Modélisation en Programmation Linéaire

Cours 7 : Intro à la dualité

E. Lancini

Université Dauphine-PSL

Objectifs du cours 7

- Comprendre la notion de **problème dual** en programmation linéaire.
- Interpréter le dual comme un outil pour obtenir des **bornes** sur l'optimum.
- Énoncer et comprendre le **théorème de dualité faible**.
- Introduire le **théorème de dualité forte**.
- Comprendre le rôle du dual comme **certificat d'optimalité**.
- Donner une première interprétation **économique** des variables duales.

Motivation

Considérons un problème d'optimisation :

$$\max f(x) \quad \text{s.t. } g(x) \leq b.$$

Comment on peut comprendre si une solution réalisable est "bonne" ?
Chaque solution réalisable donne une borne inférieure (lower bound **LB**) à la valeur de l'optimum.
Au contraire, con peut parfois trouver une borne supérieure (upper bound **UB**) à cette valeur.
On mesure la qualité d'une solution avec le **gap** :

$$gap = \left| \frac{UB - LB}{LB} \right|$$

Exemple

Si on considère le problème de sac à dos, avec contrainte de poids de 20kg :

- **1 Épée** : valeur 500 PO, poids 3 Kg .
- **300 pièces d'or** : valeur 1 PO, poids 5 g.
- **1 Tapis artistique** : valeur 1500 PO, poids 18 Kg.
- **2 Armures** : valeur 400 PO, poids 6Kg.

On voit que la solution armures+épée+pièces est faisable et vaut 1600 PO. Celui-ci est un LB.
Au même temps, On sait que, n'importe quoi arrive, on ne va jamais trouver une solution qui dépasse la somme de tous les objets, donc on a un UB de 2700 PO.

$$gap = \frac{1100}{1600} = 0,68$$

Dualité

En générale, les bornes supérieures obtenue via une relaxation peuvent être faibles : l'exemple nous a donné une borne du 68% de la valeur.

En effet, on a exploité que une information très basique sur la solution.

Une façon plus avancée de faire ça est celle de construire le **problème duale**.

Avant de donner la définition formelle, on étude un autre exemple.

Exemple

On reprends l'exemple yaourts.

$$
\begin{array}{rll}
\max & 4x_A + 5x_B & \\
\text{s.t.} & 2x_A + x_B \leq 800 & (1) \\
& x_A + 2x_B \leq 700 & (2) \\
& x_B \leq 300 & (3) \\
& x_A, x_B \geq 0 &
\end{array}
$$

On veut trouver un UB le plus bas possible sur la valeur de la f.o.

Exemple

On reprends l'exemple yaourts.

$$
\begin{array}{rll}
\max & 4x_A + 5x_B & \\
\text{s.t.} & 2x_A + x_B \leq 800 & (1) \\
& x_A + 2x_B \leq 700 & (2) \\
& x_B \leq 300 & (3) \\
& x_A, x_B \geq 0 &
\end{array}
$$

On veut trouver un UB le plus bas possible sur la valeur de la f.o.

- $4x_A + 5x_B \leq 5 * (1) = 10x_A + 5x_B \leq 4000$,

Exemple

On reprends l'exemple yaourts.

$$\begin{aligned} \max \quad & 4x_A + 5x_B \\ \text{s.t.} \quad & 2x_A + x_B \leq 800 && (1) \\ & x_A + 2x_B \leq 700 && (2) \\ & x_B \leq 300 && (3) \\ & x_A, x_B \geq 0 \end{aligned}$$

On veut trouver un UB le plus bas possible sur la valeur de la f.o.

- $4x_A + 5x_B \leq 5 * (1) = 10x_A + 5x_B \leq 4000$,
- $4x_A + 5x_B \leq 4 * (2) = 4x_A + 8x_B \leq 2800$,

Exemple

On reprends l'exemple yaourts.

$$\begin{aligned} \max \quad & 4x_A + 5x_B \\ \text{s.t.} \quad & 2x_A + x_B \leq 800 \quad (1) \\ & x_A + 2x_B \leq 700 \quad (2) \\ & x_B \leq 300 \quad (3) \\ & x_A, x_B \geq 0 \end{aligned}$$

On veut trouver un UB le plus bas possible sur la valeur de la f.o.

- $4x_A + 5x_B \leq 5 * (1) = 10x_A + 5x_B \leq 4000$,
- $4x_A + 5x_B \leq 4 * (2) = 4x_A + 8x_B \leq 2800$,
- $4x_A + 5x_B = 2 * (1) + 3 * (2) \leq 1600 + 900 = 2500$.

Exemple

On a donc réussi à borner la fonction objectif en utilisant les informations contenues dans les contraintes.

Plus précisément on a reformulé la fonction objectif comme combinaison linéaire des contraintes. Le problème devient donc choisir quels coefficients on doit utiliser pour :

- majorer (ou reconstruire) la fonction objectif,
- en minimisant le membre de droite.

SPOILER : C'est un programme linéaire !

Problème duale

Chaque contrainte de notre problème est associée à un coefficient.
Par exemple, on peut appeler y_1, y_2, y_3 le coeffs de $(1), (2)$, et (3).

On est en train de chercher une combinaison de y_1, y_2, y_3 qui donne une fonction majorant notre fonction objectif.
En particulier, on veut une fonction qui a un coefficient d'au moins 4 pour à x_A et d'au moins 5 pour x_B.

Question : pourquoi on est satisfaits avec cette condition ? On ne peut pas demander d'obtenir **exactement** $4x_A + 5x_B$?

Contraintes duales (yaourt)

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 4x_A + 5x_B & \\
\text{s.t.} \quad & 2x_A + x_B \leq 800 & (1) \\
& x_A + 2x_B \leq 700 & (2) \\
& x_B \leq 300 & (3) \\
& x_A, x_B \geq 0 &
\end{aligned}
$$

On cherche donc un combinaison de y_1, y_2, y_3 qui respecte les conditions suivantes :

- $(2y_1 + y_2)x_A \geq 4x_A$,
- $(y_1 + 2y_2 + y_3)x_B \geq 5x_B$,
- $y_1, y_2, y_3 \geq 0$. (**Question** : pourquoi ?)

Toute combinaison qui respecte ces conditions donne un UB.

Fonction duale

Si on fixe y_1, y_2, y_3, quel est l'UB correspondant ?

$$UB = 800y_1 + 700y_2 + 300y_3$$

En particulier, entre toutes les valeurs des y_1, y_2, y_3 acceptables, on cherche celui qui donne le UB le plus baisse possible.
On cherche donc :

$$\begin{aligned} \min \quad & 800y_1 + 700y_2 + 300y_3 \\ \text{s.t.} \quad & 2y_1 + y_2 \geq 4 \\ & y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 5 \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Si on trouve l'optimum de ce PL on obtient un UB de notre fonction objectif originelle.

Problème dual

On a donc réussi à construire un nouveau problème à partir de l'originel. Ce problème s'appelle **dual** (ou **dual Lagrangien**).

La construction qu'on a proposée pour un PL en réalité peut s'appliquer pour n'importe quel problème d'optimisation convexe, avec éventuellement des structures plus complexes.

On est donc capable, de construire un problème dual à notre **problème primal**, qui nous donne une borne supérieure (où inférieure si on a une minimisation) à la valeur de notre optimum.

Observation

Le maximum d'un PL est borné supérieurement par le minimum de son duale.

Cas vide / non borné

La relation entre primal et dual donne des informations importantes sur la faisabilité et la bornitude.

- Si le **primal est non borné** (valeur $\to +\infty$), alors le dual est **infaisable**.
- Si le **dual est non borné** (valeur $\to -\infty$), alors le primal est **infaisable**.

Attention

Il est possible que **les deux problèmes soient infaisables**.

Ces relations permettent de détecter des problèmes mal posés.

Théorème de dualité faible

Dualité faible

Soient x une solution faisable du primal et y une solution faisable du dual. Alors :

$$c^\top x \leq b^\top y$$

- Toute solution duale donne une **borne supérieure** sur le primal (cas maximisation).
- Toute solution primale donne une **borne inférieure**.

Interprétation

Le dual fournit systématiquement un **certificat de qualité** pour toute solution réalisable du primal.

Construction du dual

Il y a une méthode très simple pour construire un problème dual.
Pour l'instant on suppose que notre problème soit en **forme canonique**.

- Si le primal a n variables et m contraintes, alors le dual aura m variables et n contraintes.
- Le terme de droite de nos contraintes devient le vecteurs de coefficients de la fonction objectif duale de laquelle on cherchera un **minimum**.
- Le vecteur de coefficient de la fonction primale devient le terme de droite du dual.
- La matrice des coefficients sera transposée.
- Les contraintes seront toutes de $\geq$.
- Les variables duales seront ≥ 0.

Donc, si on écrit notre problème primal en forme matricielle

Primal

$$\begin{aligned} \max \quad & c^\top x \\ \text{s.t.} \quad & \\ & Ax \leq b \\ & x \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Construction du dual

Donc, si on écrit notre problème primal en forme matricielle

Primal

$$\max \quad c^\top x$$

s.t.

$$Ax \leq b$$

$$x \geq \mathbf{0}$$

On peut écrire notre dual très simplement comme :

Dual

$$\min \quad b^\top y$$

s.t.

$$A^\top y \geq c$$

$$y \geq \mathbf{0}$$

Théorème de dualité forte

Dualité forte

Si le problème primal admet une solution optimale finie, alors le dual aussi, et :

$$\max c^\top x = \min b^\top y$$

- Il n'y a **pas d'écart** entre primal et dual à l'optimum.
- Le gap optimal est donc nul.

Conséquence

Résoudre le dual ou le primal est équivalent du point de vue de la valeur optimale.

Conséquence

Certificat d'optimalité

Si x et y sont faisables et :

$$c^\top x = b^\top y,$$

alors ils sont optimaux.

Théorème des écarts complémentaires

Soient $x^\star$ une solution optimale du primal et $y^\star$ une solution optimale du dual.

Écarts complémentaires

Pour tout i et tout j :

$$y_i^\star \left(b_i - (Ax^\star)_i\right) = 0 \quad \text{et} \quad x_j^\star \left((A^\top y^\star)_j - c_j\right) = 0$$

- $(b_i - (Ax^\star)_i)$ est le **slack** de la contrainte i du primal.
- $((A^\top y^\star)_j - c_j)$ est le **slack** de la contrainte j du dual.

Interprétation

Le produit entre une variable et le slack associé est toujours nul à l'optimum.

Écarts complémentaires : interprétation

Les conditions d'écarts complémentaires impliquent :

- Si $y_i^\star > 0$ alors la contrainte i du primal est **saturée** :

$$(Ax^\star)_i = b_i$$

- Si une contrainte du primal n'est **pas saturée**, alors :

$$y_i^\star = 0$$

- Si $x_j^\star > 0$ alors la contrainte j du dual est **saturée** :

$$(A^\top y^\star)_j = c_j$$

- Si une contrainte du dual n'est pas saturée, alors :

$$x_j^\star = 0$$

Écarts complémentaires : exemple (yaourts)

Primal

$$\begin{aligned} \max \quad & 4x_A + 5x_B \\ \text{s.t.} \quad & 2x_A + x_B \leq 800 \\ & x_A + 2x_B \leq 700 \\ & x_B \leq 300 \\ & x_A, x_B \geq 0 \end{aligned}$$

Dual

$$\begin{aligned} \min \quad & 800y_1 + 700y_2 + 300y_3 \\ \text{s.t.} \quad & 2y_1 + y_2 \geq 4 \\ & y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 5 \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

On suppose de savoir que $y^* = (1, 2, 0)$.
Alors, on sait que les contraintes (1) et (2) sont tight. On arrive à déduire que $x^* = (300, 200)$.
Si on vérifie les f.o. :

$$f(x^*) = 4 * 300 + 5 * 200 = 2200$$

$$g(y^*) = 1 * 800 + 2 * 700 = 2200$$

Interprétation économique

Les variables duales peuvent être interprétées comme des **prix** ou **valeurs marginales**.

- Chaque contrainte représente une **ressource limitée**.
- La variable duale associée mesure la **valeur d'une unité supplémentaire** de cette ressource.

Exemple

Si $y_i = 3$, alors augmenter la ressource i d'une unité améliore la valeur optimale d'au plus 3.

- Les contraintes saturées correspondent souvent à des ressources **rares**.
- Les contraintes non saturées ont souvent un **prix nul**.

Dualité pour problèmes en forme non canonique

La construction du dual dépend du type de contraintes et des signes des variables.

- Contrainte $\leq$ $\Rightarrow$ variable duale ≥ 0
- Contrainte $\geq$ $\Rightarrow$ variable duale ≤ 0
- Contrainte $=$ $\Rightarrow$ variable duale libre

- Variable $x_j \geq 0 \Rightarrow$ contrainte duale $\geq$
- Variable $x_j \leq 0 \Rightarrow$ contrainte duale $\leq$
- Variable libre $\Rightarrow$ contrainte duale $=$

Idée clé

Chaque **type de contrainte** dans le primal correspond à un **type de variable** dans le dual, et réciproquement.

Sommaire

Primal		Dual
maximisation	$\longleftrightarrow$	minimisation
variables	$\longleftrightarrow$	contraintes
contraintes	$\longleftrightarrow$	variables
coefficients de la f.o.	$\longleftrightarrow$	membres de droites
membres de droites	$\longleftrightarrow$	coefficients de la f.o.
variables ≥ 0	$\longleftrightarrow$	contraintes $\geq$
contraintes $\leq$	$\longleftrightarrow$	variables ≥ 0
variables ≤ 0	$\longleftrightarrow$	contraintes $\leq$
contraintes $\geq$	$\longleftrightarrow$	variables ≤ 0
variables à signe libre	$\longleftrightarrow$	contraintes $=$
contraintes $=$	$\longleftrightarrow$	variables à signe libre