Formulations et programmes linéaires

Exercice 1

Un atelier peut fabriquer trois types d'article :

- l'article A_1 à la cadence de 35 par heure,
- l'article A_2 à la cadence de 45 par heure,
- l'article A_3 à la cadence de 20 par heure.

Cette fabrication utilise une machine-outil unique et disponible 200 heures par mois. Le bénéfice unitaire est de 9 euros pour l'article A_1, de 6 euros pour l'article A_2 et de 12 euros pour l'article A_3. Ces objets sont vendus à des grossistes. On a observé que par mois, on ne pouvait pas écouler plus de 4900 articles de type A_1, plus de 5400 articles de type A_2 ni plus de 2000 articles de type A_3. D'autre part, chaque article doit être vérifié avant sa commercialisation. Une équipe de trois techniciens est chargée de cette mission et chaque technicien travaille 170 heures par mois. La vérification d'un article de type A_1 prend 4 minutes, de type A_2 trois minutes et de type A_3 deux minutes.
L'atelier veut organiser sa production mensuelle de manière à maximiser son bénéfice. Formuler ce problème comme un programme linéaire.

Exercice 2

Une entreprise de fabrication de fils téléphoniques produit trois types de fil (F_1, F_2 et F_3). Ces fils sont de différentes sections et sont obtenus à l'aide de cuivre enrichi de cadmium pour F_1 et F_2 ou de cadmium et d'étain pour F_3. Le tableau suivant donne la masse de cuivre (exprimée en kilogrammes), celles de cadmium et d'étain (exprimées toutes deux en décagrammes) nécessaires à la fabrication de 100 mètres de chacun de ces fils.

	F_1	F_2	F_3
cuivre	9	5	6
cadmium	2	1	2
étain	0	0	1

L'entreprise dispose de 600 kilogrammes de cuivre, de 152 décagrammes de cadmium et de 60 décagrammes d'étain. De plus, il faut une journée pour fabriquer 100 mètres de F_1, F_2 ou F_3. La force de travail disponible pour la production des fils s'élève à 90 jours. Les profits relatifs à la production de 100 mètres de fil s'élèvent à 637 euros, 592 euros et 789 euros pour F_1, F_2 et F_3 respectivement.
Formuler le problème de maximisation du profit de l'entreprise comme un programme linéaire.

Exercice 3

On désire déterminer la composition, à coût minimal, d'un aliment pour bétail qui est obtenu en mélangeant au plus trois produits bruts : orge, arachide et sésame. L'aliment ainsi conditionné devra comporter au moins 22% de protéines et 3.6% de graisse afin de se conformer aux exigences de la clientèle. Dans le tableau ci-dessous sont indiqués les pourcentages de protéines et de graisse contenues dans l'orge, les arachides et le sésame, ainsi que le coût par tonne de chacun des produits bruts.

produit brut	orge	arachide	sésame
protéines	12%	52%	42%
graisse	2%	2%	10%
coût	25	41	39

Formuler le problème comme un programme linéaire.

Exercice 4

Deux types de pétrole léger PL_1 et PL_2 sont produits dans une raffinerie en quantité respective de 30 et 70 tonnes par jour. PL_1 a un taux d'octane de 104 et PL_2 a un taux d'octane de 94. Des pétroles légers peuvent être mélangés dans n'importe quelles proportions, le taux d'octane du mélange obtenu variant alors linéairement avec les taux d'octane des parties constituant le mélange. Par exemple, un mélange obtenu à partir de 2 tonnes de PL_1 et de 3 tonnes de PL_2 pèsera 5 tonnes et aura un taux d'octane de $\frac{1}{5}(2 * 104 + 3 * 94) = 98$. De tels mélanges peuvent être vendus sur le marché sous le nom de "kérosène" si le taux d'octane est supérieur ou égal à 102 et sous le nom de "super" si le taux d'octane est supérieur ou égal à 96. La demande maximum de kérosène est de 20 tonnes par jour, la demande quotidienne de super n'est pas limitée. La vente d'une tonne de kérosène engendre un profit de 23 euros et la vente d'une tonne de super engendre un profit de 15 euros.
Formuler comme un programme linéaire le problème consistant à déterminer les quantités quotidiennes de kérosène et de super à produire à partir de PL_1 et de PL_2 afin de maximiser le profit.

Exercice 5

1. Une compagnie de production de café possède m usines différentes. Chaque usine i peut produire jusqu'à a_i tonnes par jour. Une fois produit, le café est envoyé dans n entrepôts avant d'être distribué et exporté. Pour une tonne de café, le coût de transport d'une usine i à un entrepôt j est de c_{ij} euros. De plus, chaque entrepôt j a une demande quotidienne de d_j tonnes. Le problème consiste à déterminer la stratégie de production-transport de moindre coût. Formuler ce problème comme un programme linéaire.
2. Formuler comme un programme linéaire le problème consistant à déterminer le plus grand entier d'une ensemble $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ de n entiers.

Exercice 6

Trouver des conditions nécessaires et suffisantes pour les nombres s et t pour que le programme linéaire

$$\begin{cases} \max & x_1 + x_2 \\ \text{s.l.c.} & \\ & sx_1 + tx_2 \leq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

a) admette une solution optimale

b) ne soit pas réalisable

c) ne soit pas borné.

Exercice 7

Écrire les programmes linéaires suivants sous la forme standard.

1.

$$\begin{cases} \min & x_1 + x_2 + x_3 \\ \text{s.l.c.} & \\ & 2x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 5 \\ & -2x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 1 \\ & x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} \max & 3x_1 - 5x_2 \\ \text{s.l.c.} & \\ & 4x_1 + 5x_2 \geq 3 \\ & 6x_1 - 6x_2 = 7 \\ & x_1 + 8x_2 \leq 20 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

3.

$$\begin{cases} \max & 3x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 + 5x_5 \\ \text{s.l.c.} & \\ & 9x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 3x_5 \leq 5 \\ & 8x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 9x_4 + 7x_5 \leq 2 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$