de maximiser le profit.

Exercice 2

En utilisant la méthode du simplexe **avec les dictionnaires**, résoudre le problème suivant :

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
\text{maximiser} & 5x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 8x_4 \\
\text{s.c.} & \\
 & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 5 \\
 & x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 3 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{array}
\right.
$$

Exercice 3

Utiliser le thérorème des écarts complémentaires pour dire si

$$x_1^* = 0,\ x_2^* = 0,\ x_3^* = 5/2,\ x_4^* = 7/2,\ x_5^* = 0,\ x_6^* = 1/2$$

est optimale ou non ?

$$
\left\{
\begin{array}{lrl}
\text{max} & 4x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 - 5x_5 + 8x_6 & \\
\text{s.l.c.} & & \\
 & x_1 - 4x_3 + 3x_4 + x_5 + x_6 \leq & 1 \\
 & 5x_1 + 3x_2 + x_3 - 5x_5 + 3x_6 \leq & 4 \\
 & 4x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 3x_4 - 4x_5 + x_6 \leq & 4 \\
 & -x_2 + 2x_4 + x_5 - 5x_6 \leq & 5 \\
 & -2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 + 2x_6 \leq & 7 \\
 & 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 + 4x_5 + 5x_6 \leq & 5 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq & 0
\end{array}
\right.
$$

Exercice 4

Donnez le dual des programmes linéaires suivants:

1. $\max\{c^T x : Ax \leq b,\, x \leq 0\}$;
2. $\min\{c^T x : Ax \geq b\}$;
3. $\max\{c^T x : Ax = b\}$;
4. $\min\{c^T x : Ax = b,\, x \geq 0\}$;
5. $\max\{c^T x : Ax \leq b,\, x \geq 0\}$.

Exercice 5

Démontrer que l'assertion suivante est vraie:

Il existe un vecteur $c \in \mathbb{R}^n$ tel que $\max\{c^T x : Ax \leq b,\, x \geq 0\} = +\infty$
si et seulement si
il existe un $j \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $\max\{x_j : Ax \leq b,\, x \geq 0\} = +\infty$.

Exercice 6

Soient

- $A \in \{-1, 0, +1\}^{m \times n}$ avec exactement un +1 et un -1 (et des 0) dans chaque ligne,
- $c \in \mathbb{Z}^n$ tel que $\sum_{j=1}^{j=n} c_j = 0$, et
- $b \in \mathbb{Z}^m$ positif.

Montrer que le PL $\max\{c^T x : Ax \leq b\}$ admet une solution optimale telle que $x_1 = \sqrt{2}$.