Modélisation en Programmation Linéaire

Séance 8 : La méthode du simplexe dual

E. Lancini

Université Dauphine-PSL

Contenu de la séance

Objectifs de la séance 8

Dans la séance précédente, nous avons introduit la **dualité linéaire** et les **écarts complémentaires**.

Dans la séance sur le simplexe, nous avons étudié un algorithme qui maintient la **faisabilité primale** et améliore la fonction objectif jusqu'à l'optimalité.

L'objectif aujourd'hui est de présenter l'algorithme symétrique : la **méthode du simplexe dual**.

Cette méthode maintient la **faisabilité duale** du tableau et restaure progressivement la faisabilité primale.

Rappel : forme standard et tableau canonique

On considère un problème de programmation linéaire sous la forme standard

$$\max \ c^T x \qquad \text{sous les contraintes } Ax = b, \ x \geq 0.$$

Pour une base B, on écrit le tableau canonique sous la forme

$$x_B + \alpha x_N = \beta,$$

avec

$$\beta = A_B^{-1} b, \qquad \alpha = A_B^{-1} A_N.$$

La ligne objectif s'écrit

$$z = z_0 + \sum_{i \in N} \gamma_i x_i,$$

où les γ_i sont les coefficients réduits.

Simplexe primal vs simplexe dual

Simplexe primal	**Simplexe dual**
On maintient $\beta \geq 0$ (base faisable pour le primal)	On maintient $\gamma \leq 0$ (base faisable pour le dual)
On corrige un $\gamma_i > 0$	On corrige un $\beta_j < 0$
On choisit d'abord la colonne entrante	On choisit d'abord la ligne sortante

Les deux méthodes reposent sur les mêmes opérations de pivot, mais elles ne conservent pas la même forme de faisabilité au cours des itérations.

Quand le simplexe dual est-il utile ?

Le simplexe dual est particulièrement naturel dans trois situations.

- Lorsque l'on dispose d'un tableau **dualement faisable** mais **primalement non faisable**.
- Après une modification du second membre b, quand l'ancienne base reste souvent dualement faisable mais produit certains $\beta_j < 0$.
- Dans les solveurs modernes, notamment en re-optimisation et dans les méthodes *branch-and-bound*.

L'intérêt algorithmique est donc fort : on évite souvent de reconstruire une solution de base faisable depuis zéro.

Lecture duale d'un tableau

Dans votre convention de tableau :

- la faisabilité primale correspond à $\beta_j \geq 0$ pour toute ligne j ;
- l'optimalité du simplexe primal s'obtient lorsque $\gamma_i \leq 0$ pour toute colonne hors base i.

Par conséquent, un tableau est **dualement faisable** lorsque tous les coefficients réduits vérifient

$$\gamma_i \leq 0 \qquad \forall i \in N.$$

Le simplexe dual part donc d'un tableau où la dernière ligne est déjà "correcte", mais où certaines valeurs de la colonne des β sont négatives.

Principe de l'algorithme

À chaque itération du simplexe dual :

1. on choisit une **ligne sortante** correspondant à une variable de base négative ;
2. on choisit une **colonne entrante** de manière à conserver la faisabilité duale ;
3. on effectue le pivot ;
4. on recommence jusqu'à obtenir $\beta \geq 0$.

Si, en plus, on a toujours $\gamma \leq 0$, alors le tableau final est à la fois primalement et dualement faisable : il est donc **optimal**.

Condition de départ

Pour appliquer directement le simplexe dual, on suppose que :

$$\gamma_i \leq 0 \quad \forall i \in N,$$

mais qu'il existe au moins une ligne j telle que

$$\beta_j < 0.$$

Autrement dit :

- le tableau est **dualement faisable** ;
- la solution de base courante n'est pas **primalement faisable**.

Le but de l'algorithme est de faire disparaître les $\beta_j < 0$ sans jamais créer de coefficient réduit positif.

Choix de la variable sortante

La première étape consiste à sélectionner une ligne non faisable.

Règle standard : choisir un indice j tel que

$$\beta_j = \min_{h=1,\dots,m} \{\beta_h\},$$

avec bien sûr $\beta_j < 0$.

Cette variable de base quitte la base, car c'est elle qui viole le plus fortement la contrainte de non-négativité.

On parle donc d'abord de **ligne sortante**, et non de colonne entrante.

Choix de la variable entrante

Une fois la ligne j choisie, on cherche une colonne i telle que

$$\alpha_{ji} < 0.$$

Pourquoi ? Parce qu'après pivot, on veut transformer le $\beta_j < 0$ en une nouvelle valeur positive :

$$\beta'_j = \frac{\beta_j}{\alpha_{ji}} > 0.$$

Parmi les colonnes admissibles, on choisit celle qui minimise le ratio dual

$$\frac{\gamma_i}{\alpha_{ji}} \qquad \text{avec } \alpha_{ji} < 0.$$

Comme $\gamma_i \leq 0$ et $\alpha_{ji} < 0$, ce ratio est bien défini et non négatif.

Conditions d'arrêt

Deux situations peuvent se présenter.

1. Succès : si tous les coefficients de droite sont non négatifs,

$$\beta_j \geq 0 \qquad \forall j,$$

alors le tableau est primalement faisable. Comme on a conservé $\gamma_i \leq 0$, la solution courante est **optimale**.

2. Échec : si une ligne j vérifiant $\beta_j < 0$ ne contient aucun coefficient négatif,

$$\alpha_{ji} \geq 0 \qquad \forall i \in N,$$

alors aucun pivot dual n'est possible. Le problème primal est alors **infaisable**.

Exemple : tableau initial

Considérons le tableau suivant, déjà sous forme canonique :

Base	betas	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3
s_1	-1	-1	-2	1	0	0
s_2	2	1	-1	0	1	0
s_3	3	2	1	0	0	1
	0	-1	-3	0	0	0

On vérifie immédiatement que :

- tous les γ sont non positifs ;
- mais $\beta_1 = -1 < 0$.

Le tableau est donc prêt pour le **simplexe dual**.

Exemple : choix du pivot

La ligne sortante est la première, car

$$\beta_1 = -1 = \min\{-1, 2, 3\}.$$

Sur cette ligne, les colonnes admissibles sont celles pour lesquelles $\alpha_{1i} < 0$, donc ici x_1 et x_2.

On compare les ratios :

$$\frac{\gamma_1}{\alpha_{11}} = \frac{-1}{-1} = 1, \qquad \frac{\gamma_2}{\alpha_{12}} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}.$$

On choisit le plus petit ratio. La variable entrante est donc x_1, et le pivot vaut $\alpha_{11} = -1$.

Exemple : après le pivot

Après pivot sur $\alpha_{11} = -1$, on obtient :

Base	betas	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3
x_1	1	1	2	-1	0	0
s_2	1	0	-3	1	1	0
s_3	1	0	-3	2	0	1
	-1	0	-1	-1	0	0

Tous les β sont maintenant non négatifs, et tous les γ restent non positifs.

La solution de base courante est donc **optimale**.

Exemple 2 : un problème où deux pivots sont nécessaires

On considère le problème

$$\max \ -3x_1 - 4x_2$$

avec le tableau canonique suivant :

Base	betas	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3
s_1	-4	-4	0	1	0	0
s_2	-2	1	-2	0	1	0
s_3	2	0	1	0	0	1
	0	-3	-4	0	0	0

Le tableau est dualement faisable, mais pas primalement faisable car deux coefficients β sont négatifs.

Exemple 2 : première itération

On choisit d'abord la ligne la plus négative :

$$\beta_1 = -4.$$

Sur la première ligne, la seule colonne admissible est x_1, car $\alpha_{11} = -4 < 0$, les autres sont positifs.

On pivote donc sur $\alpha_{11} = -4$ et on obtient :

Base	betas	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3
x_1	1	1	0	$-1/4$	0	0
s_2	-3	0	-2	$1/4$	1	0
s_3	0	1	0	0	0	1
	3	0	-4	$-3/4$	0	0

La faisabilité duale est conservée, mais il reste une ligne non faisable

Exemple 2 : deuxième itération

On choisit maintenant la deuxième ligne, car

$$\beta_2 = -3 < 0.$$

Sur cette ligne, la seule colonne admissible est x_2.

On pivote sur $\alpha_{22} = -2$ et on obtient :

Base	betas	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3
x_1	1	1	0	$-1/4$	0	0
x_2	$3/2$	0	1	$-1/8$	$-1/2$	0
s_3	$1/2$	0	0	$1/8$	$1/2$	1
	9	0	0	$-5/4$	-2	0

Tous les β sont maintenant non négatifs et tous les γ restent non positifs : la solution obtenue est **optimale**.

Exemple 2 : lecture de la solution

Dans le tableau final, les variables hors base sont nulles :

$$s_1 = s_2 = 0.$$

Les variables de base valent donc

$$x_1 = 1, \qquad x_2 = \frac{3}{2}, \qquad s_3 = \frac{1}{2}.$$

La valeur de la fonction objectif est

$$z = -9.$$

Cet exemple montre bien la logique du simplexe dual.

Quand les variables artificielles deviennent-elles nécessaires ?

Le simplexe dual ne s'applique directement que si l'on possède déjà un tableau **dualement faisable**.

Ce n'est pas toujours le cas. Par exemple, considérons

$$\begin{array}{rl} \max & x_1 + x_2 \\ \text{s.c.} & x_1 + x_2 \geq 2, \\ & x_1 + 2x_2 \leq 5, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{array}$$

Après mise sous forme d'égalité :

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - s_1 &= 2, \\ x_1 + 2x_2 + s_2 &= 5. \end{aligned}$$

La première contrainte contient une variable d'excès $-s_1$, et il n'y a pas de base évidente composée uniquement de variables d'écart.

Même exemple : introduction d'une variable artificielle

On ajoute une variable artificielle dans la première contrainte :

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - s_1 + a_1 &= 2, \\ x_1 + 2x_2 + s_2 &= 5, \\ x_1, x_2, s_1, s_2, a_1 &\geq 0. \end{aligned}$$

On obtient alors une base initiale naturelle

$$(a_1, s_2),$$

qui est primalement faisable.

On peut lancer une **phase I** avec la fonction artificielle

$$\max \ -a_1$$

(ou, dans le cas général, $-\sum_i a_i$).

Le but est de faire sortir toutes les variables artificielles de la base. Si la valeur optimale de phase I est nulle, alors le problème initial est faisable.

Comparaison pédagogique des deux approches

Simplexe dual	Variables artificielles
On a déjà une base identifiable	On ne dispose pas d'une base de départ exploitable
Le tableau est dualement faisable	Le tableau n'est pas directement utilisable
On corrige des $\beta_j < 0$	On construit artificiellement une base faisable
Très naturel en re-optimisation	Très naturel en phase d'initialisation

En pratique :

- si l'on a $\gamma \leq 0$, le simplexe dual est souvent le bon choix ;
- si l'on n'a même pas de base de départ, on passe plutôt par une méthode en deux phases.

Lien entre les deux idées

Les variables artificielles et le simplexe dual répondent à deux difficultés différentes.

- Les **variables artificielles** servent à construire une première base faisable lorsque le problème ne fournit pas de base naturelle.
- Le **simplexe dual** sert à exploiter un tableau déjà dualement faisable, même si la base n'est pas primalement admissible.

Ces deux techniques ne sont donc pas concurrentes : elles interviennent à des moments différents de la résolution.

Lien avec la dualité et les écarts complémentaires

Le simplexe dual a une lecture très naturelle à la lumière de la dualité.

Quand le tableau vérifie $\gamma \leq 0$, on peut l'interpréter comme une solution duale admissible.

Quand, en plus, on obtient $\beta \geq 0$, la base devient aussi admissible pour le primal.

On dispose alors simultanément :

- d'une solution primale faisable ;
- d'une solution duale faisable ;
- d'une base pour laquelle les conditions d'écarts complémentaires sont satisfaites.

L'optimalité s'en déduit immédiatement.

Pourquoi le simplexe dual est-il efficace en re-optimisation ?

Supposons qu'un problème a déjà été résolu, puis que seul le second membre b soit modifié.

La base optimale précédente conserve souvent les mêmes coefficients réduits, donc la propriété

$$\gamma_i \leq 0.$$

En revanche, certaines composantes de

$$\beta = A_B^{-1} b$$

peuvent devenir négatives.

On obtient exactement le type de tableau qu'aime le simplexe dual : **dualement faisable, mais primalement non faisable**.

Comparaison synthétique des deux variantes

	Simplexe primal	**Simplexe dual**
Invariant	$\beta \geq 0$	$\gamma \leq 0$
Défaut corrigé	un $\gamma_i > 0$	un $\beta_j < 0$
Choix prioritaire	colonne entrante	ligne sortante
Test de ratio	sur les β/α positifs	sur les γ/α négatifs
Arrêt	tous les $\gamma \leq 0$	tous les $\beta \geq 0$
Conclusion	optimum ou non-borné	optimum ou infaisable

Pseudo-code de l'algorithme

1. Partir d'un tableau tel que $\gamma \leq 0$.
2. Tant qu'il existe une ligne avec $\beta_j < 0$:
   1. choisir la ligne sortante j avec le β_j le plus négatif ;
   2. vérifier qu'il existe une colonne i telle que $\alpha_{ji} < 0$;
   3. choisir la colonne entrante minimisant γ_i/α_{ji} ;
   4. pivoter.
3. Si tous les $\beta_j \geq 0$, la base est optimale.
4. Si une ligne négative ne possède aucun $\alpha_{ji} < 0$, le primal est infaisable.

Points d'attention

Comme pour le simplexe primal, plusieurs difficultés peuvent apparaître.

- **Dégénérescence :** certaines itérations ne changent pas la valeur de la fonction objectif.
- **Cyclage :** il est théoriquement possible ; des règles de type Bland permettent de l'éviter.
- **Choix du pivot :** en pratique, les solveurs utilisent des règles plus raffinées que le simple ratio minimal.

Ces phénomènes n'altèrent pas la logique fondamentale de l'algorithme, mais ils sont importants pour comprendre les implémentations effectives.

À retenir

- Le simplexe dual est la version symétrique du simplexe primal.
- Il conserve la **faisabilité duale** et restaure la **faisabilité primale**.
- Il est particulièrement adapté aux situations de re-optimisation.
- Une fois $\beta \geq 0$ obtenu, l'optimalité est immédiate puisque l'on a déjà $\gamma \leq 0$.
- Les variables artificielles répondent à un autre besoin : construire une base initiale quand aucune n'est directement disponible.

Exercice pour s'entraîner

Appliquer le simplexe dual au tableau suivant :

Base	betas	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3
s_1	-2	-1	1	1	0	0
s_2	1	-2	-1	0	1	0
s_3	3	1	0	0	0	1
	0	-3	-2	0	0	0

Questions :

1. Quelle est la première ligne sortante ?
2. Quelle est la colonne entrante ?
3. Le tableau final est-il optimal ou bien le problème est-il infaisable ?