Modélisation en Programmation Linéaire

Cours 3 : Géométrie des Programmes Linéaires, Partie I

E. Lancini

Université Dauphine-PSL

Contenu de la séance

Interprétation géométrique des contraintes

Souvent, une contrainte peut s'exprimer comme points qui respectent un formule mathématique.

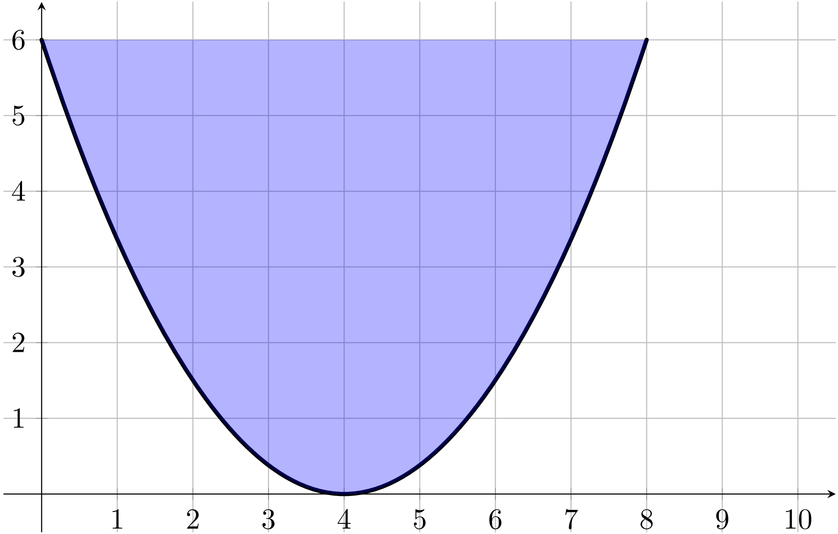
Par exemple, si on a comme contrainte :

$$y \geq x^2 + 1$$

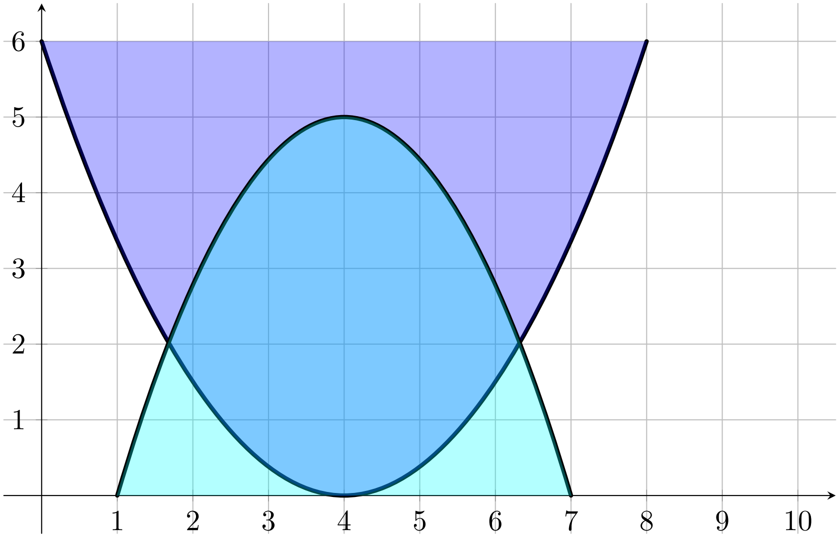
Les points qui respectent cette contrainte seront ceux "internes" à la parabole.

Les points qui respectent plusieurs contraintes sont ceux qui se trouvent à l'intersection des différents espaces définies par chaque contrainte.

Interprétation géométrique des contraintes



Interprétation géométrique des contraintes



Ensembles compactes et existence de solutions

Nous allons considérer les ensembles de solutions réalisables **fermés**.
Pour les applications réelles on va en plus voir souvent des ensembles de solutions **bornés**.
Ces deux hypothèses nous assurent que notre problème est traitable.

Theorem (Weierstrass)

Soit D un sous-ensemble compacte de $\mathbb{R}^n$ (c'est à dire : fermé et borné) , et soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction continue, alors f atteint un maximum sur D.

Question

Produire trois exemples où on perd une des 3 hypothèses (D fermé, D borné et f continue), et le maximum n'est pas atteint.

Ensembles convexes

Définition. Un ensemble $D \subseteq \mathbb{R}^n$ est convexe si :

$$\forall x, y \in D,\ \forall \lambda \in [0,1],\ \lambda x + (1-\lambda)y \in D.$$

Intuitivement, un ensemble est convexe si et seulement si chaque fois que je tire un segment entre deux points d'un ensemble, le segment est contenu dans l'ensemble.

La convexité n'a aucun impacte sur l'existence d'une solution optimale, mais d'un point de vue algorithmique, résoudre un problème d'optimisation sur un ensemble non convexe est étonnamment compliqué.

Combinaisons convexes

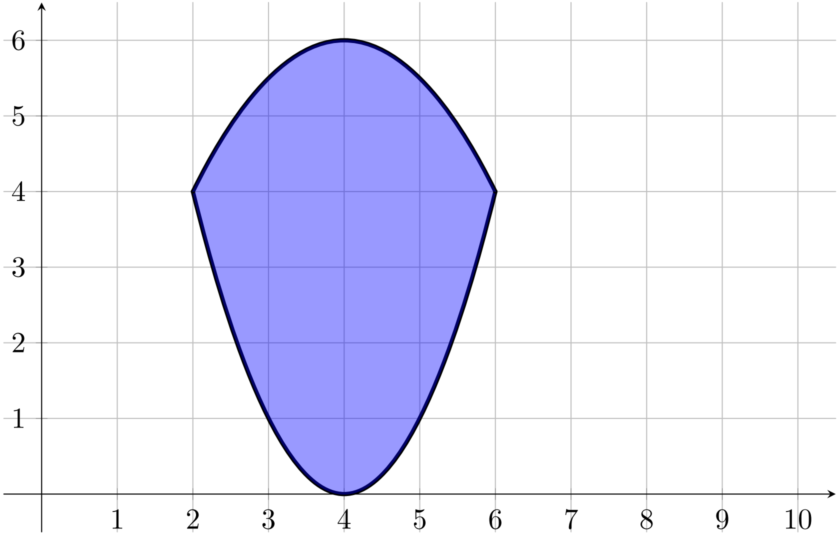
Définition. Soient $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^n$.

Une **combinaison convexe** est un point de la forme :

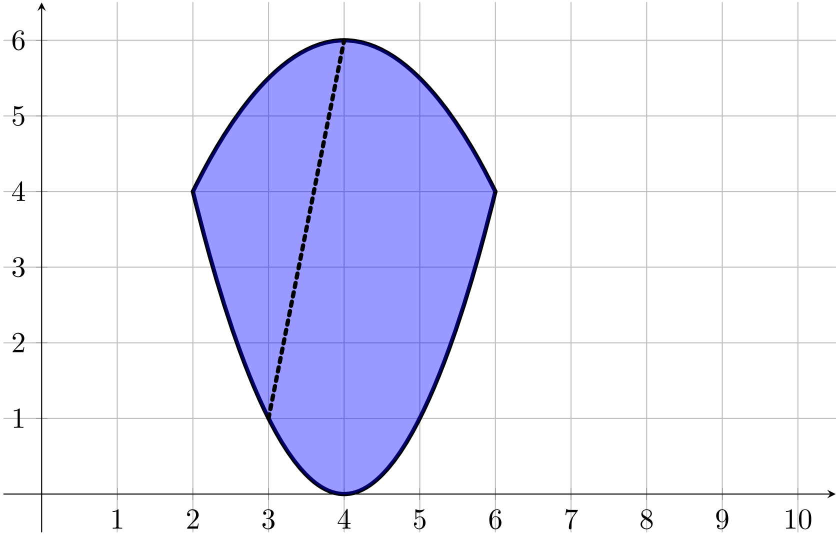
$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i, \quad \lambda_i \geq 0, \ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1.$$

Les ensembles convexes sont exactement ceux qui sont stables par combinaison convexe.

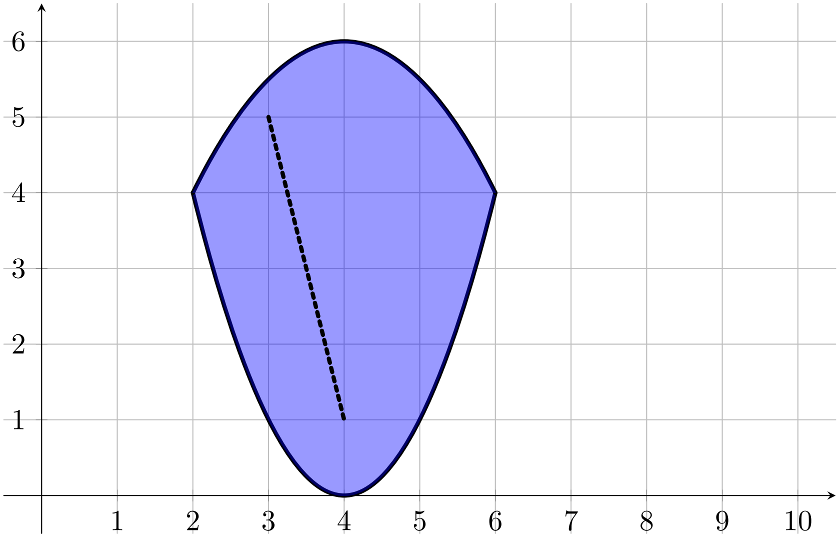
Ensemble Convexe

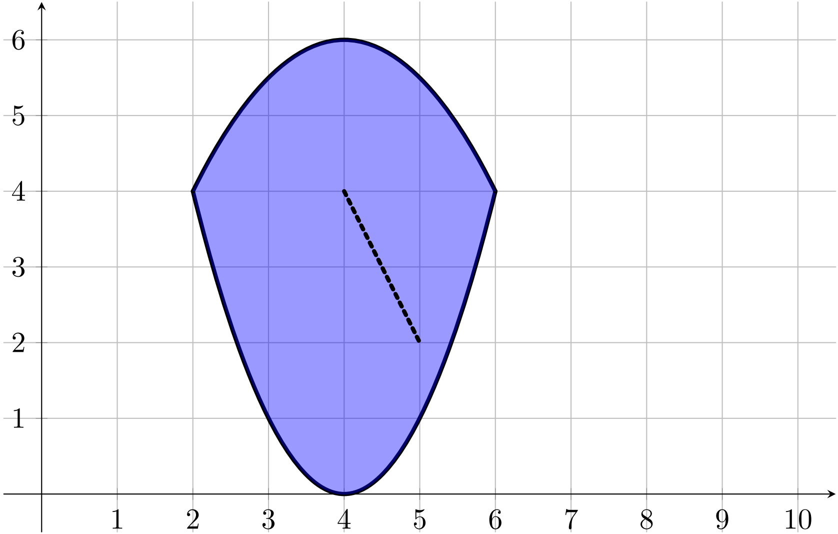


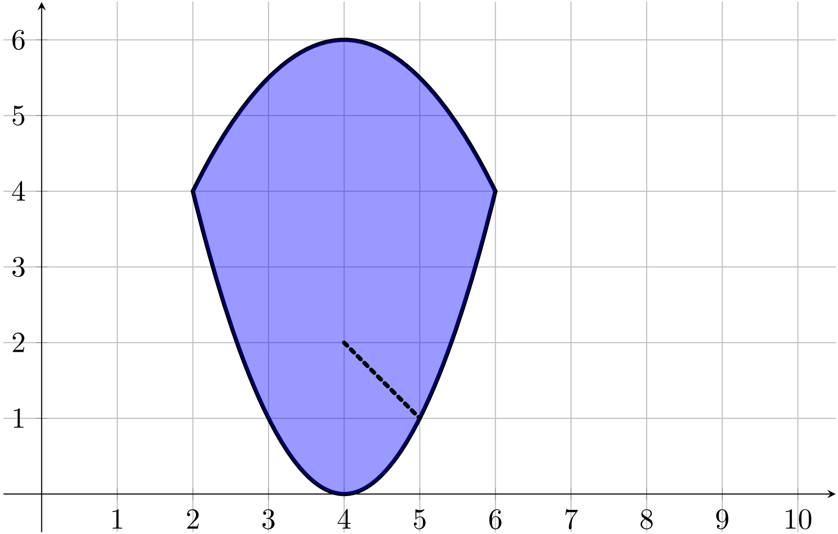
Ensemble Convexe



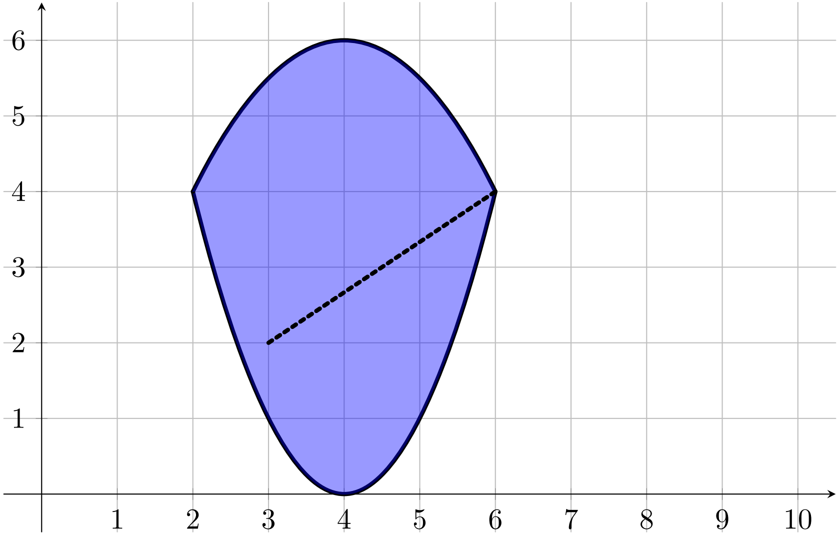
Ensemble Convexe



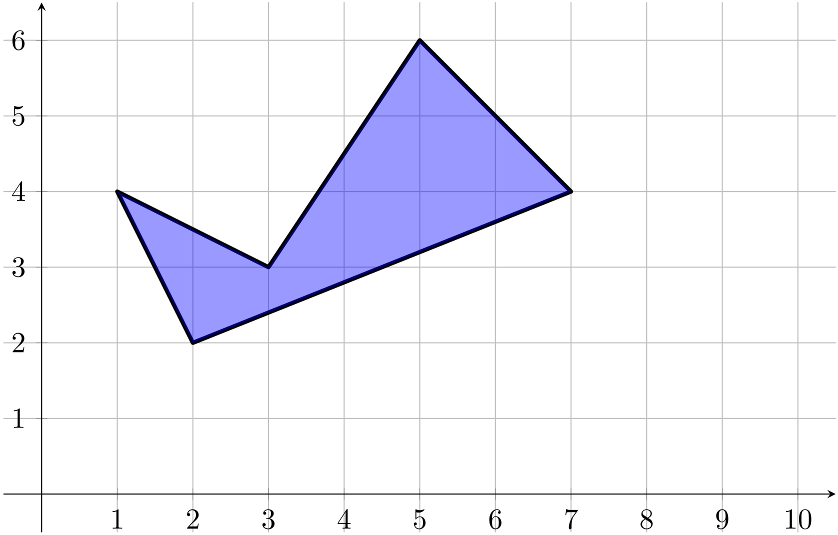

6
5
4
3
2
1
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10


6
5
4
3
2
1
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

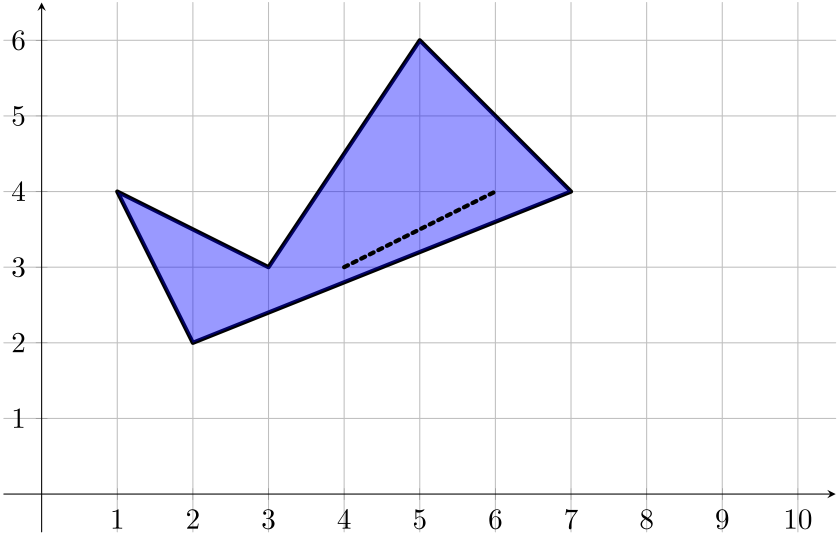
Ensemble Convexe



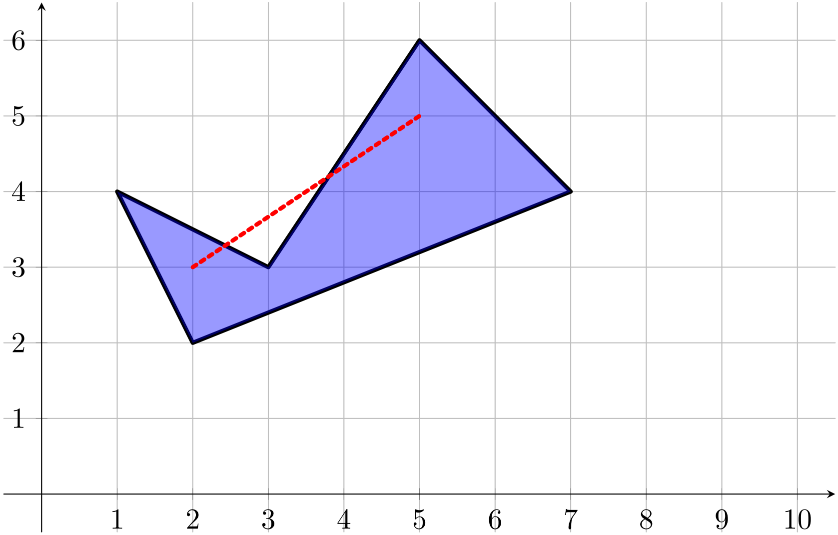
Ensemble non Convexe



Ensemble non Convexe



Ensemble non Convexe



Intersection d'ensembles convexes

Une propriété très intéressante des ensembles convexes est la suivante :

Observation

L'intersection de deux (ou plus) ensembles convexes est un ensemble convexe.

Donc si chaque contrainte corresponde à un ensemble convexe, notre domaine sera convexe.

(In)égalités linéaires dans le plan

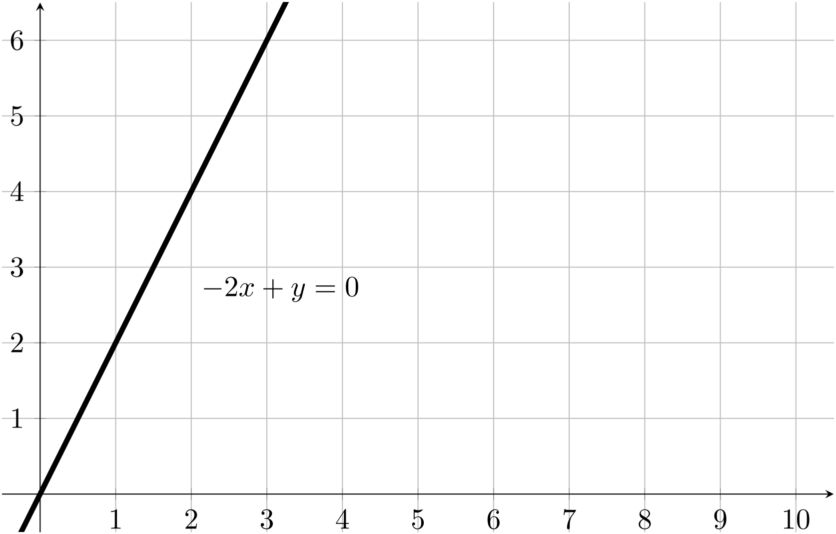
Dans $\mathbb{R}^2$, une égalité linéaire définit une droite.

Une inégalité linéaire est donc l'ensemble des points "d'une coté" d'une droite.
Formellement on appelle ça un demi-plan.
L'intersection de plusieurs demi-plans forme :

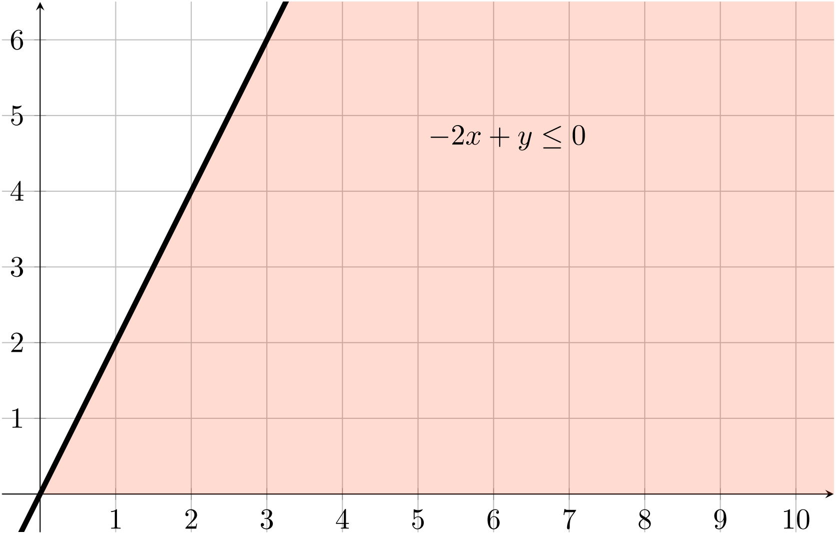
- Un polygone convexe.
- Potentiellement non borné.

C'est l'objet géométrique typique associé à un programme linéaire à deux variables.

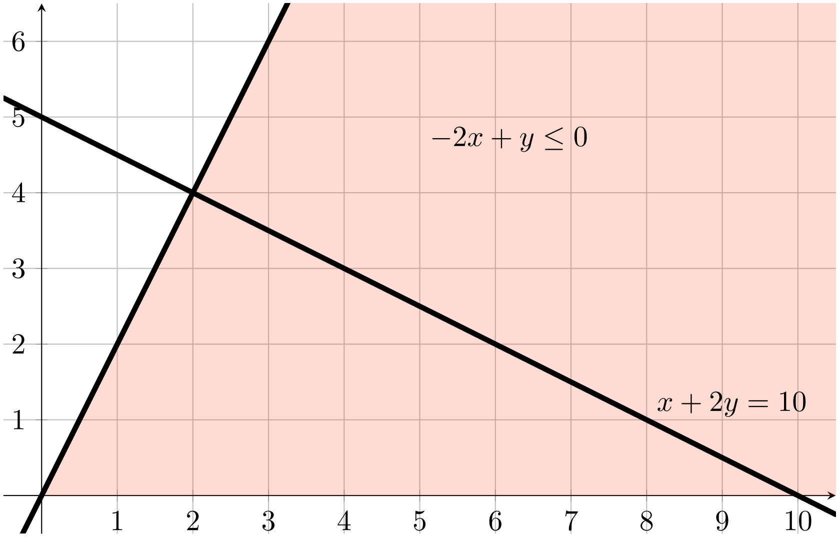
Exemple Graphique



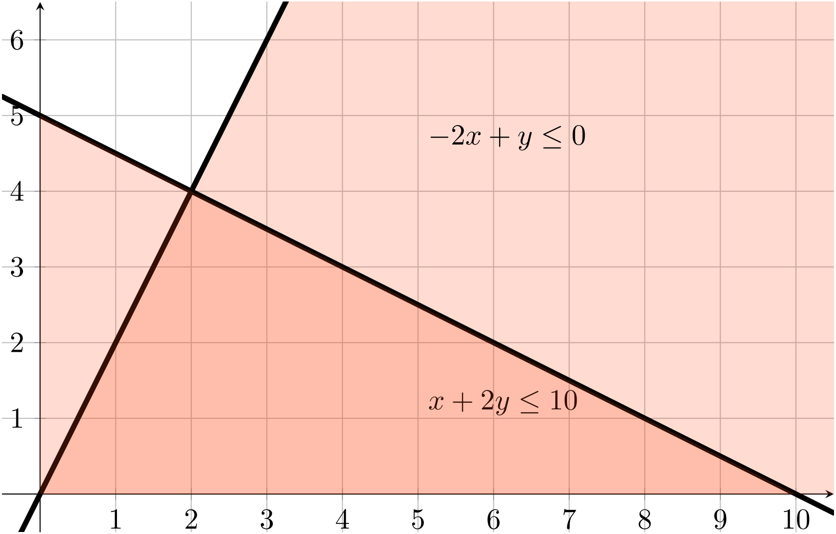
Exemple Graphique



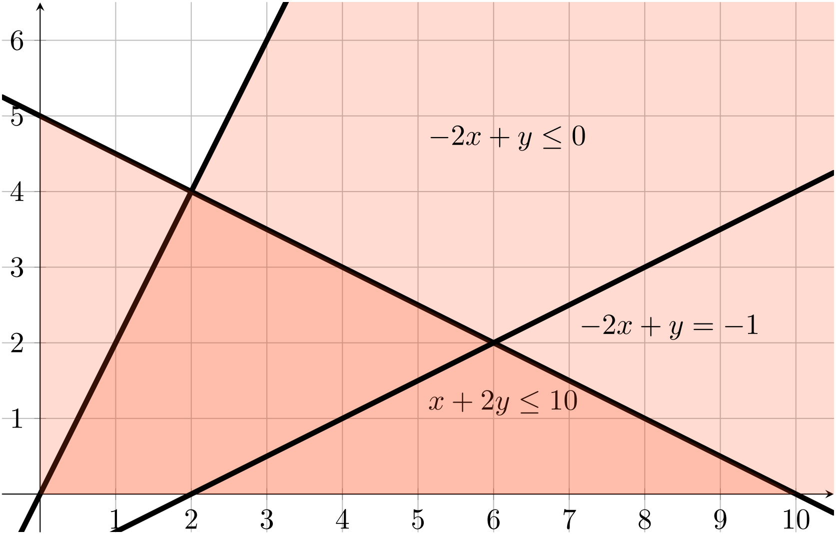
Exemple Graphique



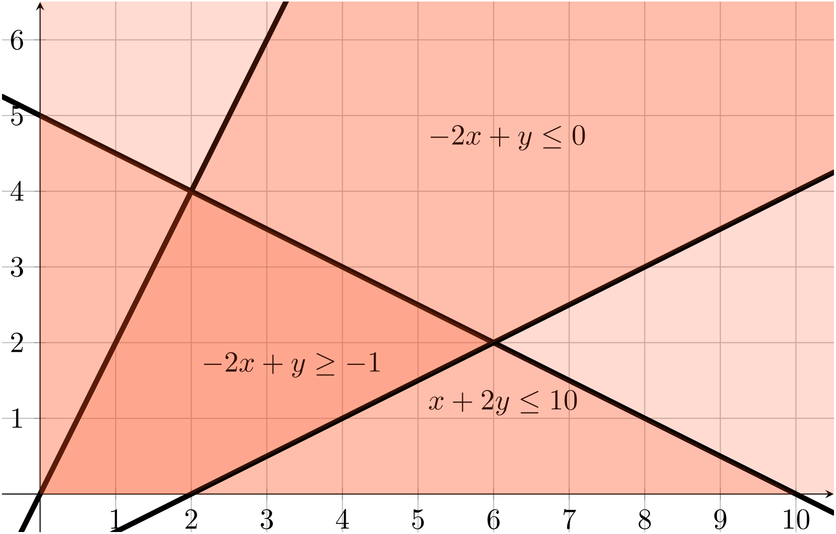
Exemple Graphique



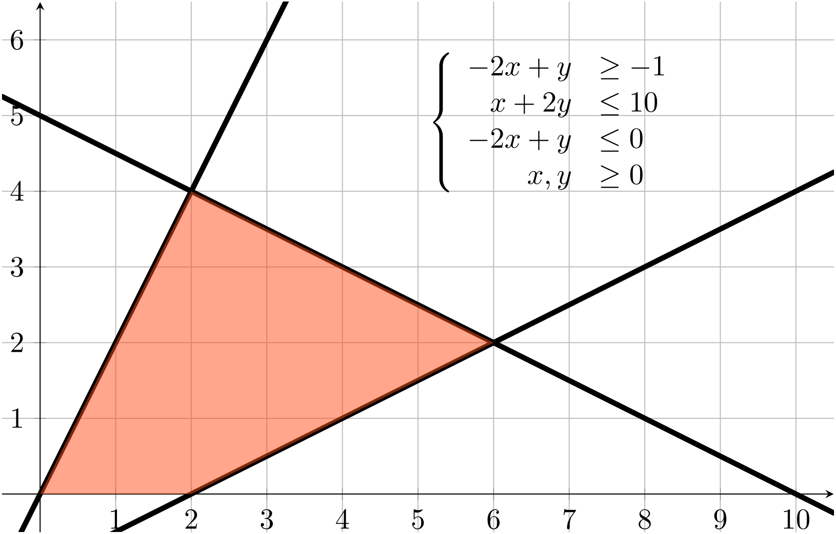
Exemple Graphique



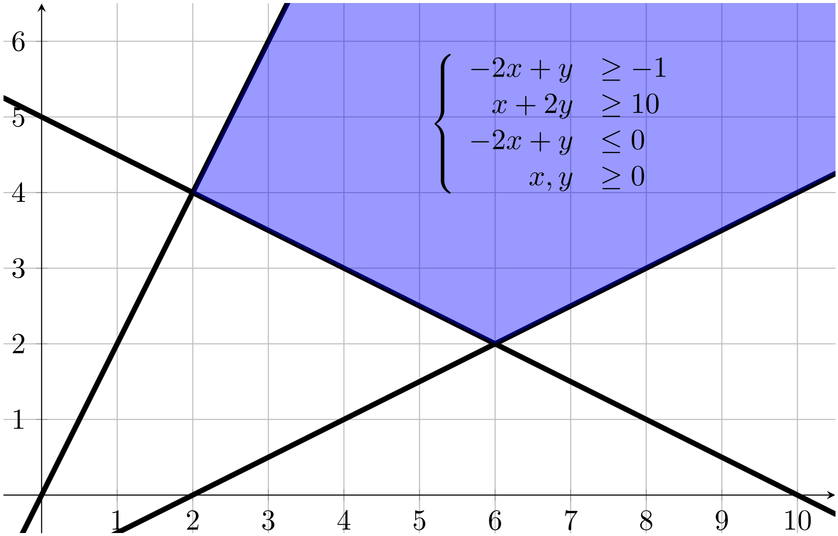
Exemple Graphique



Exemple Graphique



$$\begin{cases} -2x + y & \geq -1 \\ x + 2y & \leq 10 \\ -2x + y & \leq 0 \\ x, y & \geq 0 \end{cases}$$


$$\begin{cases} -2x + y & \geq -1 \\ x + 2y & \geq 10 \\ -2x + y & \leq 0 \\ x, y & \geq 0 \end{cases}$$
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
1 2 3 4 5 6

(In)égalités linéaires dans $\mathbb{R}^n$

Dans $\mathbb{R}^n$, une égalité linéaire définit **hyperplan**.
Une inégalité linéaire est donc un demi-espace.

L'intersection d'un nombre fini de demi-espaces est appelée un **polyèdre**.
Un polyèdre est un ensemble de la forme :

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}.$$

(In)égalités linéaires dans $\mathbb{R}^n$

Dans $\mathbb{R}^n$, une égalité linéaire définit **hyperplan**.
Une inégalité linéaire est donc un demi-espace.

L'intersection d'un nombre fini de demi-espaces est appelée un **polyèdre**.
Un polyèdre est un ensemble de la forme :

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}.$$

Propriétés :

- P est convexe,
- P est fermé,
- P peut être borné ou non.

Un polyèdre borné est appelé un **polytope**.

Inégalités valides

Une inégalité est dite **valide** pour un polyèdre si tous les points du polyèdre respectent l'inégalité.

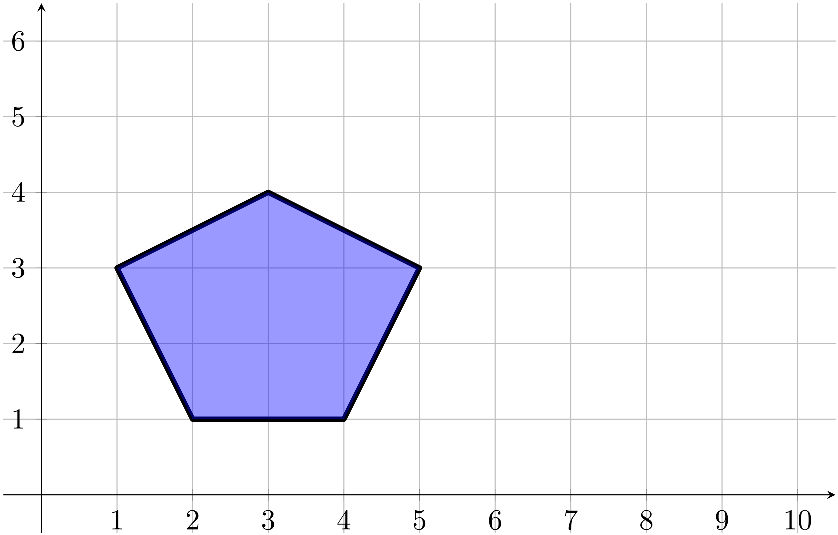
Par exemple, si on considère le polyèdre :

$$P = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x_1 \leq 3, 0 \leq x_2 \leq 2\}$$

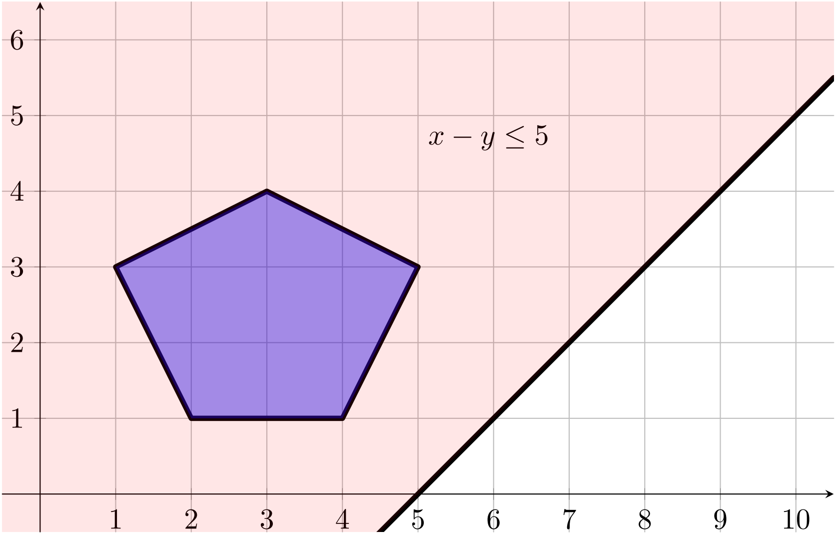
L'inégalité $x_1 + 2x_2 \leq 8$ est valide.

Par définition, toute inégalités qui définissent le polyèdre sont valides.

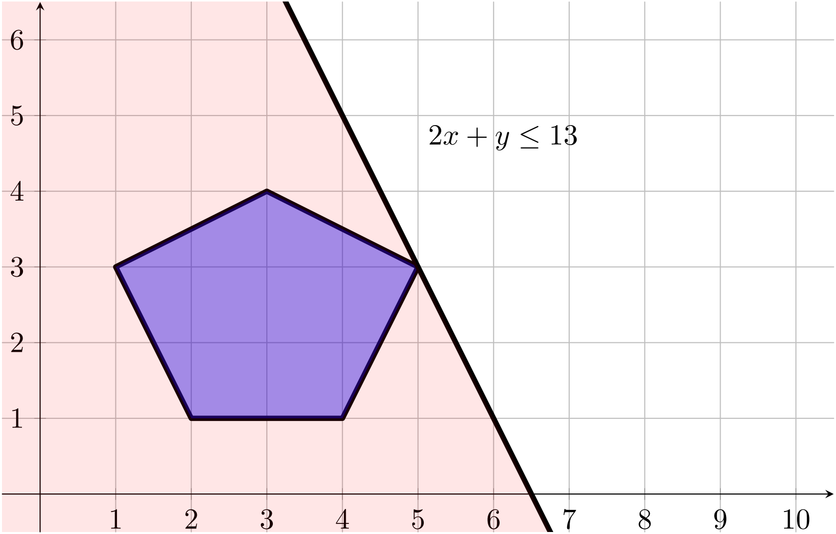
Inégalités valides

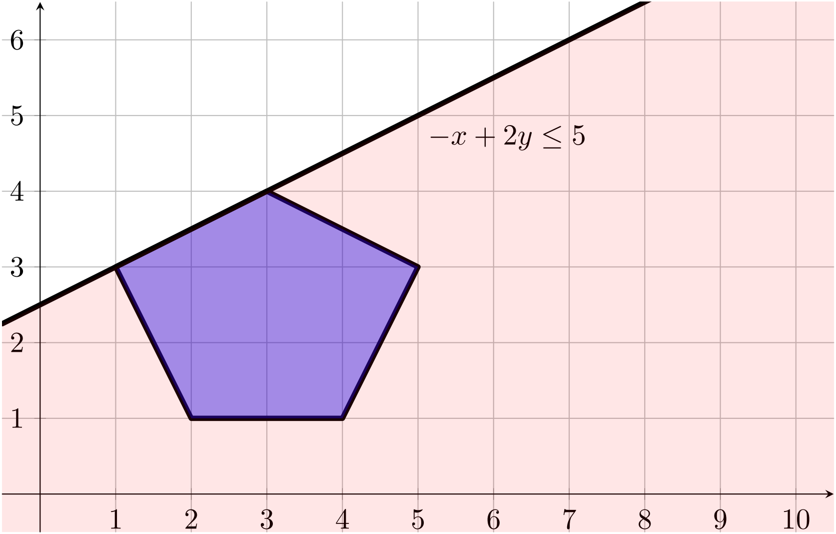


Inégalités valides



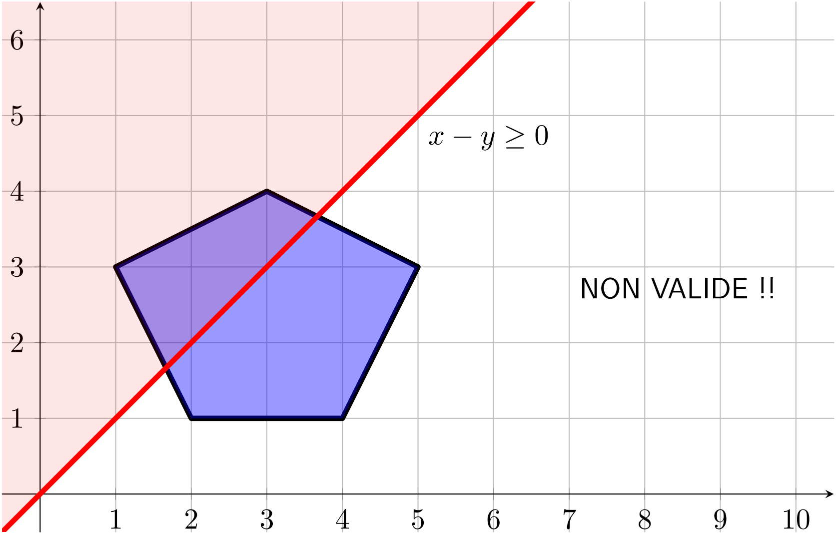
Inégalités valides



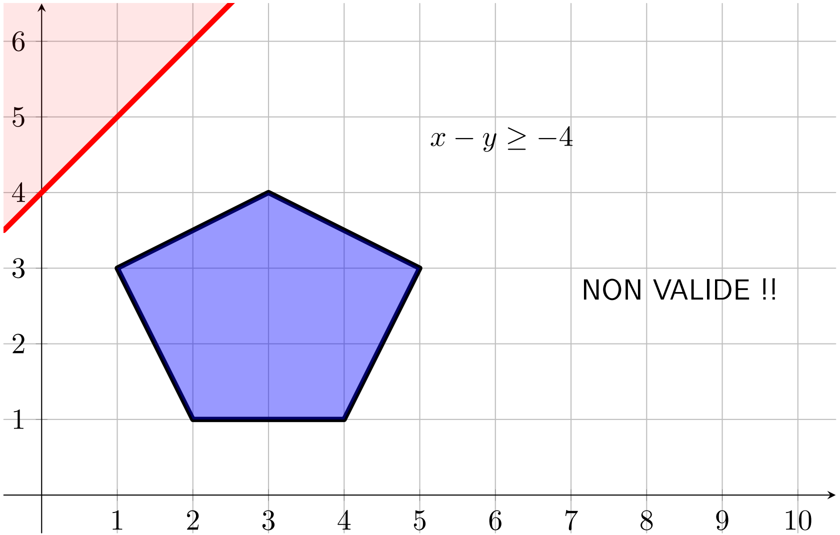


$-x + 2y \leq 5$
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
1 2 3 4 5 6

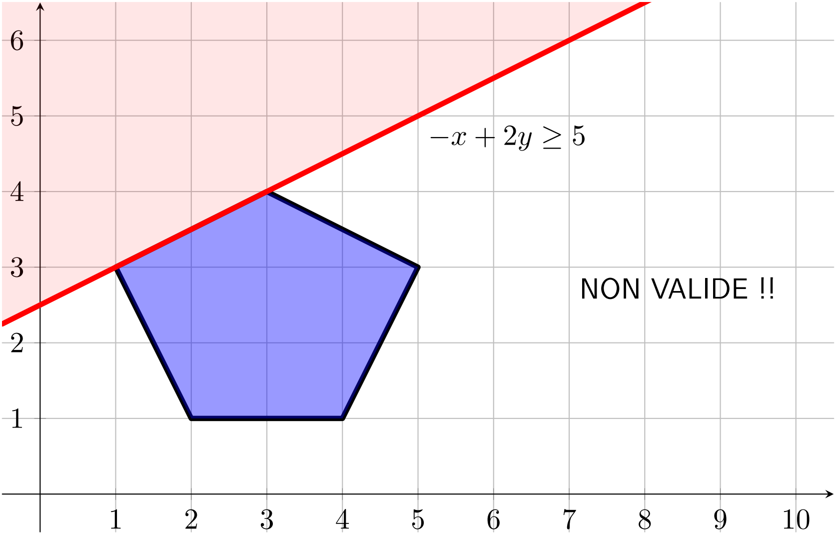
Inégalités valides



Inégalités valides



Inégalités valides



Faces

Une **face** d'un polyèdre P est l'ensemble des points de P qui satisfont à égalité une inégalité valide pour P.

Autrement dit, si $ax \leq b$ est valide pour P, alors $F = \{x \in P \mid ax = b\}$ est une face de P.

Faces

Une **face** d'un polyèdre P est l'ensemble des points de P qui satisfont à égalité une inégalité valide pour P.

Autrement dit, si $ax \leq b$ est valide pour P, alors $F = \{x \in P \mid ax = b\}$ est une face de P.

Une face qui a dimension exactement 1 moins de la dimension du polyèdre est dite **facette**.

Faces

Une **face** d'un polyèdre P est l'ensemble des points de P qui satisfont à égalité une inégalité valide pour P.

Autrement dit, si $ax \leq b$ est valide pour P, alors $F = \{x \in P \mid ax = b\}$ est une face de P.

Une face qui a dimension exactement 1 moins de la dimension du polyèdre est dite **facette**.

Une face non vide de dimension 0 – c'est à dire une face composée par un seul point – est appelée **sommet**.

Faces

Une **face** d'un polyèdre P est l'ensemble des points de P qui satisfont à égalité une inégalité valide pour P.

Autrement dit, si $ax \leq b$ est valide pour P, alors $F = \{x \in P \mid ax = b\}$ est une face de P.

Une face qui a dimension exactement 1 moins de la dimension du polyèdre est dite **facette**.

Une face non vide de dimension 0 – c'est à dire une face composée par un seul point – est appelée **sommet**.

Une face non vide de dimension 1 est appelée **arête**.

Faces

Une **face** d'un polyèdre P est l'ensemble des points de P qui satisfont à égalité une inégalité valide pour P.

Autrement dit, si $ax \leq b$ est valide pour P, alors $F = \{x \in P \mid ax = b\}$ est une face de P.

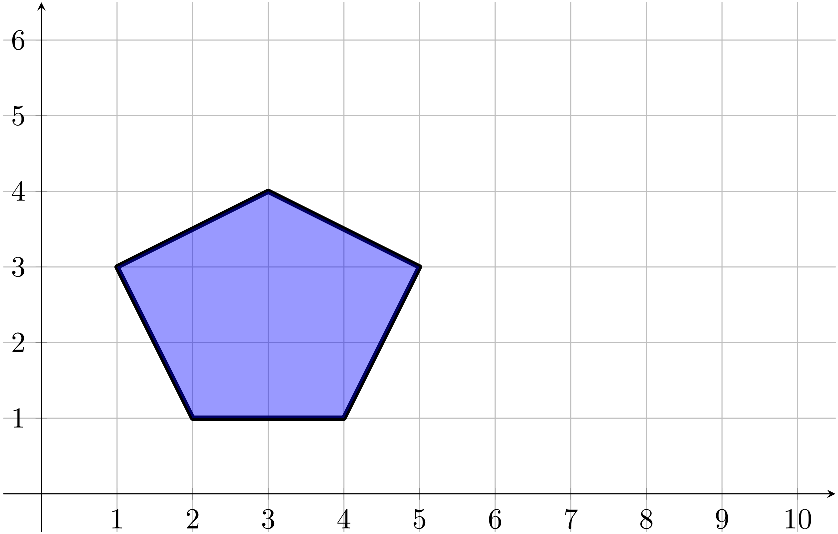
Une face qui a dimension exactement 1 moins de la dimension du polyèdre est dite **facette**.

Une face non vide de dimension 0 – c'est à dire une face composée par un seul point – est appelée **sommet**.

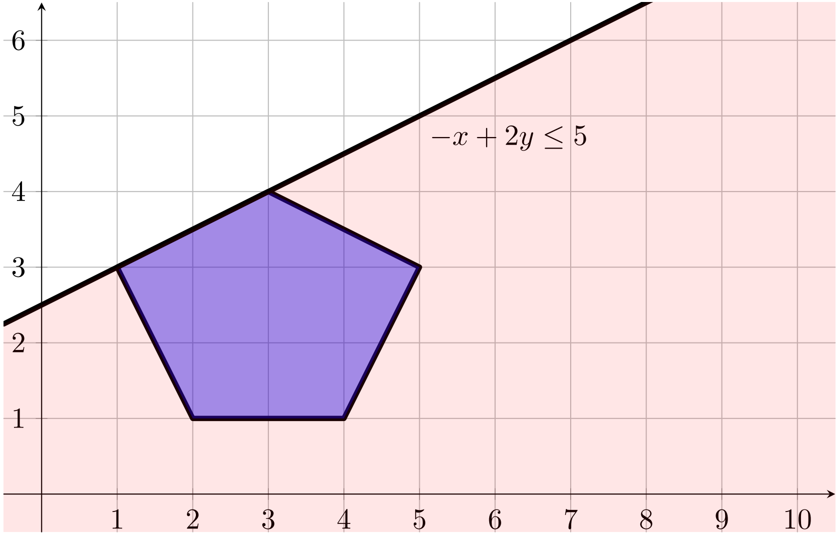
Une face non vide de dimension 1 est appelée **arête**.

Par définition, l'ensemble vide et P sont faces de P.

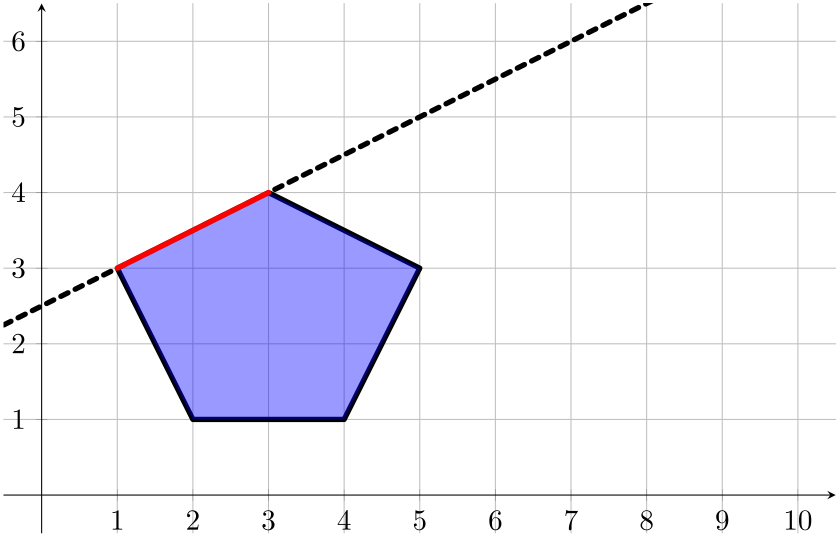
Faces



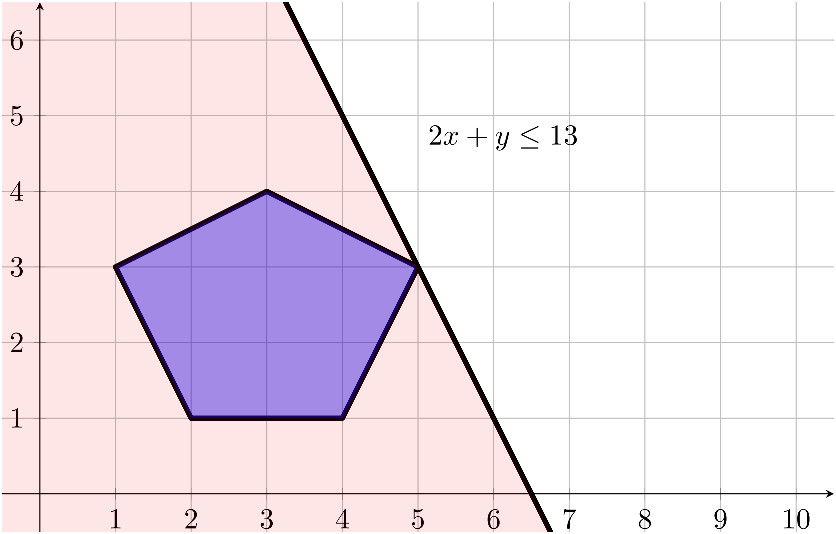
Faces



Faces



Faces



Faces