Modélisation en Programmation Linéaire

Cours 1 : Structure du cours et introduction

E. Lancini

Université Dauphine-PSL

Contenu de la séance

1. Informations générales
2. Introduction à l'optimisation sous contraintes
3. Recherche Opérationnelle
4. Historique de la RO
5. Concepts fondamentaux
6. Exercice en classe : Modélisation du problème du régime

Qui suis-je ?

- Nom : **Emiliano Lancini**
- Bureau : P622
- Mail : `emiliano.lancini@lamsade.dauphine.fr`
- Page Web : `https://www.lamsade.dauphine.fr/~elancini/`

Mon domaine d'expertise est la théorie de l'optimisation combinatoire, en particulier sur les propriétés matricielles, géométriques et de dualité des problèmes d'optimisation combinatoire.
J'interviens également dans l'enseignement de Algorithmique et Programmation Python en L1 et Graph Theory en M1.

Structure du cours

Le cours est structuré sur 11 séances de CM, 11 séances TD et 2 séances de TP.
L'évaluation sera vous communiquée dans le plus court délai, l'évaluation est composée par un CC et un examen.

Dans les TP on va exploiter des solveurs commercial à l'aide d'un langage de modélisation.

Matériel

Les diapos du cours seront disponibles en ligne sur la page web dédiée (bientôt accessible via ma page web perso).
Le materiel conseillé sont les premiers 4 chapitres de :

- Dimitri Bertsimas, John Tsitsiklis, *Introduction to Linear Optimization*, Athena Scientific, 1997.

Des sources additionnelles sont :

- C. Guéret, C. Prins, M. Sevaux, *Programmation linéaire*, Eyrolles, 2000.
- C. Prins, M. Sevaux, *Programmation linéaire avec Excel*, Eyrolles, 2011.

Les exos abordés durant le cours seront également disponibles sur la page web.

Motivation et objectif du cours

Le cours veut être une introduction à la **programmation linéaire** :

- Un outil permettant de *modéliser* et *résoudre* toute une classe de problèmes d'optimisation.
- pour laquelle existent de solveurs efficaces : Gurobi, IBM Cplex, FICO Xpress, GLPK ...

Exemple introductif : problème de production

[1]Un fabricant produit deux types de yaourts à la fraise A et B à partir de 3 ingrédients : Fraises, Lait et Sucre.
Chaque kg de yaourt A nécessite de 2 kg de fraises et 1 kg de Lait pour être produit.
Chaque kg de yaourt B nécessite de 1 kg de fraises, 2 kg de Lait et 1 kg de sucre pour être produit.
Le producteur a à disposition :

- 800 kg de fraises
- 700 kg de lait
- 300 kg de sucre

La vente de 1 kg rapporte 4€ pour A et 5€ pour B.
Le producteur veut maximiser son profit.

1. Exemple inspiré par le cours de F. Clautieux, U. Bordeaux 1

Modélisation

- Sur quelles quantités peut-on travailler ?

- Que cherche-t-on à optimiser ?

- Quelles sont les contraintes du problème ?

Modélisation

- Sur quelles quantités peut-on travailler ?
  - Quantité produites de yaourt A et B
  - Variables décisionnelles x_A, x_B
- Que cherche-t-on à optimiser ?
- Quelles sont les contraintes du problème ?

Modélisation

- Sur quelles quantités peut-on travailler ?
  - Quantité produites de yaourt A et B
  - Variables décisionnelles x_A, x_B
- Que cherche-t-on à optimiser ?
  - Gain pour le producteur
  - fonction objectif : $4x_A + 5x_B$ à maximiser
- Quelles sont les contraintes du problème ?
  - Contraintes matérielles sur les ingrédients
  - $2x_A + x_B \leq 800$ (fraises)
  - $x_A + 2x_B \leq 700$ (lait)
  - $x_B \leq 300$ (sucre)

Mon premier programme linéaire

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 4x_A + 5x_B \\
\text{s.t.} \quad & 2x_A + x_B \leq 800 \\
& x_A + 2x_B \leq 700 \\
& x_B \leq 300 \\
& x_A, x_B \geq 0
\end{aligned}
$$

Modélisation

Ce qu'on a fait est la *modélisation* d'un problème.
C'est-à-dire la traduction d'un problème "réel" en un problème mathématique.
En particulier, vu que la fonction objectif est une fonction linéaire et chaque contrainte est une inégalité linéaire, notre modèle est un *programme linéaire*.

Ce cours concerne principalement la programmation linéaire, mais on va toucher rapidement aussi la programmation linéaire en nombre entiers et la programmation non linéaire.

Modèle et Solution

Il faut se rendre immédiatement compte que être capable à modeler un problème n'est pas équivalent à le résoudre.

Les problèmes de PL peuvent être résolu en temps *polynomiale* dans la taille du modèle.
Plus en générale, les problèmes d'optimisation sous contraintes sont très dur à résoudre.

Donc la modélisation est que un des passages nécessaire à la résolution d'un problème appliqué.

Modèle et Solution

Il faut se rendre immédiatement compte que être capable à modeler un problème n'est pas équivalent à le résoudre.

Les problèmes de PL peuvent être résolu en temps *polynomiale* dans la taille du modèle.
Plus en générale, les problèmes d'optimisation sous contraintes sont très dur à résoudre.

Donc la modélisation est que un des passages nécessaire à la résolution d'un problème appliqué.

Exercice Quel est la solution désirée pour le problème du yaourts ?

Qu'est-ce que la Recherche Opérationnelle ?

La **Recherche Opérationnelle (RO)** est une discipline scientifique qui vise à :

- aider à la **prise de décision**,
- en utilisant des **modèles mathématiques**,
- pour des problèmes concrets issus de l'industrie, de l'économie, de la logistique, etc.

Elle combine :

- mathématiques,
- informatique,
- et compréhension du problème réel.

Exemples de problèmes en RO

- Planification de production
- Gestion des stocks
- Transport et logistique
- Affectation de ressources
- Ordonnancement

Point commun : des ressources limitées et des choix à faire.

Origines de la Recherche Opérationnelle

- Apparue pendant la **Seconde Guerre mondiale**
- Objectif : optimiser l'utilisation des ressources militaires
- Exemples :
  - positionnement des radars
  - organisation des convois

Après-guerre : diffusion massive dans l'industrie et l'économie.

Naissance de la programmation linéaire

- 1947 : George Dantzig propose l'algorithme du **simplexe**
- Développement rapide grâce à l'informatique
- Aujourd'hui : solveurs capables de résoudre des modèles avec
  - des millions de variables
  - des millions de contraintes

Les **variables décisionnelles** représentent les choix à faire.

Exemples :

- Quantité produite d'un produit
- Nombre de camions utilisés
- Affectation d'un employé à une tâche

Dans l'exemple des yaourts :

$$x_A, x_B = \text{quantités produites}$$

Fonction objectif

La **fonction objectif** exprime ce que l'on souhaite :

- maximiser (profit, performance)
- ou minimiser (coût, temps, risque)

Elle est une fonction des variables décisionnelles.

Exemple :

$$\max\ 4x_A + 5x_B$$

Contraintes

Les **contraintes** traduisent les limitations du problème :

- ressources disponibles
- règles techniques
- contraintes réglementaires

Elles sont souvent exprimées sous forme d'inégalités.

Problème d'optimisation sous contraintes

Un **problème d'optimisation sous contraintes** consiste à :

- choisir des valeurs pour les variables décisionnelles
- respectant toutes les contraintes
- afin d'optimiser la fonction objectif

C'est le cadre général de la RO.

Problème d'optimisation sous contraintes

On peut voir ça comme

$$\begin{aligned} &\max \quad f(x) \\ \text{s.t.} \quad & x \in D \end{aligned}$$

Ou f est une fonction et D est un ensemble **fermé** de $\mathbb{R}^n$.

Question : comment on fait si f est C^∞ et D est tout $\mathbb{R}^n$?

Problème d'optimisation sous contraintes

On peut voir ça comme

$$\begin{aligned} \max \quad & f(x) \\ \text{s.t.} \quad & x \in D \end{aligned}$$

Ou f est une fonction et D est un ensemble **fermé** de $\mathbb{R}^n$.

Question : comment on fait si f est C^∞ et D est tout $\mathbb{R}^n$?

Question : pourquoi ça ne marche pas si D est un ensemble quelconque ?

Définition : solution

Dans le cas de l'optimisation sous contraintes on cherche souvent les points qui réalisent le maximum (ou le minimum ! !) de notre fonction objectif et qui respectent les contraintes.

Un point du domaine - c'est à dire un point qui respecte toutes le contraintes - est dit *solution réalisable*.

Une solution réalisable qui atteint le max (min) de la fonction objectif est dite *solution optimale*.

On va voir dans notre cours que c'est souvent compliqué trouver ce point en général. Parfois, dans les application on est déjà satisfait de trouver une solution réalisable qui réalise un valeur "bon" de la fonction objectif.

Définition : Programmation Linéaire

Un **programme linéaire (PL)** est un problème d'optimisation sous contraintes où :

- la fonction objectif est linéaire (polynôme de 1er degré)
- toutes les contraintes sont linéaires (égalités ou inégalités)
- les variables sont continues

Définition : Programmation Linéaire

Un **programme linéaire (PL)** est un problème d'optimisation sous contraintes où :

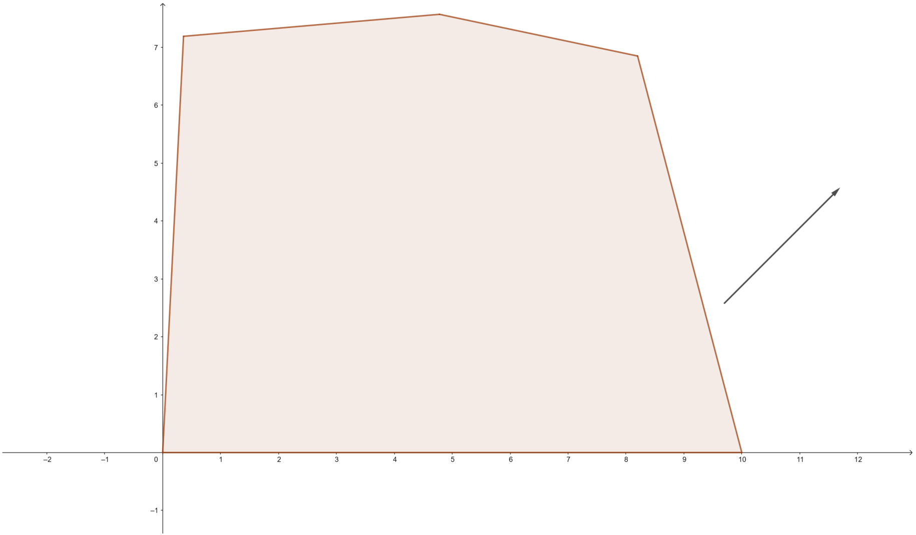
- la fonction objectif est linéaire (polynôme de 1er degré)
- toutes les contraintes sont linéaires (égalités ou inégalités)
- les variables sont continues

Question : c'est possible traiter ça si le domaine est tout $\mathbb{R}^n$?

Forme générale d'un PL

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Forme générale d'un PL



Dans un **PLNE** :

- les variables sont discrétisées.

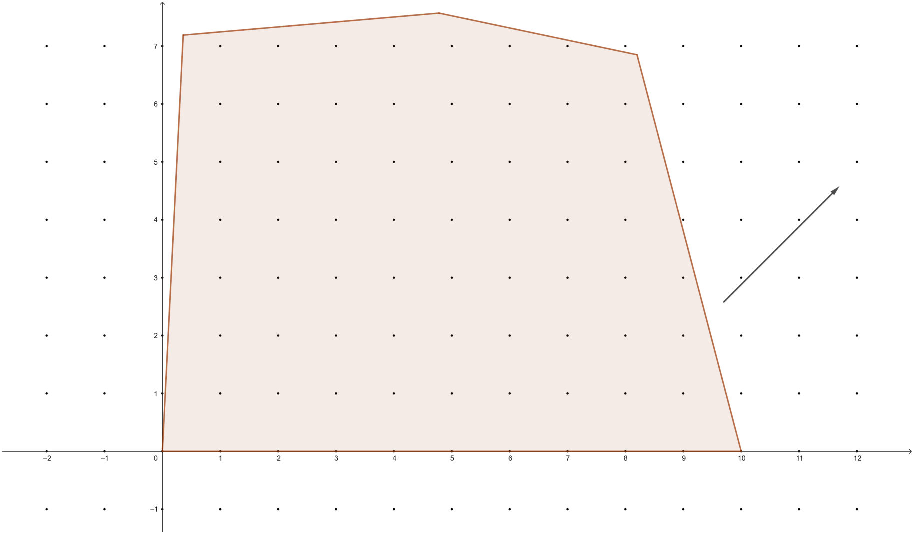
Exemples :

- optimisation dans les graphes
- nombre de machines
- décisions oui/non

Forme générale d'un PLNE

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \\ & x \in \mathbb{Z}^n \end{aligned}$$

Forme générale d'un PLNE



La PLNE est usuellement traité avec des techniques spécifiques par rapport à la PL.

Résoudre un problème de PLNE est énormément plus complexe que résoudre un problème de PL avec le même contraintes.

Question : Pourquoi on ne peut pas simplement chercher le point entier plus proche à notre solution optimale ?

Exercice : Modélisation du problème du régime

Imaginons un individu qui suit un régime alimentaire avec des objectifs spécifiques : il doit consommer un nombre minimum de protéines, de glucides et de graisses par jour.
Les aliments disponibles sont les suivants :

- **Brocoli** : 60 calories, 10g de protéines, 0g de graisses, 8g de glucides.
- **Poulet** : 200 calories, 40g de protéines, 15g de graisses, 5g de glucides.
- **Tofu** : 100 calories, 10g de protéines, 5g de graisses, 10g de glucides.
- **Riz** : 300 calories, 5g de protéines, 2g de graisses, 45g de glucides.

L'individu souhaite atteindre un total de :

- 150g de protéines,
- 70g de graisses,
- 200g de glucides.

Objectif : Trouver la quantité optimale de chaque aliment à consommer pour minimiser l'apport calorique totale.

Questions de modélisation

Pour modéliser ce problème en programmation linéaire, vous devez :

- Définir les variables décisionnelles.
- Formuler la fonction objectif.
- Écrire les contraintes en fonction des besoins nutritionnels.
- Préciser les contraintes de non-négativité sur les variables.