# Modélisation en Programmation Linéaire

## Cours 4 : Géométrie des Programmes Linéaires, Partie II

E. Lancini

Université Dauphine-PSL

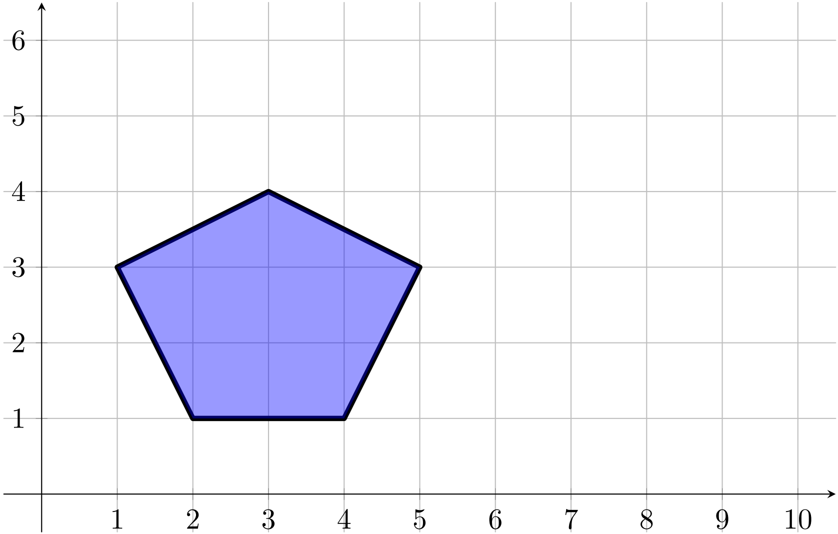
# Contenu de la séance

# Vocabulaire géométrique des polyèdres

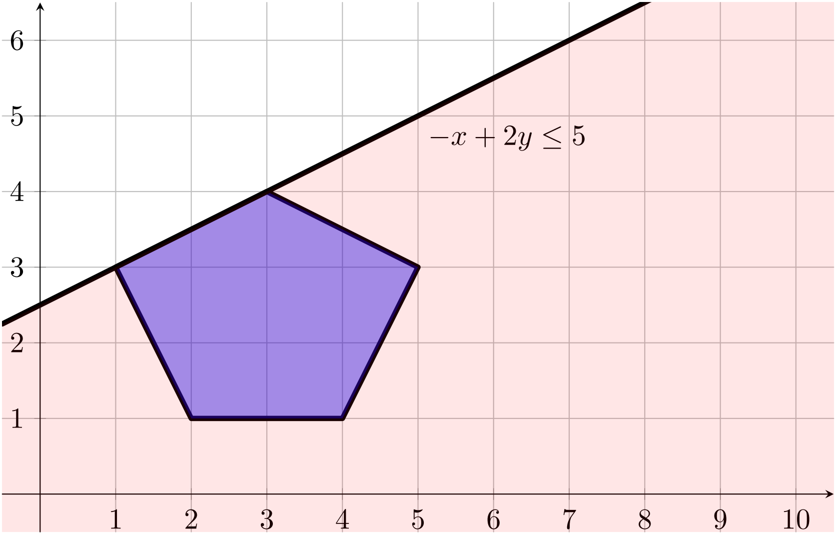
Soit $P \subset \mathbb{R}^n$ un polyèdre.

- Une **face** de $P$ est l'intersection de $P$ avec un hyperplan support.
- Une **facette** est une face de dimension $\dim(P) - 1$.
- Une **arête** est une face de dimension $1$.
- Un **sommet** est une face de dimension $0$.

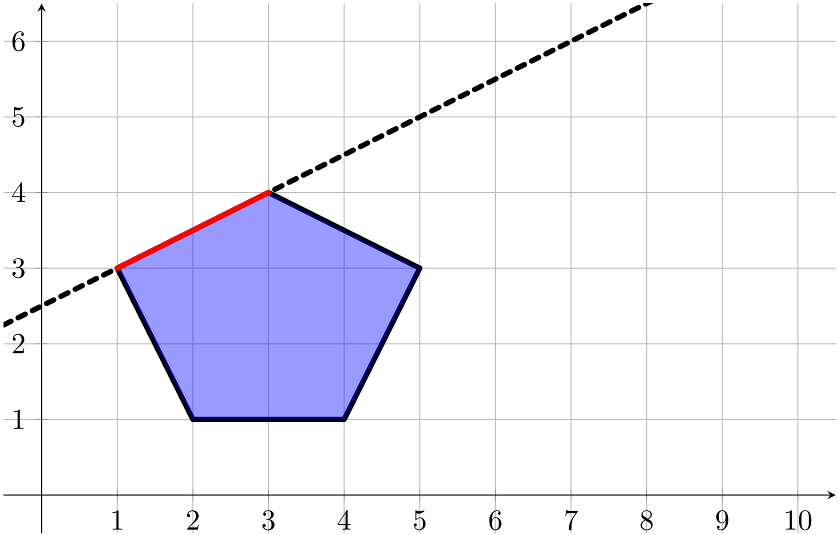
# Faces



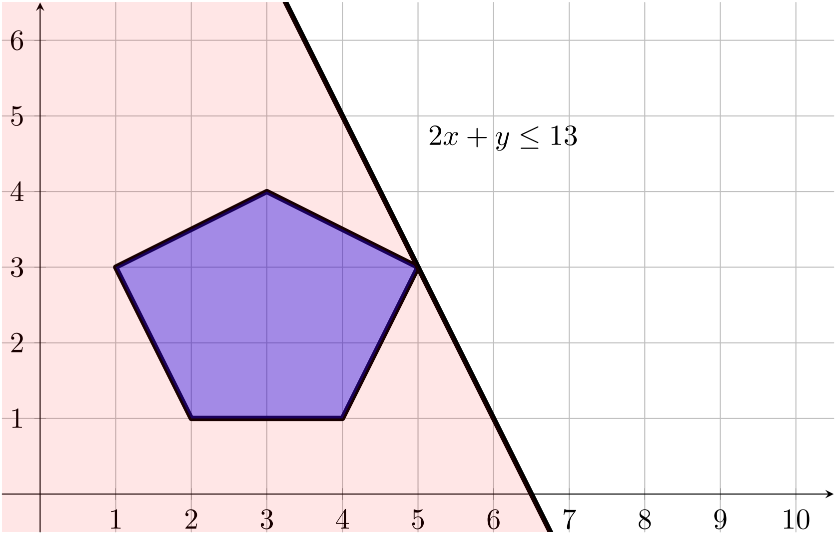
# Faces



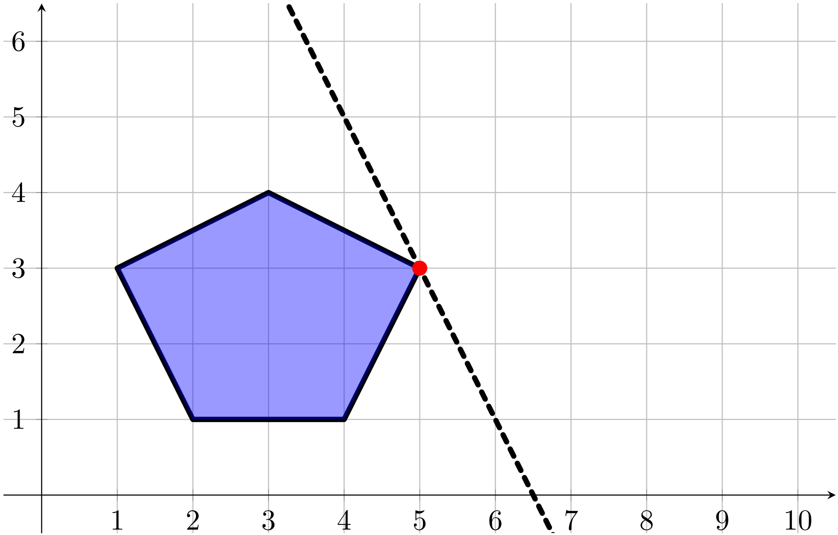
# Faces



# Faces



# Faces



# Interprétation algébrique des faces

Soit

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}.$$

Une face $F$ de $P$ est de la forme :

$$F = \{x \in P \mid a_i^\top x = b_i \text{ pour tout } i \in I\},$$

où les contraintes indexées par $I$ sont dites **saturées**.

- Les sommets correspondent à $n$ contraintes linéairement indépendantes actives.
- Les facettes correspondent à une seule contrainte à égalité.

Les contraintes qui correspondent à une facette sont appelées **facet-defining**.

# Contraintes actives et faces

Soit $x$ un point d'un polyèdre.

- Une contrainte est dite **active** en $x$ si elle est satisfaite à égalité.
- L'ensemble des contraintes actives détermine la face contenant $x$.

En générale :

- plus il y a de contraintes actives,
- plus la dimension de la face est faible,
- ceci est vrai que pour déterminer la dimension de la face d'appartenance d'un point !
- au contraire, on a vu que une contrainte peut déterminer une face de dimension inférieure.

# Exemple

On considère le cube d'arête unitaire en $\mathbb{R}^3$
Le cube est décrit par

$$\{x, y, z : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$$

Ceci est évidemment un polyèdre de dimension 3.

Si on fixe par exemple la contrainte $z \geq 0$ à égalité, on se retrouve avec :

$$\{x, y, z : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, z = 0\}$$

qui est e carré unitaire en $\mathbb{R}^2$ (on peut simplement ignorer $z$).
Donc une contrainte à égalité nous a donné une face de dimension 2, c'est à dire une facette.
Si on fixe aussi la contrainte $y \leq 1$ à égalité, on obtient :

$$\{x, y, z : 0 \leq x \leq 1, y = 1, z = 0\}$$

c'est à dire un segment, et donc un face de dimension 1.

# Contre-exemple

On considère toujours le cube d'arête unitaire en $\mathbb{R}^3$
Le cube est décrit aussi par

$$\{x, y, z : x + y \leq 2, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$$

Ceci est évidemment un polyèdre de dimension 3.

Si on fixe la contrainte $x + y \leq 2$ à égalité, on se retrouve avec :

$$\{x, y, z : x + y = 2, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$$

ou, plus simplement,

$$\{x, y, z : x + y \leq 3, x = 1, y = 1, 0 \leq z \leq 1\}$$

Donc une contrainte à égalité nous a donné une face de dimension 1.
En effet, la contrainte $x + y \leq 2$ est impliquée par $x \leq 1$ et $y \leq 1$.

# Contre-exemple (suite)

Si on prends maintenant le point $(1, 1, \frac{1}{2})$, on peut observer que il appartient à une face, car les inégalités :

- $x \leq 1$,
- $y \leq 1$ et
- $x + y \leq 1$,

sont satisfaites à égalité.

On a 2 possibilités :

- soit les inégalités sont toutes indépendantes (et donc le point est un sommet du cube),
- soit il y a au moins une inégalité redondante, et donc on peut pas déduire la dimension de la face la plus petite contenant notre point.

# Combinaisons convexes et faces

**Theorem (Sommets sont pointes extrêmes)**

*Un point $x \in P$ est un sommet si et seulement s'il est* ***extrême****.*
*Autrement dit, si et seulement s'il ne peut pas s'écrire comme combinaison convexe de deux points distincts de $P$.*

**Theorem (Faces sont polyèdres)**

*Toute face non vide d'un polyèdre est aussi un polyèdre.*

**Par conséquence :** toute faces d'un polyèdre sont convexes.

**Theorem (Faces forment un treillis)**

*Toute intersection de deux faces d'un polyèdre est une face du même polyèdre.*

# Exemples et contre-exemples

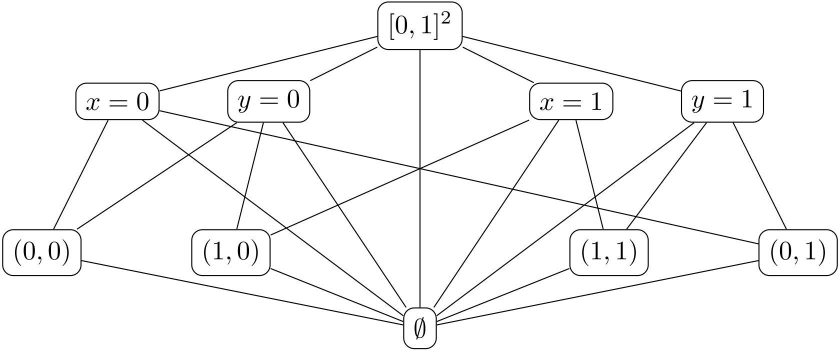
Un point extrême n'est pas nécessairement un sommet si l'ensemble n'est pas polyédral.
Une face peut être :

- un sommet,
- une arête,
- une facette,
- le polyèdre tout entier.

**Attention :** la convexité seule ne suffit pas à garantir une structure polyédrique.

# Intersection de faces

Le dernier théorème de la slide 10 nous dit que l'intersection de deux faces est toujours une face du même polyèdre.
On peut en déduire que les faces d'un polyèdre possèdent une structure de **treillis**.



Chaque sommet d'un polyèdre est un point extrême, et au même temps, les polyèdres sont des ensembles convexes.
Par conséquence, on obtient que :

**Theorem (Polytope et sommets)**

*Un polytope est l'enveloppe convexe de ses sommets.*
*Autrement dit, un polytope $P$ est exactement l'ensemble de points qui sont combinaisons convexes des sommets de $P$.*

$$P = \mathit{conv}(\mathit{sommets\ de}\ P)$$

# Pourquoi ce résultat est fondamental

Le théorème précédent implique que :

- toute l'information géométrique est contenue dans les sommets,
- un polytope est entièrement décrit par un ensemble fini de points.

**Conséquence clé :**

- optimiser une fonction linéaire revient à comparer un nombre fini de valeurs.

# Double interprétation des polytopes

Un polytope admet deux descriptions équivalentes :

- **description externe** : intersection de demi-espaces,
- **description interne** : enveloppe convexe de ses sommets.

Ce résultat est fondamental pour l'optimisation linéaire (continue et en nombre entiers).

Plus précisément :

**Theorem**

*Soit $S$ un ensemble fini de points, alors leur enveloppe convexe est un polytope.*

# Exemple : description externe

Considérons le polytope :

$$P = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 1\}.$$

- Description externe : intersection de trois demi-espaces.
- $P$ est un polytope borné de dimension $2$.

# Exemple : description interne

Les sommets de $P$ sont :

$$(0,0), \quad (1,0), \quad (0,1).$$

Tout point $x \in P$ s'écrit :

$$x = \lambda_1(0,0) + \lambda_2(1,0) + \lambda_3(0,1), \quad \sum \lambda_i = 1, \ \lambda_i \geq 0.$$

On a bien : $P = \text{conv}\{(0,0),(1,0),(0,1)\}$.

# Cas pathologiques en optimisation linéaire

Jusqu'à là on a parlé de polytopes (donc polyèdres bornés).
En réalité, le moment ou on écrit un système d'inégalités linéaires on ne sait pas si notre système décrit un polyèdre borné, ni si ce système admets une solution réalisable.
Ces deux cas correspondent à une situation pathologique (pas de solutions réalisables) et une situation "non standard" mais potentiellement acceptable.

Dans les applications il faut considérer si on s'est pas trompé de modèle pour notre problème.

# Polyèdres non bornés

- Un polyèdre non borné peut admettre un optimum.
- Il peut aussi permettre d'augmenter indéfiniment la fonction objectif.

Cela dépend de l'orientation du vecteur $c$ par rapport aux directions de récession.

# Exemple

Un brasseur souhaite produire une bière et cherche à être le plus efficient possible économiquement, c'est-à-dire à maximiser son profit.

Les ingrédients disponibles sont : le houblon, le blé, l'eau, le sucre. La quantité de bière produite (en kg) est égale à la quantité d'eau utilisée, augmentée de la moitié de la somme des quantités des autres ingrédients.

Afin d'éviter une bière trop diluée, la quantité d'eau ajoutée ne peut pas dépasser $50\%$ du poids total des ingrédients utilisés. De plus, le brasseur souhaite utiliser au moins $3$ kg de houblon et au moins $5$ kg de blé.

# Exercice : Brasserie et profit maximal

Un brasseur produit une bière en combinant quatre ingrédients : houblon, blé, eau, sucre.

- Quantité de bière (kg) : $Q = e + \frac{1}{2}(h + b + s)$
- Vente : $2/kg$
- Coût des ingrédients : houblon $4/kg$, blé $3/kg$, eau $0.1/kg$, sucre $2/kg$
- Contraintes :
  - Eau $\leq 50\%$ du poids total des ingrédients
  - Houblon $\geq 3$ kg, blé $\geq 5$ kg
  - Toutes les quantités $\geq 0$

**Question :** Formuler ce problème comme un problème de programmation linéaire.

# Optimisation d'une fonction linéaire

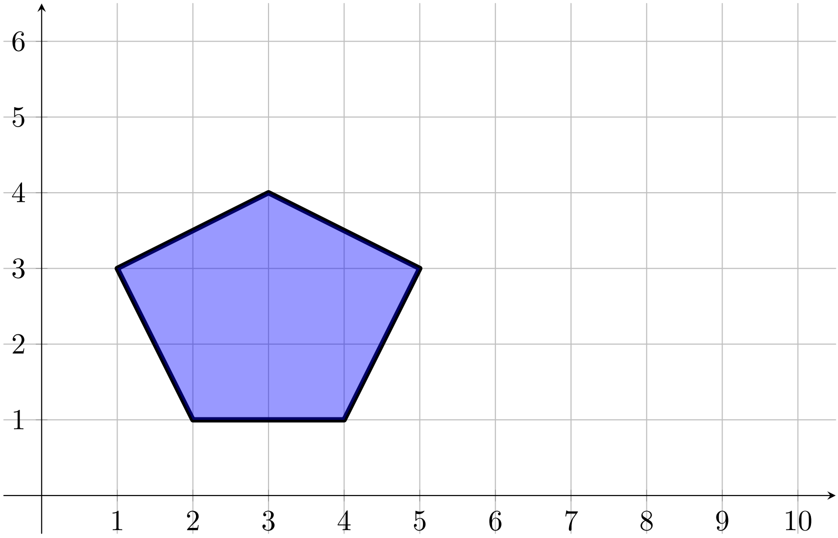
Soit $f(x) = c^\top x$.

Les ensembles de niveau de $f$ sont des hyperplans :

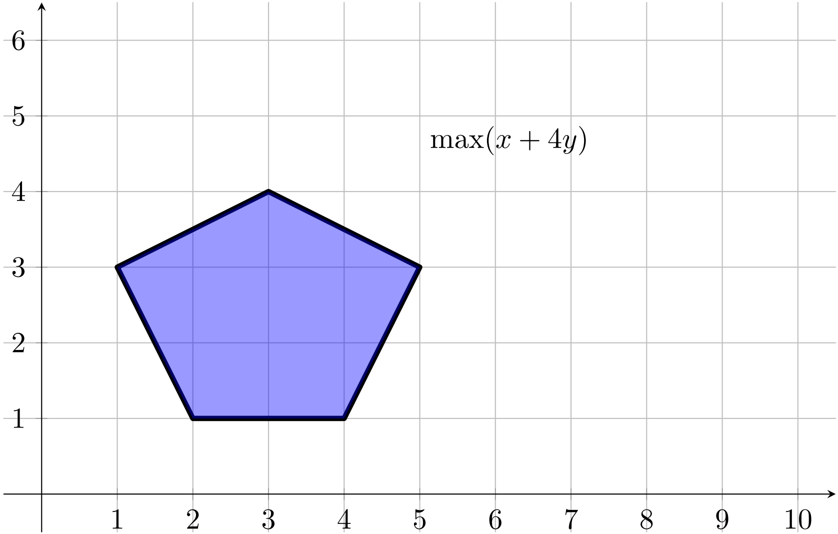
$$c^\top x = \alpha.$$

Optimiser $f$ sur un polyèdre revient à translater ces hyperplans jusqu'au dernier point de contact avec le polyèdre réalisable.

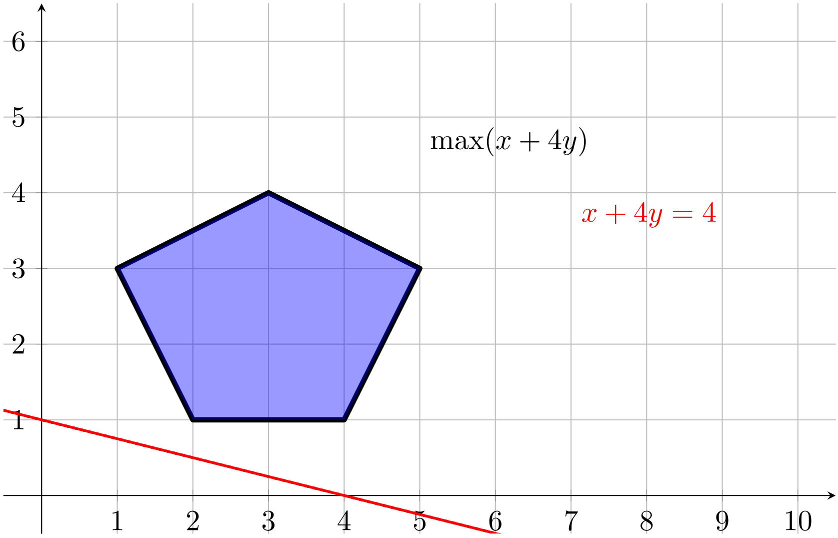
# Intuition en 2D



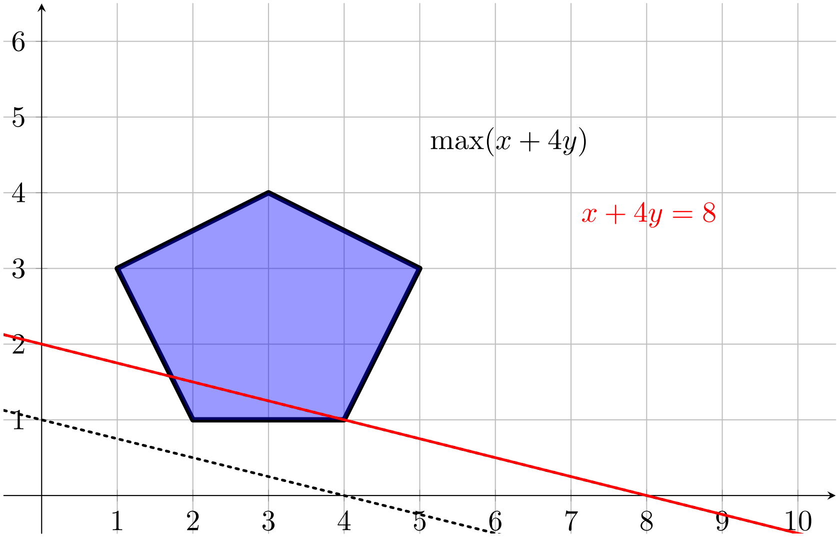
# Intuition en 2D



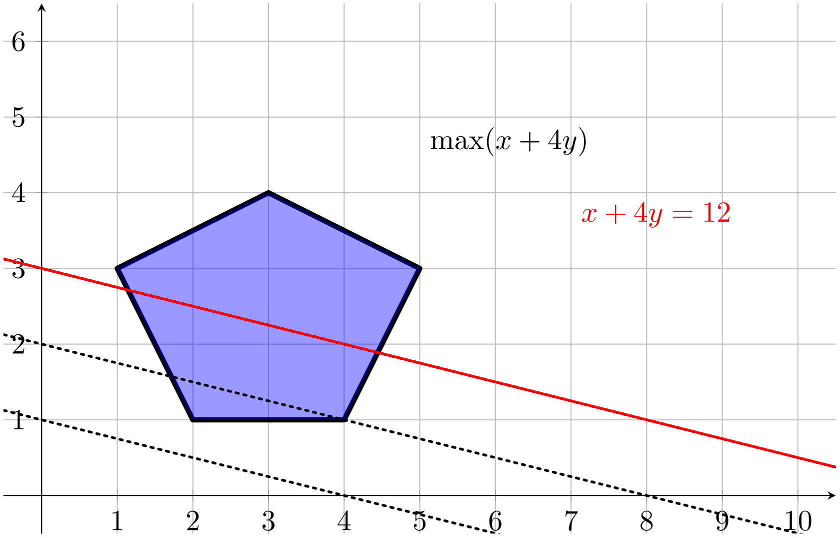
# Intuition en 2D



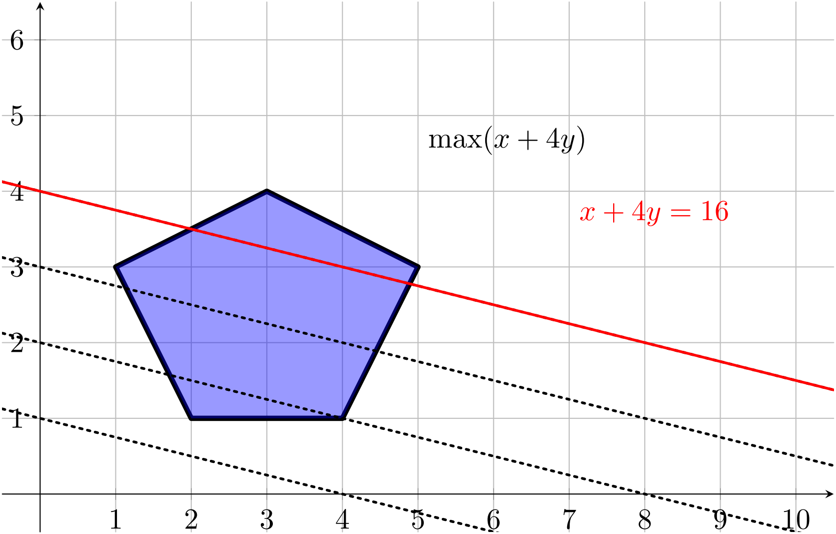
# Intuition en 2D



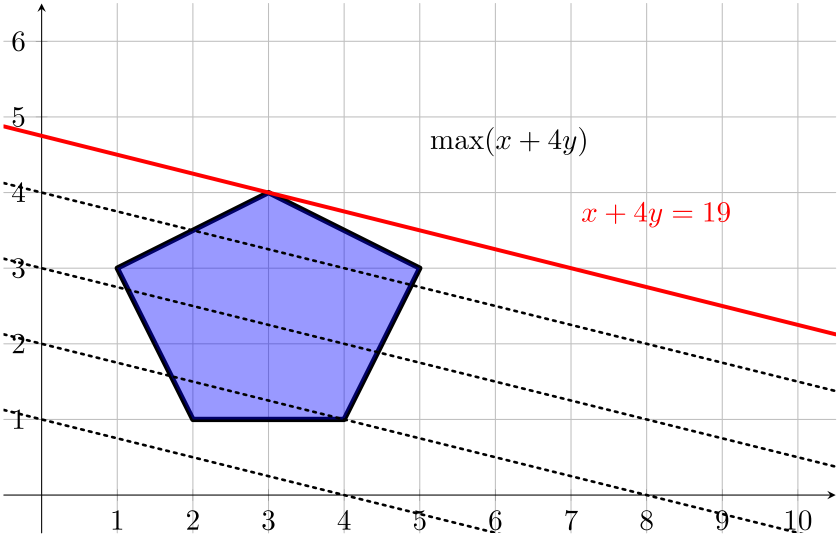
# Intuition en 2D



# Intuition en 2D



# Intuition en 2D



# Théorème fondamental de la programmation linéaire

**Theorem (Théorème fondamental de la programmation linéaire)**

*Si un programme linéaire admet une solution optimale, alors l'ensemble de solutions optimales est une face du polyèdre.*

Donc soit $P$ un polyèdre et $f$ une fonction linéaire. Si le maximum de $f$ existe sur $P$, alors :

- il est atteint sur une face de $P$,
- en particulier, il existe un sommet optimal (si $P$ admets des sommets).

Pour un polytope non vide il existe toujours un sommet qui atteint l'optimum d'une fonction linéaire.

# Idée de la preuve

Soit $f$ la fonction objectif et $P$ le polyèdre décrit par le système linéaire.

On suppose que $f$ présente un maximum sur $P$, disons $t$.

Alors, $f(x) \leq t$ est une inégalité linéaire valide.

Donc, $\{x \in P \mid f(x) = t\}$ est une face de $P$.

Fin de la preuve.

# Conséquences du théorème fondamental

- L'ensemble des solutions optimales est convexe.
- Il peut contenir :
  - un unique sommet,
  - une arête,
  - une facette entière.

Un optimum non unique correspond toujours à une face de dimension $\geq 1$.

**Conséquence fondamentale :** il “suffit” d’examiner les sommets pour résoudre un PL.

**Question :** combien de sommets peut avoir un polyèdre ?

# Optimisation et polyèdres

**Conséquence fondamentale :** il "suffit" d'examiner les sommets pour résoudre un PL.

**Question :** combien de sommets peut avoir un polyèdre ?

**Question :** combien de sommets peut avoir au maximum un polygone (dimension 2) défini par $m$ contraintes linéaires ?

# Optimisation et polyèdres

**Conséquence fondamentale :** il “suffit” d'examiner les sommets pour résoudre un PL.

**Question :** combien de sommets peut avoir un polyèdre ?

**Question :** combien de sommets peut avoir au maximum un polygone (dimension 2) défini par $m$ contraintes linéaires ?

**Question :** combien de sommets peut avoir au maximum un polyèdre en dimension $3$ défini par $m$ contraintes linéaires ?

# Optimisation et polyèdres

**Conséquence fondamentale :** il “suffit” d’examiner les sommets pour résoudre un PL.

**Question :** combien de sommets peut avoir un polyèdre ?

**Question :** combien de sommets peut avoir au maximum un polygone (dimension 2) défini par $m$ contraintes linéaires ?

**Question :** combien de sommets peut avoir au maximum un polyèdre en dimension $3$ défini par $m$ contraintes linéaires ?

**Question :** combien de sommets a un hypercube de dimension $n$ ?

# Optimisation et polyèdres

**Conséquence fondamentale :** il “suffit” d'examiner les sommets pour résoudre un PL.

**Question :** combien de sommets peut avoir un polyèdre ?

**Question :** combien de sommets peut avoir au maximum un polygone (dimension 2) défini par $m$ contraintes linéaires ?

**Question :** combien de sommets peut avoir au maximum un polyèdre en dimension $3$ défini par $m$ contraintes linéaires ?

**Question :** combien de sommets a un hypercube de dimension $n$ ?

**Question :** combien de sommets peut avoir au maximum un polyèdre en dimension $n$ défini par $m$ contraintes linéaires ?

# Quelles méthodes de résolution existent ?

Le Théorème fondamental de la PL nous donne des indices sur comment résoudre un programme linéaire.

Il existent plusieurs algorithmes, chacun avec sont objectif.

- Méthode du Simplexe,
- Méthode de l'Ellipsoïde,
- Méthode Graphique,
- Algorithme de Karmarkar,
- Méthode énumérative.