Modélisation en Programmation Linéaire

Cours 2 : Formulation des programmes linéaires

E. Lancini

Université Dauphine-PSL

Contenu de la séance

1. Hypothèses de linéarité et de divisibilité
2. Forme canonique et forme standard
3. Exemple

Rappel : Programmation Linéaire

Un **programme linéaire (PL)** est un problème d'optimisation sous contraintes où :

- la fonction objectif est linéaire,
- les contraintes sont linéaires,
- les variables sont continues.

Dans cette séance, nous formalisons précisément ce cadre.

Hypothèse de linéarité

L'hypothèse de linéarité implique :

- proportionnalité des effets,
- additivité des contributions,
- absence d'interactions non linéaires.

Exemple : produire deux unités coûte exactement deux fois plus que produire une unité.

Conséquences de la linéarité

La linéarité permet :

- une modélisation simple,
- une interprétation géométrique claire,
- l'existence d'algorithmes efficaces.

Limite : de nombreux phénomènes réels sont intrinsèquement non linéaires.

Hypothèse de divisibilité

L'hypothèse de divisibilité suppose que :

- les variables peuvent prendre des valeurs réelles,
- des fractions sont autorisées.

Exemple :

$$x = 2.37 \quad \text{est une valeur admissible}$$

Divisibilité et modélisation

Cette hypothèse est raisonnable lorsque :

- les quantités sont grandes,
- la granularité est fine,
- une approximation continue est acceptable.

Sinon, il est nécessaire d'utiliser des variables entières.

Forme générale d'un programme linéaire

$$
\begin{aligned}
\min / \max \quad & c^\top x \\
\text{s.t.} \quad & A_1 x \leq b_1 \\
& A_2 x = b_2 \\
& A_3 x \geq b_3 \\
& x_i \geq 0 \qquad \text{si } i \in I_+ \\
& x_j \leq 0 \qquad \text{si } j \in I_-
\end{aligned}
$$

- $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur des variables décisionnelles,
- $c \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur des coefficients de la fonction objectif,
- $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix}$, est la matrice des coefficients,
- $b \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur des constantes,
- I_+ et I_- sont deux sous-ensembles disjoints de $\{1, \ldots, n\}$.

Forme canonique

Un programme linéaire est en **forme canonique** (où forme **normale** selon les auteurs) s'il s'écrit :

$$\begin{aligned} \max \quad & c^\top x \\ \text{s.t.} \quad & Ax \leq b \\ & x \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Forme canonique

Un programme linéaire est en **forme canonique** (où forme **normale** selon les auteurs) s'il s'écrit :

$$\begin{aligned} \max \quad & c^\top x \\ \text{s.t.} \quad & Ax \leq b \\ & x \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Théorème : mise ne forme canonique

Tout programme linéaire peut être écrit en une forme canonique équivalente.

Contexte du Théorème

Théorème : mise ne forme canonique

Tout programme linéaire peut être écrit en une forme canonique équivalente.

Qu'est ce que ça veut dire "une forme canonique équivalente" ?

Contexte du Théorème

Théorème : mise ne forme canonique

Tout programme linéaire peut être écrit en une forme canonique équivalente.

Qu'est ce que ça veut dire "une forme canonique équivalente" ?

Soient P_1 et $P2$ l'ensemble des solutions (inétendus comme espaces de variables) de deux programmes linéaire.
Les deux sont équivalents s'il existe une fonction $f : P_1 \to P_2$ telle que :

- x est réalisable si et seulement si $f(x)$ est réalisable,
- x est réalisable et optimale si et seulement si $f(x)$ est réalisable et optimale,
- la fonction objectif en x est égal à celle en $f(x)$ après une transformation affine,

et inversement, une fonction $f' : P_2 \to P_1$ avec les mêmes propriétés.

Preuve du Théorème

Étapes :

- transformation de la fonction objectif,
- transformation des contraintes d'égalité en inégalité,
- transformation des contraintes $\geq$ en $\leq$,
- transformation des variables libres en signe en variables non négatives,
- transformation des variables non positives en variables non négatives.

Transformation de la f.o.

L'ensemble des solutions optimales pour une fonction objectif

$$\min c^\top x$$

est le même que celui de la fonction objectif :

$$(\max -c^\top x)$$

Cette transformation de la fonction objectif est une transformation affine et par conséquence, on peut toujours transformer un problème de minimisation en un problème de maximisation équivalent.

Transformation des égalités

Toute contrainte d'égalité peut être remplacée par deux inégalités :

$$ax = b \iff \begin{cases} ax \leq b \\ ax \geq b \end{cases}$$

Cette opération ne change ni l'ensemble de variables ni celui des solutions.

On peut donc transformer un problème avec des contraintes à égalité en un problème avec que des inégalités.

Transformation des $\geq$ en $\leq$

Toute contrainte $\geq$ peut être remplacée par une contrainte $\leq$:

$$ax \geq b \quad \Longleftrightarrow \quad -ax \leq -b$$

Cette opération ne change ni l'ensemble de variables ni celui des solutions.

Ainsi, sans perte de généralité, on peut se ramener à des contraintes de type $\leq$.

Variables à signe libre

Rappel : une variable es à **signe libre** s'il n'existe pas une contrainte de non-négativité/non-positivité associée à cette variable.

Toute variable x_i à signe libre peut être réécrite comme

$$x_i = x_i^+ - x_i^-$$

où x_i^+ et x_i^- sont deux variables non-négatives.

Donc, à condition de doubler les variables libres en signe, on peut supposer que toutes les variables soient à signe fixe.

Variables à signe libre

Rappel : une variable es à **signe libre** s'il n'existe pas une contrainte de non-négativité/non-positivité associée à cette variable.

Toute variable x_i à signe libre peut être réécrite comme

$$x_i = x_i^+ - x_i^-$$

où x_i^+ et x_i^- sont deux variables non-négatives.

Donc, à condition de doubler les variables libres en signe, on peut supposer que toutes les variables soient à signe fixe.

Cette opération n'est pas une bijection !

Variables non positives

Toute variable x_i non positive peut être substituée par une variable x'_i non négative,

$$x'_i = -x_i$$

Donc, on peut supposer que toutes les variables soient non négatives.

Variables non positives

Toute variable x_i non positive peut être substituée par une variable x'_i non négative,

$$x'_i = -x_i$$

Donc, on peut supposer que toutes les variables soient non négatives.

Et donc on a prouvé notre résultat

Forme standard

Un PL est en **forme standard** s'il s'écrit :

$$\begin{aligned} \max \quad & c^\top x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Toutes les contraintes sont des égalités.

Passage à la forme standard

Toute contrainte d'inégalité peut être transformée en égalité en introduisant une **variable d'écart** (slack variable) :

$$ax \leq b \quad \Longleftrightarrow \quad ax + s = b, \; s \geq 0$$

Les variables d'écart mesurent les ressources non utilisées.

Important : on a besoin d'une variable d'écart pour chaque contrainte d'inégalité.

Intérêt des formes canoniques

Ces formes :

- simplifient l'analyse théorique,
- sont nécessaires pour certains algorithmes,
- facilitent l'implémentation informatique.

En particulier, l'algorithme du simplexe repose sur la forme standard.

Exemple : programme linéaire en forme générique

Considérons le programme linéaire suivant :

$$\begin{aligned} \min \quad & 3x_1 - x_2 + 2x_3 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ & -x_1 + x_2 + x_3 \geq 1 \\ & x_2 - x_3 \leq 2 \\ & x_1 \geq 0,\ x_3 \leq 0 \end{aligned}$$

Ce problème n'est ni en forme canonique ni en forme standard.

Étape 1 : passage à un problème de maximisation

On transforme le problème de minimisation en maximisation :

$$\min\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 \quad \Longleftrightarrow \quad \max\ -3x_1 + x_2 - 2x_3$$

L'ensemble des solutions optimales est inchangé.

Étape 2 : élimination des égalités

La contrainte

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 4$$

est remplacée par :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 4 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 4 \end{cases}$$

On obtient un problème avec uniquement des contraintes d'inégalité.

Étape 3 : contraintes de type $\geq$

Toute contrainte de type $\geq$ est multipliée par -1.

Exemple :

$$-x_1 + x_2 + x_3 \geq 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 - x_2 - x_3 \leq -1$$

Ainsi, toutes les contraintes sont désormais de type $\leq$.

Étape 4 : variable à signe libre

La variable x_2 est à signe libre.

On pose :

$$x_2 = x_2^+ - x_2^-,$$

$$x_2^+, x_2^- \geq 0.$$

Les contraintes et la f.o. sont réécrites en fonction de x_2^+ et x_2^-.

Étape 5 : variable non positive

La variable x_3 est non positive.

On pose :

$$x_3' = -x_3$$

$$x_3' \geq 0$$

Toutes les variables du problème sont désormais non négatives.

Programme linéaire en forme canonique

Le programme obtenu s'écrit :

$$\begin{aligned}
\max \quad & -3x_1 + x_2^+ - x_2^- + 2x_3' \\
\text{s.t.} \quad & x_1 + 2(x_2^+ - x_2^-) + x_3' \leq 4 \\
& -x_1 - 2(x_2^+ - x_2^-) - x_3' \leq -4 \\
& x_1 - (x_2^+ - x_2^-) + x_3' \leq -1 \\
& x_2^+ - x_2^- + x_3' \leq 2 \\
& x_1, x_2^+, x_2^-, x_3' \geq 0
\end{aligned}$$

Il s'agit d'un programme linéaire en **forme canonique**, équivalent au problème initial.

Programme linéaire en forme standard

Le programme obtenu s'écrit :

$$
\begin{aligned}
\max \quad & -3x_1 + x_2^+ - x_2^- + 2x_3' \\
\text{s.t.} \quad & x_1 + 2(x_2^+ - x_2^-) + x_3' + s_1 = 4 \\
& -x_1 - 2(x_2^+ - x_2^-) - x_3' + s_2 = -4 \\
& x_1 - (x_2^+ - x_2^-) + x_3' + s_3 = -1 \\
& x_2^+ - x_2^- + x_3' + s_4 = 2 \\
& x_1, x_2^+, x_2^-, x_3' \geq 0 \\
& s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

Il s'agit d'un programme linéaire en **forme standard**, équivalent au problème initial.

Programme linéaire en forme standard

On peut se rendre compte que on peut simplifier le problème :

$$\begin{aligned}
\max \quad & -3x_1 + x_2^+ - x_2^- + 2x_3' \\
\text{s.t.} \quad & x_1 + 2(x_2^+ - x_2^-) + x_3' = 4 \\
& x_1 - (x_2^+ - x_2^-) + x_3' + s_1 = -1 \\
& x_2^+ - x_2^- + x_3' + s_2 = 2 \\
& x_1, x_2^+, x_2^-, x_3' \geq 0 \\
& s_1, s_2 \geq 0
\end{aligned}$$