Examen de rattrapage

Exercice 1

1. Donnez le dual (D) du PL suivant :

$$(P) = \left\{ \begin{array}{ll} \text{maximiser} & 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 \\ \text{s.c.} & \\ & x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 4 \\ & 2x_1 + 3x_3 - 4x_4 \geq 5 \\ & 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \\ & x_4 \leq 0 \end{array} \right.$$

2. Mettez le primal (P) sous la forme canonique $(P_C) = \max\{c^\top x : Ax \leq b \ , \ x \geq 0\}$.

3. Donnez le dual (D_C) du primal (P_C) sous la forme canonique.

4. Soit $(-P)$ le PL obtenu en remplacant "maximiser" par "minimiser". Donnez le dual de $(-P)$.

5. Pourquoi les deux duaux (D_C) et (D) ont-ils la même valeur optimale ?

Exercice 2 Soit (P_S) le PL suivant sous la forme standard $\max\{c^\top x : Ax = b \ , \ x \geq 0\}$.

$$(P_S) = \left\{ \begin{array}{lrrrrrrrrl} \text{maximiser} & 4x_1 & -2x_2 & +5x_3 & +x_4 & -3x_5 & +3x_6 & -x_7 & +6x_8 & \\ \text{s.c.} & & & & & & & & & \\ & x_1 & +2x_2 & +3x_3 & & -x_5 & +x_6 & & +6x_8 & = 3 \\ & x_1 & & +x_3 & & -3x_5 & +3x_6 & -x_7 & +6x_8 & = 0 \\ & x_1 & +x_2 & -3x_3 & +x_4 & +3x_5 & +3x_6 & & -x_8 & = 3 \\ & x_1 & & +3x_3 & & -3x_5 & +3x_6 & & +x_8 & = 1 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6, & x_7, & x_8 & \geq 0 \end{array} \right.$$

1. Montrer que la base $B = \{1, 2, 4, 7\}$ est réalisable en donnant la colonne $\tilde{b}$ du dictionnaire associé $x_B = \tilde{b} - \tilde{A}_{\overline{B}} x_{\overline{B}}$, avec $\overline{B} = \{3, 5, 6, 8\}$.

2. Donnez le vecteur y défini par $y^\top = c_B^\top A_B^{-1}$ en exprimant y comme la solution d'un système linéaire que vous préciserez.

3. Montrez que, par-rapport à la base B, le coût réduit $\tilde{c}_3$ de la variable hors-base x_3 est positif en le calculant à l'aide de y.

4. Donnez la colonne $\tilde{A}_3$ dans le dictionnaire $x_B = \tilde{b} - \tilde{A}_{\overline{B}} x_{\overline{B}}$ en l'exprimant comme la solution d'un système linéaire que vous préciserez.

5. La base B est-elle optimale ? Vous utiliserez l'algorithme du simplexe pour produire un argument justifiant votre réponse, puis vous comfirmerez votre réponse en utilisant le théorème des écarts complémentaires.