

PARTIEL PL : 1h30**Exercice 1** (4 points)

On souhaite répartir l'investissement d'une somme d'argent B dans plusieurs entreprises. Il existe $n \geq 4$ entreprises possibles a_1, \dots, a_n . L'investissement unitaire dans l'entreprise a_i coûte c_i et rapportera u_i . (On suppose que l'on peut investir la quantité que l'on souhaite au centime près dans une entreprise).

Par ailleurs on ne peut investir plus de 30 pourcent du budget total dans les entreprises a_1, a_2, a_3 .

Formuler par un programme linéaire le problème consistant à réaliser l'investissement le plus rentable.

Exercice 2 (4 points)

On considère le programme linéaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \quad 5x_1 + x_2 + 6x_3 + 2x_4 \\ 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 + x_4 \leq 24 \\ 8x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 36 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array} \right.$$

1. Écrire le PL ci-dessus sous la forme standard $\{\max c^\top x : Ax = b, x \geq 0\}$.
2. La solution $x_2 = x_3 = 3, x_i = 0$ pour les autres variables, est-elle réalisable? de base?
3. La base $\{3, 4\}$ est-elle réalisable? Optimale?

Exercice 3 (4 points)

Soit le PL:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \quad -x_1 - 2x_2 + x_3 \\ -3x_1 + x_2 \leq -1 \\ x_1 - x_2 \geq 1 \\ -2x_1 + 7x_2 \leq 6 \\ -5x_1 + 2x_3 = -3 \\ 7x_1 - 3x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0 \\ x_3 \leq 0 \end{array} \right.$$

1. Écrire le PL ci-dessus sous la forme standard $\{\max c^\top x : Ax = b, x \geq 0\}$.
2. Écrire le PL ci-dessus sous la forme canonique $\{\max c^\top x : Ax \leq b, x \geq 0\}$.

Exercice 4 (8 points)

On souhaiterait maximiser la fonction linéaire

$$c^\top x = x_1 + x_2 - 4x_3 - x_4 - 2x_5 - 9x_6 - 8x_7 - x_8 + 9x_9 - 8x_{10} - x_{11} - 8x_{13} + 8x_{15} - 8x_{18}$$

sous les contraintes $Ax = b$ et $x \geq 0$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 8 & -3 & -5 & 11 & -7 & 5 & 2 & 4 & 78 & 4 \\ 1 & 5 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & -3 & 1 & -9 & -8 & 2 & 12 & 2 & 0 & -5 & 8 & -8 & 9 \\ 2 & 8 & 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 4 & 8 & -48 & 5 & 2 & 58 & -7 & 3 \\ -3 & 3 & 9 & 3 & -4 & 0 & 0 & -8 & 0 & 7 & -2 & 7 & 12 & 2 & 0 & 7 & -78 & -1 & -8 \end{pmatrix}$$

et

$$b = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 14 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Dans les question suivantes vous choisirez toujours la variable x_i ayant l'indice i le plus petit possible, de plus vous justifierez soigneusement vos choix de variable. Le non respect de ces consignes entrainera automatiquement un zéro à la question.

1. Faites une itération du simplexe en partant de la base $B = \{4, 6, 7, 9\}$, c'est-à-dire, donnez une variable entrante et une variable sortante.
2. Même question en partant de la base $B = \{1, 2, 3, 4\}$.