Programmation Linéaire

Licence 3 D. Cornaz, Université Paris-Dauphine

1 Ensembles

Soient X, Y des ensembles.

Exercice 1.1 *Montrer que* $(X \setminus Y) \cup (Y \setminus X) = (X \cup Y) \setminus (Y \cap X)$

Pour tout sous-ensemble $X \subseteq E$ de E, on note $\overline{X} = E \setminus X$ son complémentaire.

Exercice 1.2 *Montrer que* $X \subseteq Y$ *seulement si* $\overline{Y} \subseteq \overline{X}$.

Exercice 1.3 *Montrer que* $X \subseteq Y$ *si* $\overline{Y} \subseteq \overline{X}$.

Exercice 1.4 *Montrer que* $X = Y$ *si et seulement si* $\overline{X} = \overline{Y}$.

Exercice 1.5 *Définir l'union* $X \cup Y$ *de deux sous-ensembles* X, Y *de* E *en fonction de l'intersection et de la complémentarité uniquement.*

Exercice 1.6 *Définir l'intersection* $X \cap Y$ *de deux sous-ensembles* X, Y *de* E *en fonction de l'union et de la complémentarité uniquement.*

Soit n un entier. On note X^n l'ensemble de vecteurs $x = (x_1, \ldots, x_n)$ tels que $x_i \in X$ pour $i = 1, \ldots, n$.

Exercice 1.7 *Montrer que* $\{0,1\}^n$ *a cardinalité* 2^n.

On note $[n] := \{1, \ldots, n\}$ et $\binom{n}{m} := |\{E \subseteq [n] : |E| = m\}|$.

Exercice 1.8 *Montrer que* $\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$.
Indice: trouvez une bijection $\phi : \{E \subseteq [n] : |E| = m\} \leftrightarrow \{E \subseteq [n] : |E| = n - m\}$.

Exercice 1.9 *Montrer que* $\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m}$.
Indice: combien y'a-t-il de sous-ensembles $E \subseteq [n]$ de cardinalité m ne contenant pas n ?

Exercice 1.10 *Montrer que* $\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!}$.
Indice: par récurrence sur n en utilisant l'exercice 1.9.

Exercice 1.11 *Soient* $a, b \in \mathbb{N}$. *Montrer qu'il existe* $q, r \in \mathbb{N}$ *tels que* $a = qb + r$ *et* $r < b$.

Exercice 1.12 *Soit* $D(n) = \{d \in \mathbb{N} : kd = n, \exists k \in \mathbb{N}\}$. *Montrer que* $D(a) \cap D(b) = D(r) \cap D(b)$ *(où* r *est l'entier de l'exercice 1.11).*

Exercice 1.13 *Donner un algorithme qui détermine* $\max\{g : g \in D(a) \cap D(b)\}$.
Indice: démontrer la validité de l'algorithme d'Euclide.

2 Hyperplans de $\mathbb{R}^n$

On note x_i les composantes d'un vecteur x de $\mathbb{R}^n$, pour $i = 1, \ldots, n$ ($x_i \in \mathbb{R}$).

Exercice 2.1 *Démontrer géométriquement que, étant donnés trois réels positifs x_1, x_2, x_3, on a les égalités*

$$x_1 x_2 = x_2 x_1, \qquad x_1(x_2 + x_3) = x_1 x_2 + x_1 x_3, \qquad x_1(x_2 - x_3) = x_1 x_2 - x_1 x_3$$

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on note a^2 la surface du carré de côté $|a|$.

Exercice 2.2 *Démontrer géométriquement que, étant donnés deux réels positifs x_1 et x_2, on a l'égalité*

$$(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 x_2$$

Indice: découpez un carré de côté $x_1 + x_2$ en faisant apparaitre les carrés x_1^2 et x_2^2.

Exercice 2.3 *Démontrer géométriquement que, étant donnés deux réels positifs x_1 et x_2, on a l'égalité*

$$(x_1 - x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2$$

Indice: découpez un carré de côté x_1 en faisant apparaitre les carrés $(x_1 - x_2)^2$ et x_2^2.

Soient trois points x, y, z du plan, c'est-à-dire de $\mathbb{R}^2$, l'angle $\angle yxz$ qu'ils forment est la longueur de l'arc, obtenu en parcourant le cercle de centre x et de rayon 1, depuis son point d'intersection avec la demi-droite $[xy$ jusqu'à l'intersection avec $[xz$, dans le sens trigonométrique (inverse d'une montre). On note 2π la circonférence d'un cercle de rayon 1.

Exercice 2.4 *Démontrer que la somme des valeurs absolues des angles d'un triangle vaut π.*
Indice: dessinez trois droites xy, xz, yz et une quatrième droite, parallèle à xy passant par z.

Dans $\mathbb{R}^n$, on note $\mathbf{0}$ le vecteur dont toutes les composantes sont 0.

Exercice 2.5 *(Théorème de Pythagore) Démontrer que pour tout point $x \in \mathbb{R}^2$, sa distance $||x||$ au point origine $\mathbf{0}$ satisfait*

$$||x||^2 = x_1^2 + x_2^2$$

Indice: découpez deux carrés de côté $x_1 + x_2$, de deux façon différentes, et comparez. Le premier découpage fera apparaitre les carrés x_1^2 et x_2^2 ; le deuxième le carré $||x||^2$.

Dans $\mathbb{R}^n$, on note $\mathbf{1}$ le vecteur dont toutes les composantes sont 1.

Exercice 2.6 *Peut-on parler, dans $\mathbb{R}^4$, de la distance, notée $||\mathbf{1}||$, de $\mathbf{0}$ à $\mathbf{1}$?*
Indice: Quelle est la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1 ? d'un cube de côté 1 ?

Exercice 2.7 *Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, sa distance $||x||$ à l'origine $\mathbf{0}$ satisfait*

$$||x||^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

Indice: par récurrence sur n.

On note $x + y$ le vecteur z de composantes $z_i = x_i + y_i$, et on note $x - y = x + (-y)$.

Exercice 2.8 *Combien vaut la distance entre deux points $x, y \in \mathbb{R}^n$?*
Indice: exprimez-la comme la distance $||z||$ d'un point z à $\mathbf{0}$.

Exercice 2.9 *Soient $x, y, z \in \mathbb{R}^2$ tels que $x_2 = y_2$. Montrer que la surface du triangle défini par x, y, z ne dépend pas de z_1.*
Indice: exprimez la surface, notée xyz, en fonction de x, y et z_2.

Exercice 2.10 *(Théorème de Thalès) Montrer que si $\mathbf{0}, x, y \in \mathbb{R}^2$ sont différents et alignés sur une même droite, alors*

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{||x||}{||y||}$$

Indice: Notez $x' = \binom{x_1}{0}$, $y' = \binom{y_1}{0}$ et supposez $0 < x_1 < y_2$. Comparez les aires des triangles formés par $\mathbf{0}, x, x', y, y'$, et montrez qu'elles satisfont $xx'y = xx'y'$ et $\mathbf{0}x'y = \mathbf{0}xy'$, pour en déduire $\frac{\mathbf{0}xx'}{xx'y} = \frac{\mathbf{0}xx'}{xx'y'}$ et $\frac{\mathbf{0}xx'}{\mathbf{0}x'y} = \frac{\mathbf{0}xx'}{\mathbf{0}xy'}$. Exprimez ces quatre rapports d'aires, en considérant, pour les deux rapports à gauche des égalités, le projeté z de x' orthogonalement sur xy, pour en déduire $\frac{||x||}{||x-y||} = \frac{||x'||}{||x'-y'||}$ et $\frac{||x||}{||y||} = \frac{||x'||}{||y'||}$, et donc que $\frac{||x||}{||x'||} = \frac{||y||}{||y'||} = \frac{||x-y||}{||x'-y'||}$. Notez $z' = \binom{y_1}{x_2}$. Montrer que $\frac{||x-y||}{||y-z'||} = \frac{||y||}{||y-y'||} = \frac{||x||}{||y'-z'||}$, et donc $\frac{||x||}{||y||} = \frac{||y'-z'||}{||y-y'||} = \frac{||x-x'||}{||y-y'||}$.

Exercice 2.11 *Quelle est la surface du quadrilatère définit par $\mathbf{0}, x, y, x + y \in \mathbb{R}^2$?*
Indice: représentez graphiquement le cas $x, y > \mathbf{0}$, $x_1 > y_1$ et $y_2 > x_2$.

Pour tout réel $\alpha \in \mathbb{R}$, on note αx le vecteur z de composantes $z_i = \alpha x_i$.

Exercice 2.12 *Donner une condition nécessaire et suffisante sur $x, y \in \mathbb{R}^2$ pour qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $x = \alpha y$.*

Exercice 2.13 *Étant donné $y \neq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$, quel est la nature de l'ensemble $E = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = \alpha y, \exists \alpha \in \mathbb{R}\}$?*
Indice: Utilisez l'exercice 2.10.

Exercice 2.14 *Étant donné $y \neq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$, quel est la nature de l'ensemble $E = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \alpha y, \exists \alpha \in \mathbb{R}\}$?*
Indice: par récurrence sur n.

Dans la suite, on note $x^\top y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ le produit scalaire de deux vecteurs $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Exercice 2.15 *Montrer que $||x - y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 - 2\, x^\top y$.*
Indice: utilisez $||x||^2 = x^\top x$.

Pour tout point $x \in \mathbb{R}^2$ tel que $||x|| = 1$, formant un angle $\theta = \angle x\mathbf{0}x'$ avec sa projection $x' = \binom{x_1}{0}$ sur l'axe des abscisses, on note $\cos\theta = x_1$ et $\sin\theta = x_2$.

Exercice 2.16 *Montrer que $\cos\theta = \cos(2\pi - \theta)$ pour tout $\theta \in [0, 2\pi[$.*

Exercice 2.17 *Montrer que $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ pour tout $\theta \in [0, 2\pi[$.*
Indice: utilisez exercice 2.5.

Exercice 2.18 *Montrer que $||x - y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 - 2\, ||x||.||y||.\cos\theta$, où $\theta = \angle x\mathbf{0}y$.*
Indice: utilisez Pythagore sur les deux triangles rectangles du plan $x\mathbf{0}y$ obtenus en considérant la projection x' de x sur la droite $\mathbf{0}y$.

Deux vecteurs $x, y \in \mathbb{R}^n$ sont orthogonaux si $\angle x\mathbf{0}y = \pi/2$ ou $3\pi/2$.

Exercice 2.19 *Démontrer que deux vecteurs $x, y \in \mathbb{R}^n$ sont orthogonaux si et seulement si $x^\top y = 0$.*
Indice: il suffit de montrer que $x^\top y = ||x||.||y||.\cos\theta$.

Exercice 2.20 *Étant donnés $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $y, z \in \mathbb{R}^n$, quelles sont les natures possibles de l'ensemble $E = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \alpha y + \beta z\}$?*
Indice: Essayez avec $n = 3$.

Exercice 2.21 *Montrer que pour tout droite D du plan passant par l'origine, il existe un point $a \in \mathbb{R}^2$ telle que*

$$D = \{x \in \mathbb{R}^2 : a^\top x = 0\}$$

Exercice 2.22 *Montrer que pour tout droite D du plan ne passant pas par l'origine, il existe un unique point $a \in \mathbb{R}^2$ telle que*

$$D = \{x \in \mathbb{R}^2 : a^\top x = 1\}$$

Exercice 2.23 *Montrer que pour tout plan P de l'espace (c'est-à-dire de $\mathbb{R}^3$) passant par l'origine, il existe un point $a \in \mathbb{R}^3$ telle que*

$$P = \{x \in \mathbb{R}^3 : a^\top x = 0\}$$

Exercice 2.24 *Montrer que pour tout plan P de l'espace ne passant pas par l'origine, il existe un point $a \in \mathbb{R}^3$ telle que*

$$P = \{x \in \mathbb{R}^3 : a^\top x = 1\}$$

Un hyperplan H de $\mathbb{R}^n$ est un ensemble $H = \{x \in \mathbb{R}^n : a^\top x = \alpha\}$.

Exercice 2.25 *Montrer que pour tout hyperplan de $\mathbb{R}^n$, on peut supposer $\alpha \in \{0, 1\}$.*

3 Matrices

On note $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ la matrice de m lignes et n colonnes ayant a_{ij} pour composante réelle à la $i$ème ligne et $j$ème colonne.

Exercice 3.1 *Écrire la matrice $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{4 \times 7}$ telle que $a_{ij} = i - j + 3$.*
Indice: exprimez a_{i+1j} et a_{ij+1} en fonction de a_{ij}.

On note $\lambda A = (\lambda a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ l'addition de $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$, ainsi la soustraction est $A - B = A + (-B)$.

Exercice 3.2 *Déterminer $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$ telles que $A+B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $A-B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.*
Indice: sommez les deux matrices.

On note $AB = (\sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ le produit de $A \in \mathbb{R}^{m \times p}$ et $B \in \mathbb{R}^{p \times n}$.

Exercice 3.3 *Calculer la 3ème ligne du produit*

$$\begin{pmatrix} -3/7 & 2/5 & 4/7 & 8 & 4/5 \\ -5/7 & 7 & 3/4 & 1/2 & 3/2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2/7 & 8/7 & 5/7 & 5 & 11/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 8/7 & 11/4 & 17/5 \\ 3/2 & 4 & 1/2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Indice: Montrez que $c_i^\top = a_i^\top B$, où $c_i^\top$ est la $i$ème ligne du produit $C = AB$ et $a_i^\top$ est la $i$ème ligne de A.

Exercice 3.4 *Montrer que, pour toutes les matrices $A \in \mathbb{R}^{m\times p}$ et $B, C \in \mathbb{R}^{p\times n}$, on a $A(B+C) = AB + BC$.*

Exercice 3.5 *Calculer la 3ème colonne du produit*

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 4/7 & 3 \\ -1 & 1 & 3/4 & 2 \\ 1 & -1 & 11 & 2 \\ 2 & 2 & 5/7 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3/7 & 2/5 & 2 & 8/3 & 4/5 \\ -5/7 & 1/7 & 3 & 1/2 & 3/2 \\ 1/5 & -1/11 & 0 & 2 & 1 \\ 2/7 & 8/7 & 1 & 11/3 & 5/7 \end{pmatrix}$$

Indice: Monter que $c_j = Ab_j$, où c_j est la $j$ème colonne du produit $C = AB$ et $b_j^\top$ est la $j$ème colonne de B.

Exercice 3.6 *Montrer que, pour toutes les matrices $A, B \in \mathbb{R}^{m\times p}$ et $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$, on a $(A+B)C = AC + BC$.*

On note $A^\top = (a_{ji}) \in \mathbb{R}^{n\times m}$.

Exercice 3.7 *Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -3 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $AA^\top$ et $A^\top A$.*

Exercice 3.8 *Montrer que $E \subseteq \mathbb{R}^n$ est une intersection d'hyperplans si et seulement il existe une matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ et un vecteur $b \in \mathbb{R}^m$ tels que $E = \{x \in \mathbb{R}^n \colon Ax = b\}$. Montrer, de plus, que l'on peut supposer $b \in \{0,1\}^m$.*

On note $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matrice (carrée) identité, avec des 1 sur la diagonale et 0 ailleurs.

Exercice 3.9 *Donner les matrices A_1, A_2, A_3 telles que $A_iB_i = I$ pour $i = 1, 2, 3$ avec*

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et montrer que qu'une telle matrice A_4 ne peut pas exister pour B_4.
Indice: donnez les équations que satisferaient les a_{ij} de A_4.

Exercice 3.10 *Donner les matrices A_1, A_2, A_3 telles que $B_iA_i = I$ pour $i = 1, 2, 3$ avec les matrices B_i de l'exercie 3.9.*

Exercice 3.11 *Montrer que $AI = A = IA$ mais qu'il existe des matrices A, B telles que $AB = A = BA$ avec $B \neq I$.*
Indice: choisir $A, B \in \{\frac{1}{2}, 1\}^{2\times 2}$.

On note $O \in \mathbb{R}^{m\times n}$ la matrice nulle, avec des 0 partout.

Exercice 3.12 *Soient*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Calculer AB, $C = BA$, C^2, $D = C - I$, puis CD et DC. Montrer ensuite, que pour toutes les matrices non-nulles $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ et $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ telles que $AB = I \in \mathbb{R}^{m\times m}$ et $C = BA \neq I \in \mathbb{R}^{n\times n}$, alors il existe une matrice D telle que $CD = DC = O$.

Exercice 3.13 *Soient les matrices*

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donner les matrices M_i tels que $A_i = M_i A_{i-1}$ pour $i = 1, 2, 3$. En déduire une matrice B telle que $BA_0 = I$. Quelle suite I_1, I_2, I_3 de matrices obtient-on si on applique les M_i à $I_0 = I$ au lieu de A_0 ?

Exercice 3.14 *Soient les matrices*

$$B_0 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donner les matrices N_i tels que $B_i = N_i B_{i-1}$ pour $i = 1, 2, 3$. En déduire une matrice A telle que $AB_0 = I$. Quelle suite I_1, I_2, I_3 de matrices obtient-on si on applique les N_i à $I_0 = I$ au lieu de B_0 ?

Soient $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ et $B \in \mathbb{R}^{m\times p}$, on note $C = [A|B] \in \mathbb{R}^{m\times n+p}$ la matrice telle que $c_{ij} = a_{ij}$ si $j \le n$, et $c_{ij} = b_{ij}$ sinon.

Exercice 3.15 *Soient $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Montrer que $AB = I$ si et seulement si $BA = I$.*
Indice: généralisez à partir des exercices 3.13 et 3.14 en étudiant les matrices $[A|I]$ et $[I|B]$.

Une matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est inversible, s'il existe une matrice A^{-1} telle que $AA^{-1} = I = A^{-1}A$

Exercice 3.16 *Montrer que si A est inversible, son inverse A^{-1} est unique.*
Indice: supposez que A a deux inverses B, C.

Exercice 3.17 *Montrer que A est inversible si et seulement si $A^\top$ est inversible.*
Indice: exprimez $(AB)^\top$ en fonction de $A^\top$ et $B^\top$.

Exercice 3.18 *Donner les matrices inverses des matrices M_i et N_i trouvées aux exercices 3.13 et 3.14.*

Exercice 3.19 *Donner un algorithme qui trouve l'inverse A^{-1} d'une matrice A inversible, ou certifie que A n'est pas inversible.*
Indice: généralisez à partir des exercices 3.13 et 3.14 en étudiant les matrices $[A|I]$ et $[I|B]$.

4 Systèmes et programmes linéaires

Exercice 4.1 *Démontrer que $A+C = B$ si et seulement si $A = B-C$, pour $A, B, C \in \mathbb{R}^{m\times n}$.*

Exercice 4.2 *Montrer que $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : BAx = Bb\}$ pour $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ et $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$. Pour quelle type de matrice B l'inclusion est une égalité ? Démontrer votre réponse.*

Exercice 4.3 *Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes:*

(i) $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax = \mathbf{0}\} = \{\mathbf{0}\}$,

(ii) $\{b \in \mathbb{R}^n : Ax = b \text{ pour un } x \in \mathbb{R}^n\} = \mathbb{R}^n$,

(iii) *il existe une matrice* B *telle que, pour tout* $b \in \mathbb{R}^n$, $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\} = \{Bb\}$

(iv) $\{y \in \mathbb{R}^n : y^\top A = \mathbf{0}^\top\} = \{\mathbf{0}\}$,

Indice: appliquez l'algorithme de l'exercice 3.19 à $[A|\mathbf{0}]$ et $[A|b]$.

Exercice 4.4 *Refaire la fin de l'exercice 3.9 en donnant* x, y *tels que* $B_4 x = \mathbf{0}$ *et* $y^\top B_4 = \mathbf{0}^\top$.

Lorsque $n \geq m$, une sous-matrice $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ de $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ est une matrice obtenue à partir de A en supprimant $n - m$ colonnes.

Exercice 4.5 *Combien une matrice* $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *a-t-elle de sous-matrices* $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ *?*

Une base de $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ avec $n \geq m$ est une sous-matrice inversible $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ de A.

Exercice 4.6 *Combien la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *a-t-elle de sous-matrices* $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ *? Lesquelles sont des bases de* A *?*

Une base réalisable de $\{Ax \leq b,\ x \geq \mathbf{0}\}$ est une base B de $[A|I]$ telle que $B^{-1}b \geq \mathbf{0}$.

Exercice 4.7 *Représenter graphiquement l'ensemble* $P = \{x \in \mathbb{R}^2 : Ax \leq b,\ x \geq \mathbf{0}\}$ *avec* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. *À quoi correspondent les bases de* $[A|I]$ *? les bases réalisables de* $\{Ax \leq b,\ x \geq \mathbf{0}\}$ *?*

Dans la suite, on appelle $\max\{c^\top x : Ax \leq b,\ x \geq \mathbf{0}\}$, un programme linéaire (PL) sous la forme canonique. Une solution (réalisable) de PL est un $\bar{x} \in \mathbb{R}^n_+$ satisfaisant les contraintes ($A\bar{x} \leq b$), et une solution $x^* \in \mathbb{R}^n_+$ est optimale si $c^\top \bar{x} \leq c^\top x^*$ pour toute solution $\bar{x}$.

Exercice 4.8 *Trouver graphiquement les solutions optimales des PL avec les contraintes de* P *de l'exercice 4.7 pour* $c^\top = (1, 2)$, *pour* $c^\top = (2, 1)$, *et pour* $c^\top = (1, 1)$.

Dans la suite, on appelle $\max\{c^\top x : Ax = b,\ x \geq \mathbf{0}\}$, un programme linéaire (PL) sous la forme standard.

Exercice 4.9 *Montrer que tout programme linéaire peut s'écrire sous une forme canonique et sous une forme standard.*
Indice: Montrez que

$$\begin{aligned} \max_{x\in\mathbb{R}^p_+,\, y\in\mathbb{R}^q_-,\, z\in\mathbb{R}^\ell} \quad & c^\top x + d^\top y + e^\top z \\ & Ax + By + Cz \leq f \\ & Dx + Ey + Fz \geq g \\ & Gx + Hy + Kz = h \end{aligned}$$

s'écrit $\max_{x\in\mathbb{R}^n_+}\{c^\top x : Ax \leq b\}$, qui s'écrit $\max_{x\in\mathbb{R}^n_+}\{c^\top x : Ax = b\}$.

Pour exprimer PL canonique mis sous forme standard, on décomposera $[A|I] \in \mathbb{R}^{m\times(n+m)}$ en $A_B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ et $A_{\overline{B}} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, et on décomposera de la même manière $x \in \mathbb{R}^{n+m}$ en $x_B \in \mathbb{R}^m$ et $x_{\overline{B}} \in \mathbb{R}^n$, de façon à avoir les égalités:

$$\begin{aligned}\max_{x\in\mathbb{R}^n_+}\{c^\top x:\ Ax\le b\} &= \max_{x\in\mathbb{R}^{n+m}_+}\{\binom{c}{\mathbf{0}}^\top x:\ [A|I]x=b\}\\ &= \max_{\substack{x_{\overline{B}}\in\mathbb{R}^n_+\\ x_B\in\mathbb{R}^m_+}}\{c_{\overline{B}}^\top x_{\overline{B}}+c_B^\top x_B:\ A_{\overline{B}}x_{\overline{B}}+A_Bx_B=b\}\end{aligned}$$

Exercice 4.10 *Donnez les décompositions $B,\overline{B}$ en bases possibles pour l'exercice 4.7 avec $c^\top=(1,2)$, en précisant les matrices $A_B, A_{\overline{B}}$ et les vecteurs $c_B, c_{\overline{B}}, x_B, x_{\overline{B}}$.*

Exercice 4.11 *Soit B une base, montrer que*

$$\max_{x\in\mathbb{R}^n_+}\{c^\top x:\ Ax\le b\} = \max_{\substack{x_{\overline{B}}\in\mathbb{R}^n_+\\ x_B\in\mathbb{R}^m_+}}\{c_B^\top A_B^{-1}b+(c_{\overline{B}}^\top - c_B^\top A_B^{-1}A_{\overline{B}})x_{\overline{B}}:\ x_B=A_B^{-1}b-A_B^{-1}A_{\overline{B}}x_{\overline{B}}\}$$

Indice: injectez l'expression de x_B dans $c_{\overline{B}}^\top x_{\overline{B}}+c_B^\top x_B$.

Exercice 4.12 *Soit B une base réalisable, montrer que $x_B=A_B^{-1}b$, $x_{\overline{B}}=\mathbf{0}$ est une solution.*

Étant donnée une base B, on lui associera le multiplicateur $y^\top = c_B^\top A_B^{-1}\in\mathbb{R}^m$, les coûts réduits $\tilde{c}^\top = c_{\overline{B}}^\top - y^\top A_{\overline{B}}\in\mathbb{R}^n$, et le dictionnaire:

$$\begin{aligned}x_B &= \tilde{b}-\tilde{A}x_{\overline{B}}\\ z &= \beta+\tilde{c}^\top x_{\overline{B}}\end{aligned}$$

où $\tilde{b}=A_B^{-1}b$, $\tilde{A}=A_B^{-1}A_{\overline{B}}$, $\beta=c_B^\top A_B^{-1}b$, et z est une variable réelle.

Exercice 4.13 *Pour l'exercice 4.7 avec $c^\top=(1,2)$, le dictionnaire associé à $B=\{3,4,5\}$ est*

$$\begin{aligned}x_3 &= 2-x_1\\ x_4 &= 2-x_2\\ x_5 &= 3-x_1-x_2\\ z &= 0+x_1+2x_2\end{aligned}$$

Donner le dictionnaire associé à $\{1,4,5\}$ en injectant l'expression de x_3 dans z. Donner le dictionnaire associé à $\{1,3,4\}$ en injectant l'expression de x_5 dans z. Les bases $\{1,4,5\}$ et $\{1,3,4\}$ sont-elles réalisables ?

Exercice 4.14 *Le dictionnaire associé à $B=\{3,4,5\}$ de l'exercice 4.13 peut se présenter sous forme de tableau:*

$$\begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & \overset{*}{x_3} & \overset{*}{x_4} & \overset{*}{x_5} & \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3\\ \hline 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}$$

Montrer que l'on peut obtenir les dictionnaires associés à $\{1,4,5\}$ et $\{1,3,4\}$ en effectuant des opérations sur les lignes du tableau.

Exercice 4.15 *Les matrices $A_B, A_B^{-1}, A_{\overline{B}}, \tilde{A}$, les vecteurs $c_B^\top, c_{\overline{B}}^\top, \tilde{c}, y^\top, \tilde{b}$, et le réel β associés à $B = \{3,4,5\}$ de l'exercice 4.13 sont:*

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A_{\overline{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \tilde{A}_{\overline{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c_B^\top = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, c_{\overline{B}}^\top = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}, \tilde{c}_{\overline{B}}^\top = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}, y^\top = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}, \tilde{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \beta = 0$$

Calculer les matrices A_B^{-1} pour $B = \{1,4,5\}$ et $\{1,3,4\}$, et en déduire les matrices, les vecteurs et le réel associés en appliquant les formules définissant le dictionnaire.

Exercice 4.16 *Soit le PL sous la forme standard:*

$$\begin{cases} \max & 3x_1 + x_2 - 4x_3 - x_4 - 2x_5 - 9x_6 - 8x_7 - x_8 + 9x_9 - 8x_{10} - x_{11} \\ & x_1 + 2x_5 + x_7 + x_8 - x_{11} = 3 \\ & x_1 + 5x_2 - 3x_5 - 3x_8 + x_9 - 2x_{10} = 8 \\ & 2x_1 + 8x_2 + x_3 + 2x_5 + x_6 + x_{10} + 5x_{11} = 14 \\ & -3x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 3x_4 - 3x_5 + 12x_8 - 7x_{10} + 3x_{11} = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11} \geq 0 \end{cases}$$

Donner le dictionnaire associé à la base $B = \{4,6,7,9\}$. Donner le vecteur y_B pour $B = \{4,6,7,9\}$, et en déduire $\tilde{c}_2$ pour cette base. Montrer que la base $B = \{1,2,3,4\}$ est réalisable.
Indice: résoudre un système et plus rapide que d'inverser une matrice.

Exercice 4.17 *Soit B une base réalisable telle que $\tilde{c}_{\overline{B}}^\top \leq \mathbf{0}^\top$, montrer que la solution associée $(x_B, x_{\overline{B}}) = (A_B^{-1}b, \mathbf{0})$ est optimale.*

Pour $y, z \in \mathbb{R}^n$, on note $[y,z]$ le segment de droite compris entre y et z.

Exercice 4.18 *Montrer que $[y,z] = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \lambda y + (1-\lambda)z, \exists \lambda \in [0,1]\}$.*
Indice: montrez que $x = \lambda y + (1-\lambda)z$, pour un réel λ, pour tout x de la droite passant par y et z, puis montrez que $(x-y)^\top(x-z) = -\lambda(1-\lambda)(||y||^2 + ||z||^2)$.

Exercice 4.19 *Montrer que si y^*, z^* sont des solutions optimales et que $\bar{x} \in [y^*, z^*]$ alors $\bar{x}$ est une solution optimale.*

Le PL est réalisable si $\{x \in \mathbb{R}_+ : Ax \leq b\} \neq \emptyset$. Un PL réalisable est non-borné s'il n'a pas de solution optimale.

Exercice 4.20 *Montrer que $\max\limits_{x \in \mathbb{R}_+} \{c^\top x : Ax \leq b\}$ est non-borné seulement si il existe $i \in [n]$ tel que $\max\limits_{x \in \mathbb{R}_+} \{x_i : Ax \leq b\}$ est non-borné.*