# EXAMEN PL : 2h

**Exercice 1** (2 points)

Donnez les PLs $(D_1)$, $(D_2)$, $(D_3)$ et $(D_4)$ duaux de:

$$(P_1) = \left\{ \begin{array}{r} \min c^\top x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{array} \right. \qquad (P_2) = \left\{ \begin{array}{r} \max c^\top x \\ Ax = b \end{array} \right. \qquad (P_3) = \left\{ \begin{array}{r} \min c^\top x \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{array} \right. \qquad (P_4) = \left\{ \begin{array}{r} \max c^\top x \\ Ax \leq b \end{array} \right.$$

**Exercice 2** (8 points)

Soit le PL sous la forme $\max\{c^\top x : \, Ax = b, \, x \geq 0\}$ suivant:

$$\left\{ \begin{array}{lrrrrrrrrrrrl} \max & 3x_1 & +x_2 & -4x_3 & -x_4 & -2x_5 & -9x_6 & -8x_7 & -x_8 & +9x_9 & -8x_{10} & -x_{11} & \\ & x_1 & & & & +2x_5 & & +x_7 & +x_8 & & & -x_{11} & = 3 \\ & x_1 & +5x_2 & & & -3x_5 & & & -3x_8 & +x_9 & -2x_{10} & & = 8 \\ & 2x_1 & +8x_2 & +x_3 & & +2x_5 & +x_6 & & & & +x_{10} & +5x_{11} & = 14 \\ & -3x_1 & +3x_2 & +9x_3 & +3x_4 & -3x_5 & & & +12x_8 & & -7x_{10} & +3x_{11} & = 3 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6, & x_7, & x_8, & x_9, & x_{10}, & x_{11} & \geq 0 \end{array} \right.$$

Soit $I = \{1, 2, 3, \ldots, 11\}$. Pour tout $B \subseteq I$ on note: $A_B$ la sous-matrice de $A$ dont les colonnes sont indicées dans $B$, $x_B$ le sous-vecteur de $x$ dont les composantes sont dans $B$, et, si $A_B$ est inversible, on appelle dictionnaire associé à $B$ le système $(D)$ suivant (avec $\overline{B} := I \setminus B$)

$$(D) \left\{ \begin{array}{l} x_B = \tilde{b} - \tilde{A}\, x_{\overline{B}} \\ c^\top x = \psi + \tilde{c}^\top x_{\overline{B}} \end{array} \right. \qquad \text{où} \qquad \begin{array}{rl} \tilde{b} := & A_B^{-1} b \\ \tilde{A} := & A_B^{-1} A_{\overline{B}} \\ \psi := & c_B^\top A_B^{-1} b \\ \tilde{c}^\top := & c_{\overline{B}}^\top - c_B^\top A_B^{-1} A_{\overline{B}} \end{array}$$

Dans les questions suivantes chacune des réponses doit être justifiée.

1. Donnez les équations $x_B = \tilde{b} + \tilde{A}\, x_{\overline{B}}$ du dictionnaire associé à la base $B = \{4, 6, 7, 9\}$.
2. Soit $y_B := c_B^\top A_B^{-1}$. Donnez le vecteur $y_B$ pour $B = \{4, 6, 7, 9\}$ mais sans inverser la matrice $A_B$.
3. En déduire $\tilde{c}_2$ pour cette base.
4. Montrez maintenant que la base $B = \{1, 2, 3, 4\}$ est une base réalisable.
5. Combien vaut $\psi$ avec $B = \{1, 2, 3, 4\}$ ?
6. Démontrez que $x_5$ est une variable entrante possible pour la base $B = \{1, 2, 3, 4\}$ en donnant son coût réduit $\tilde{c}_5$.

7. Donnez la colonne $\tilde{A}_5$ pour la base $B = \{1, 2, 3, 4\}$.
8. En faisant entrer $x_5$ dans la base, donnez l'ensemble des variables sortantes possibles, choisissez-en une et donnez la valeur de $\psi$ dans la nouvelle base que vous définirez.