# Modélisation en Programmation Linéaire

## TD 3 : Résolution graphique

E. Lancini

Université Dauphine-PSL

# Contenu de la séance

# Exercice 1 : Yaourts

On reprend le problème des yaourts de la 1e séance.
Un fabricant produit deux types de yaourts à la fraise $A$ et $B$ à partir de 3 ingrédients : Fraises, Lait et Sucre.
Chaque kg de yaourt $A$ nécessite de 2 kg de fraises et 1 kg de lait pour être produit.
Chaque kg de yaourt $B$ nécessite de 1 kg de fraises, 2 kg de lait et 1 kg de sucre pour être produit.
Le producteur a à disposition :

- 8 kg de fraises
- 7 kg de lait
- 3 kg de sucre

La vente de 1 kg rapporte 4€ pour $A$ et 5€ pour $B$.
Le producteur veut maximiser son profit.

# Résolution du problème

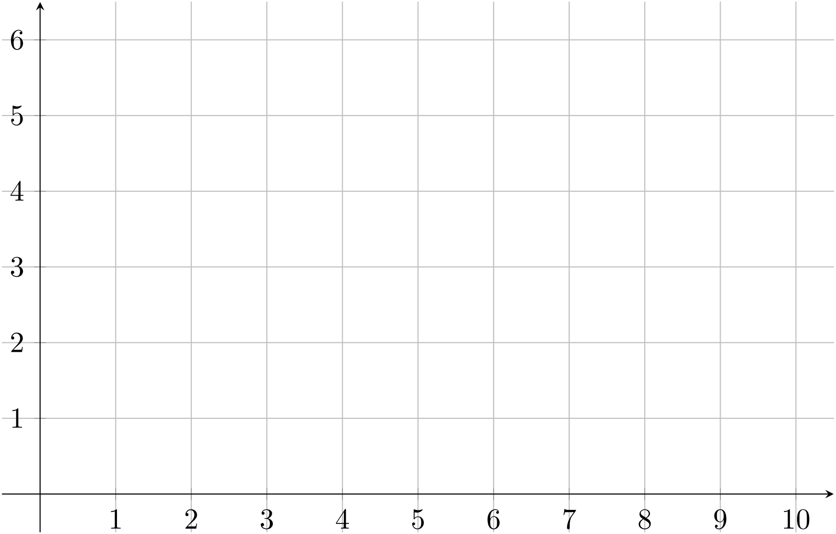
Le problème a 2 variables de décision, donc on peut le résoudre à la main.
La résolution est faite en phases.

- Écriture du problème en forme de PL.
- Dessin du polyèdre des solutions réalisable.
- Dessin du gradient de la fonction objectif.
- Choix du sommet qui maximise la fonction.

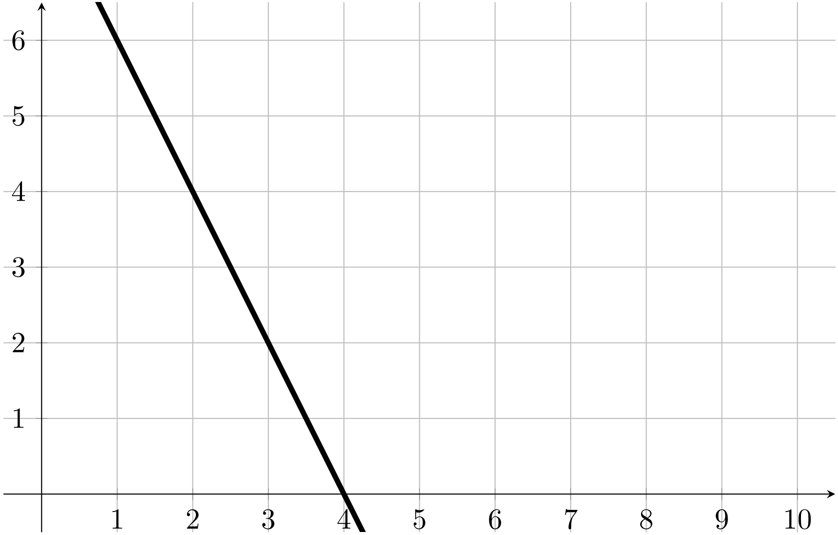
# Système

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 4x_A + 5x_B \\
\text{s.t.} \quad & 2x_A + x_B \leq 8 \\
& x_A + 2x_B \leq 7 \\
& x_B \leq 3 \\
& x_A, x_B \geq 0
\end{aligned}
$$

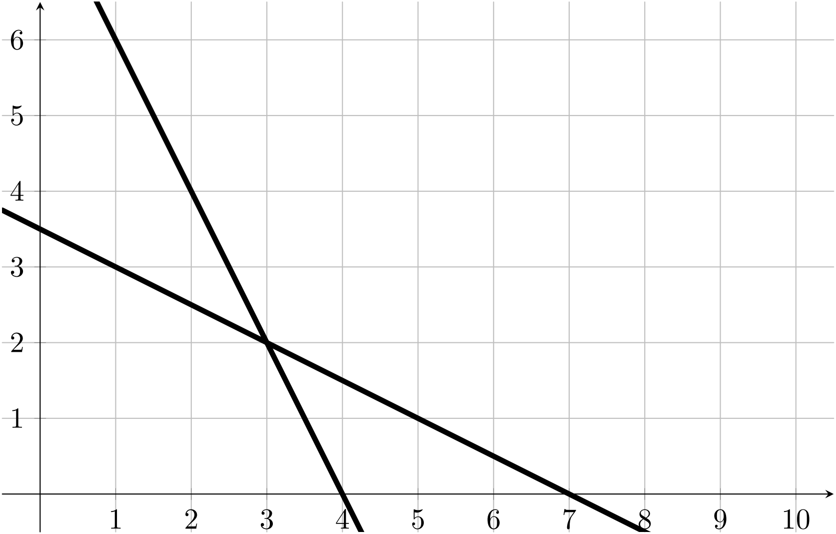
# Polyèdre



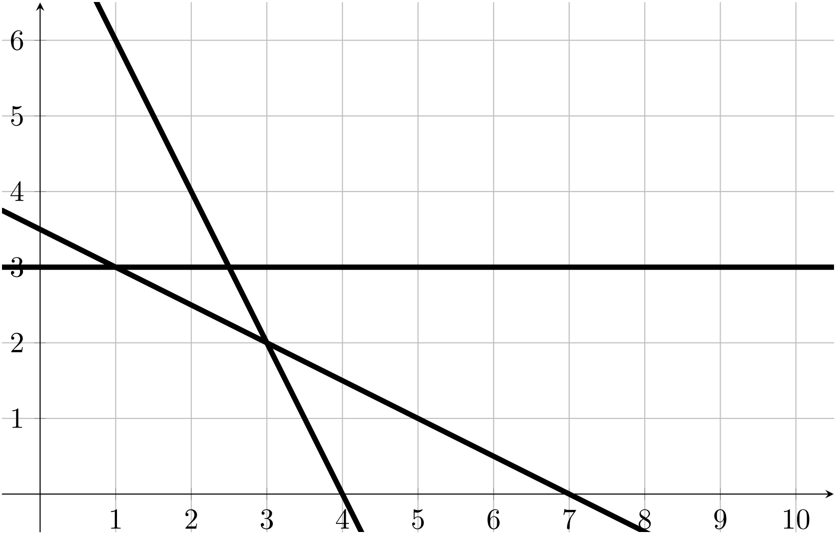
# Polyèdre



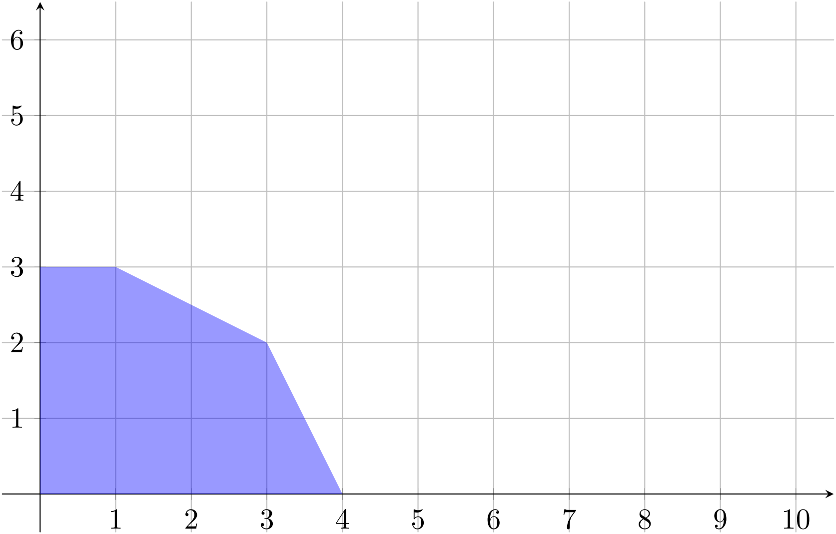
# Polyèdre



# Polyèdre



# Polyèdre



# Fonction objectif (Méthode I)

La fonction objectif est

$$4x_A + 5x_B$$

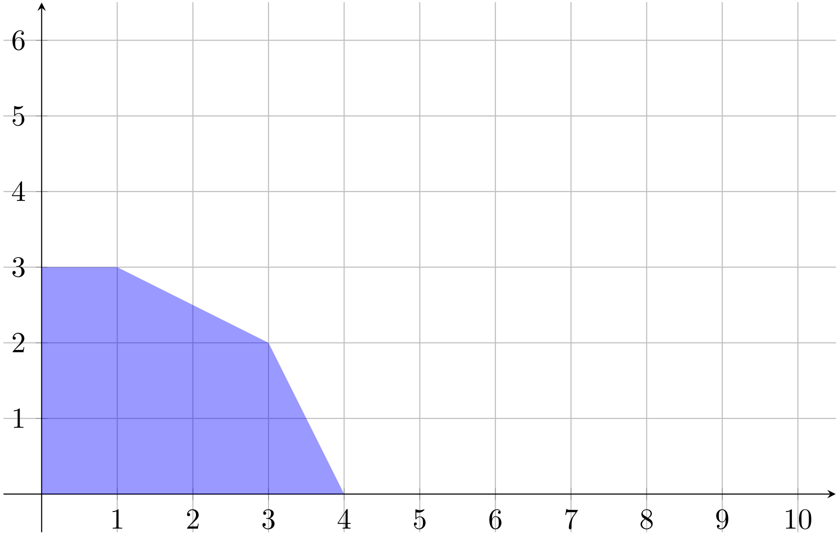
On peut donc en écrire le gradient facilement.

$$\nabla f = (4, 5)$$

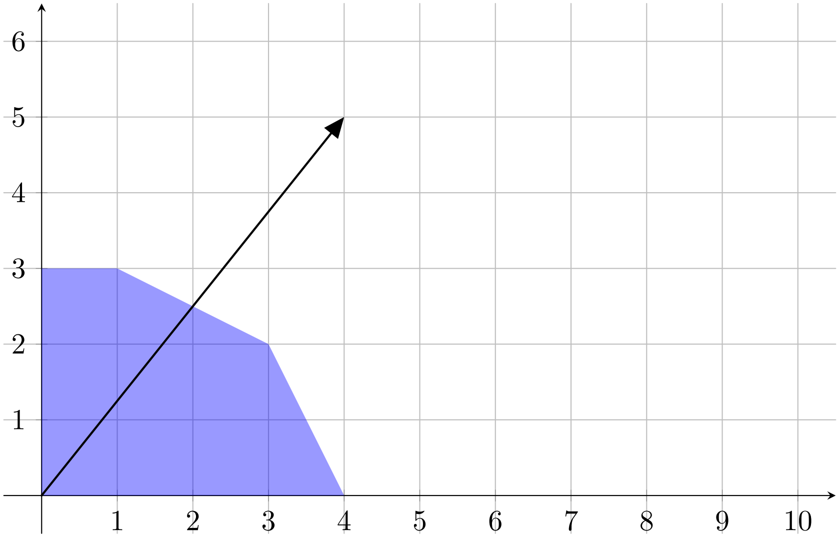
On va superposer ce vecteur à notre figure.

On positionne ce gradient avec la queue à l'intérieure de notre polyèdre. La seule chose qui nous intéresse sont les proportion entre les coordonnées, donc on peut le faire plus court où plus long, si nécessaire, mais il faut garder les angles correctes.

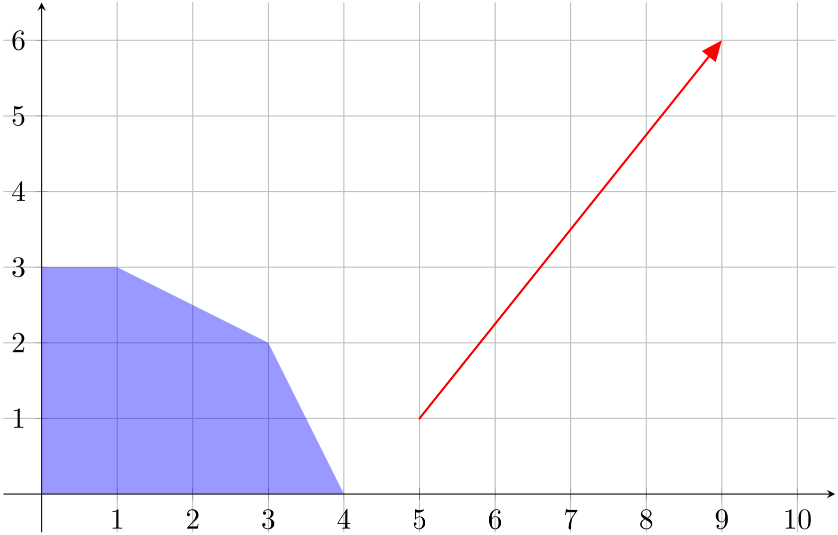
# Polyèdre et gradient



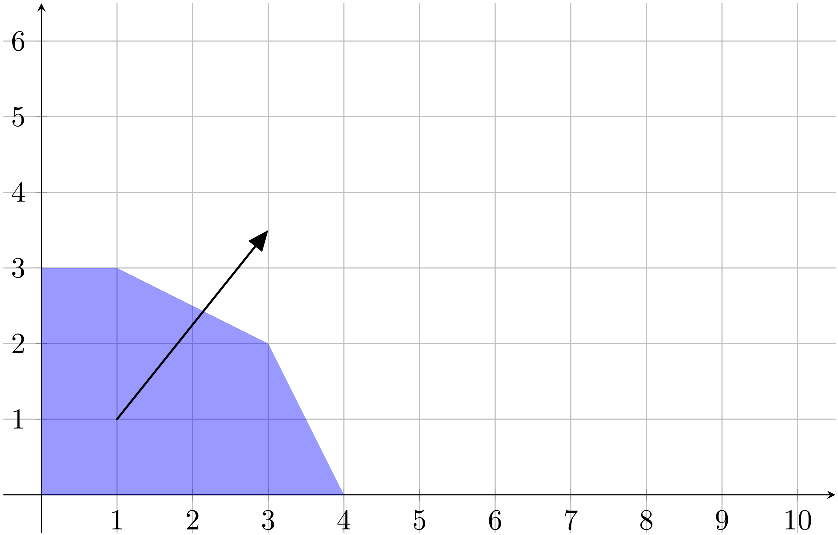
# Polyèdre et gradient



# Polyèdre et gradient



# Polyèdre et gradient

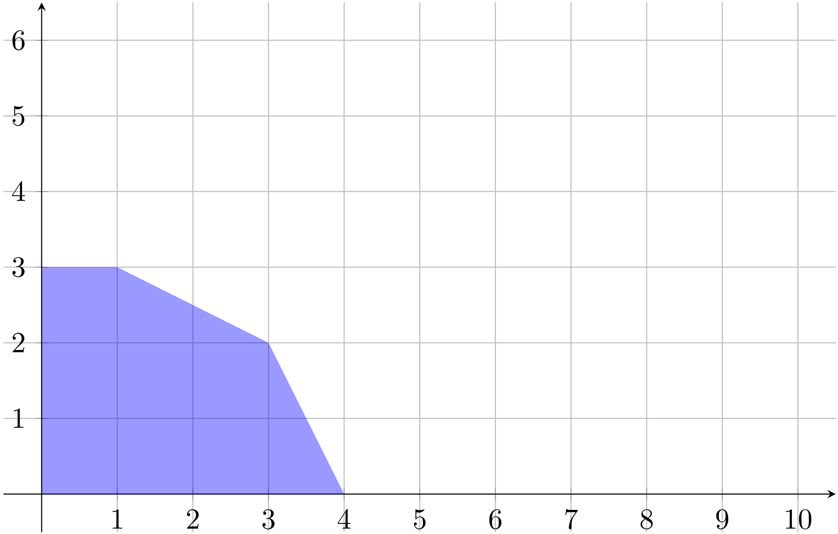


# Trouver l'optimum

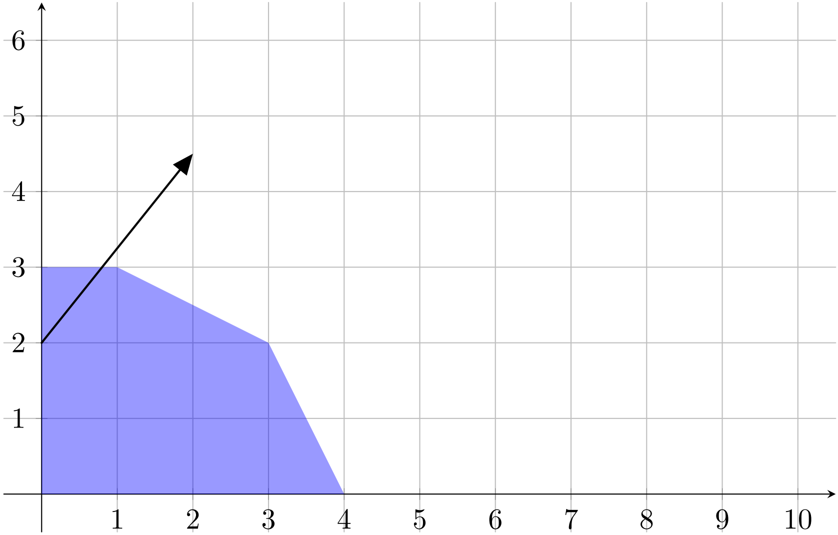
Pour trouver l'optimum :

- On se positionne sur la face intersectée par le gradient.
- Si le gradient est exactement orthogonale à cette face, on prends un quelconque des sommets présents sur la face.
- Sinon on prends le sommet dans la direction ou la flèche à un angle aigu.
- On compare l'angle entre la flèche et la nouvelle face.
- Si c'est aigu, on passe à l'autre sommet de la nouvelle face et on répète l'étape précédente.
- Si les deux angles sont obtuses on a trouvé le sommet optimum

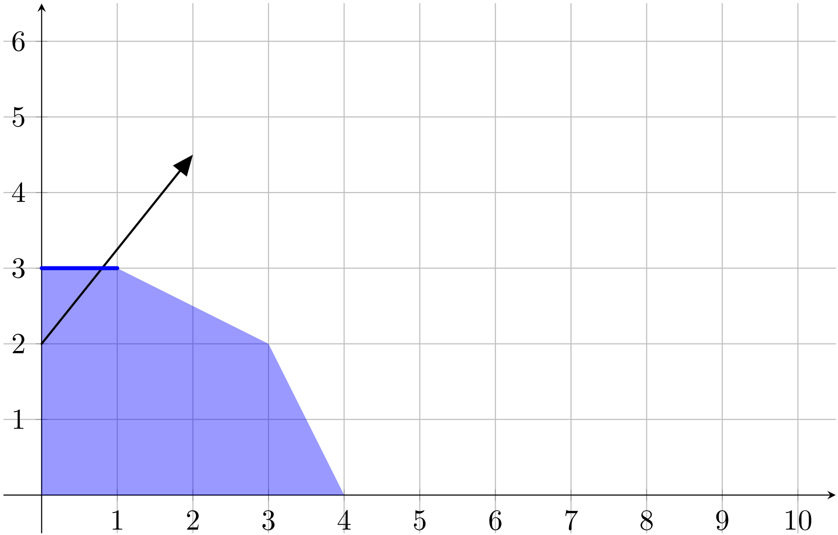
# Optimum



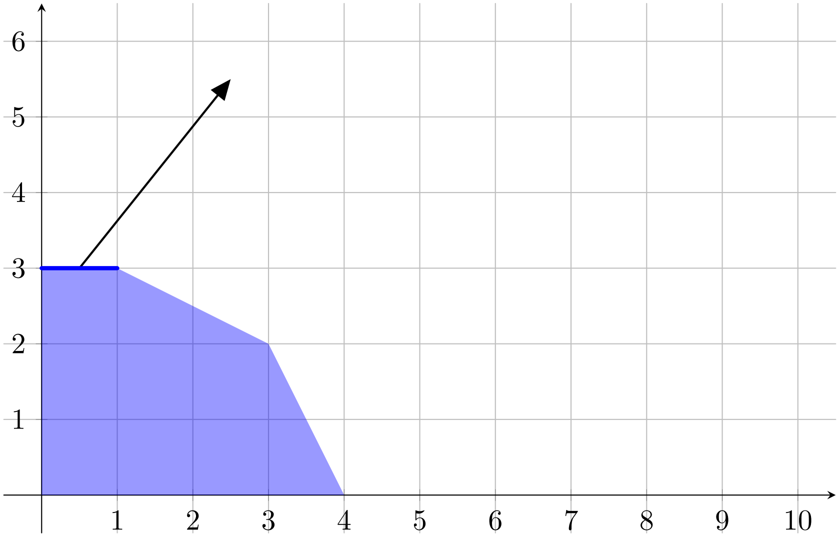
# Optimum



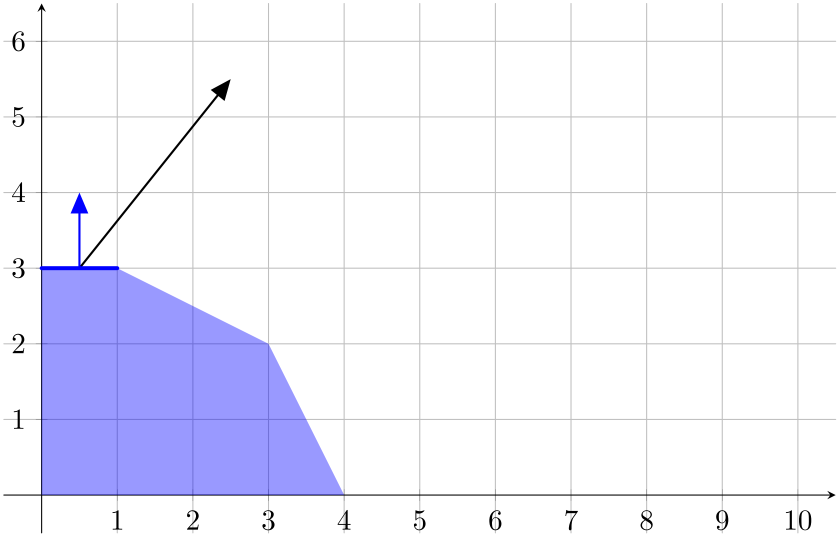
# Optimum



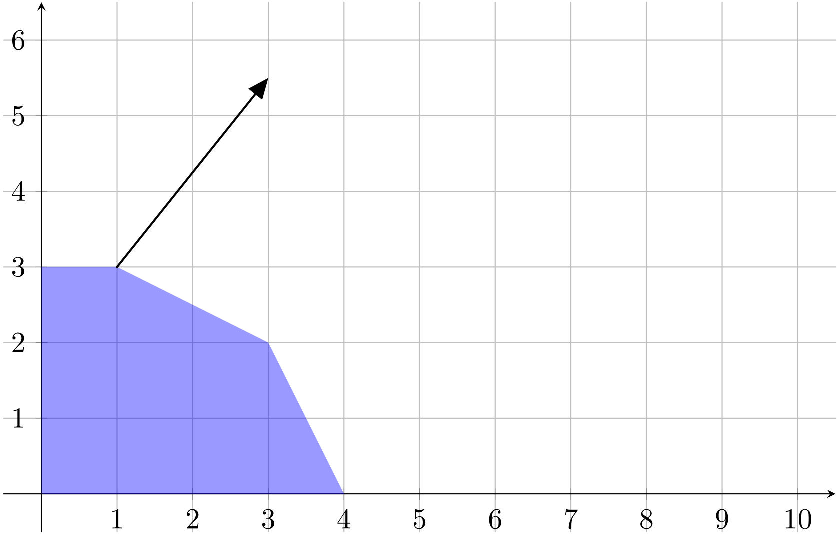
# Optimum



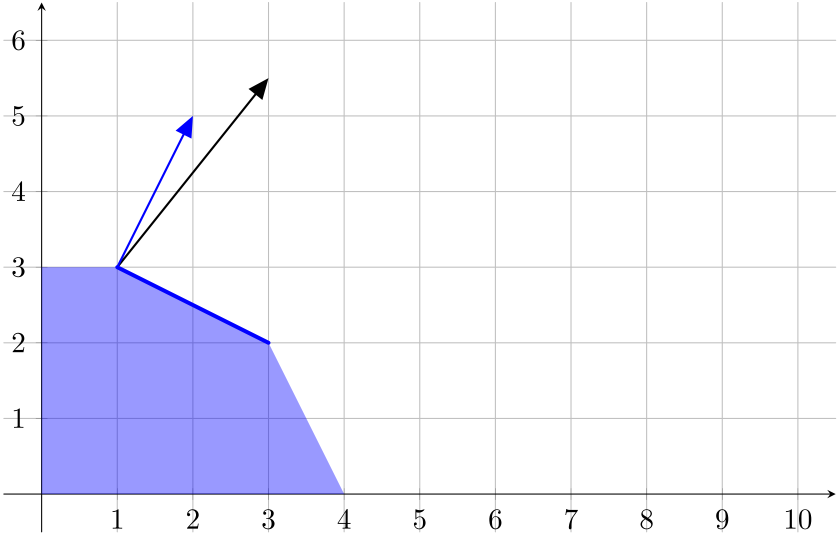
# Optimum



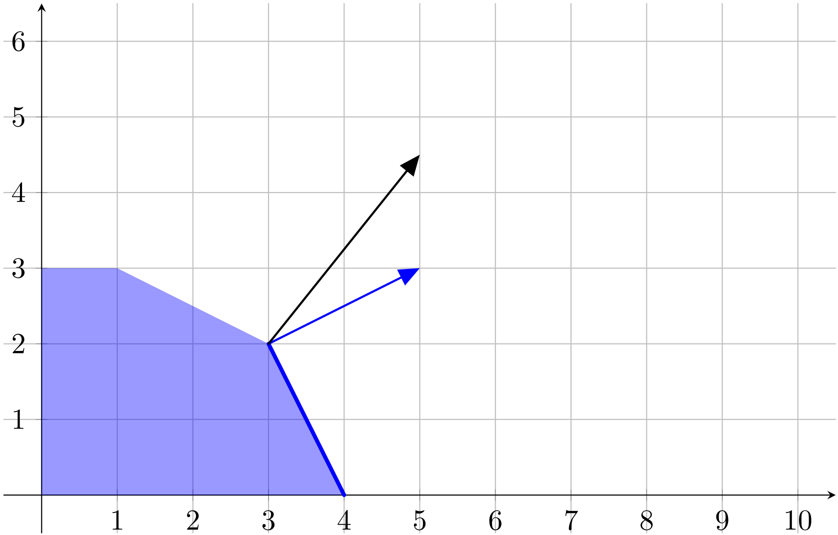
# Optimum



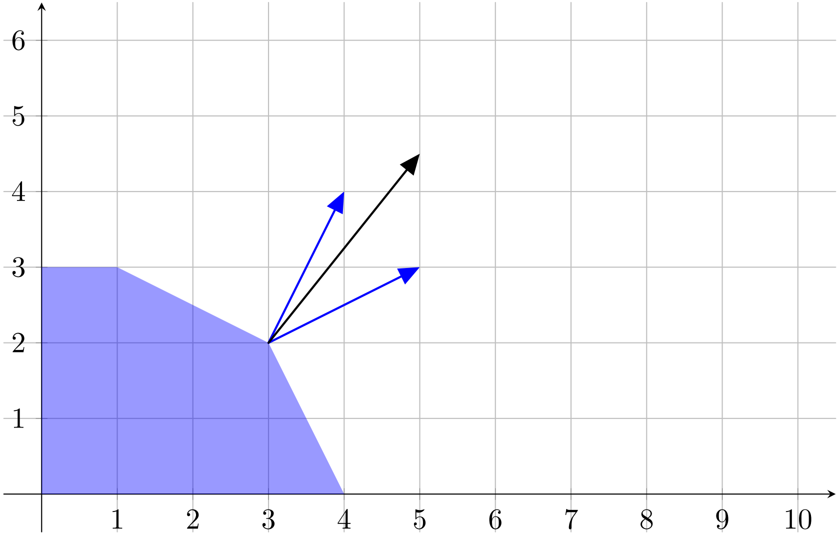
# Optimum



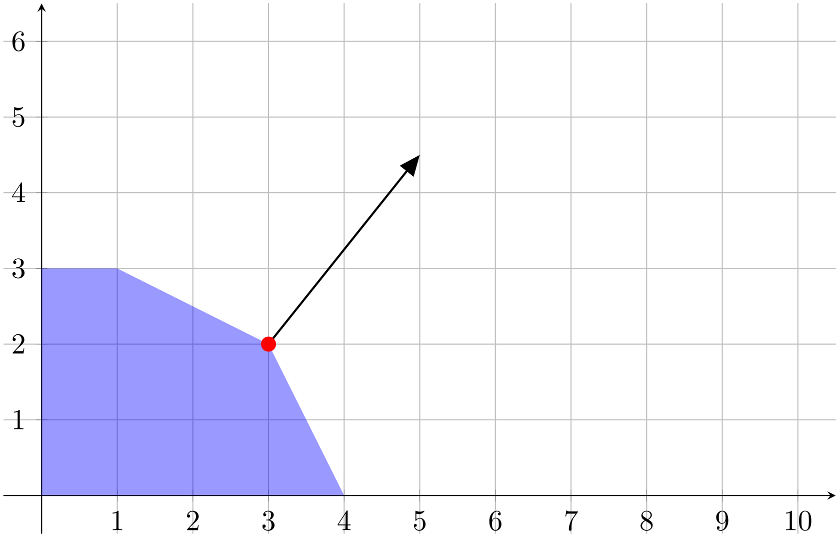
# Optimum



# Optimum



# Optimum



# Exercice 2 : Réécriture en forme Canonique/Standard

Réécrire le problème suivant en forme Canonique et Standard

$$\begin{aligned} \min \quad & 2x_1 - x_2 + 3x_3 \\ \text{s.c.} \quad & x_1 + x_2 \leq 5, \\ & -x_1 + 2x_3 \geq 4, \\ & x_2 - x_3 = 1, \\ & x_1 \geq 0, \\ & x_2 \leq 0. \end{aligned}$$

# Exercice 3 : Allocation de ressources pour un projet

Une entreprise dispose de 40 heures d'ingénierie et 30 heures de design. Deux missions $A$ et $B$ peuvent être réalisés. Chaque heure de chaque mission rapporte un gain fixe.

| Projet | Ingénierie (heures) | Design (heures) | Gain (€) |
|---|---|---|---|
| $A$ | 4 | 3 | 50 |
| $B$ | 2 | 5 | 40 |

**Objectif :** Maximiser le gain total.

# Exercice 4 : Optimisation de production

Une entreprise fabrique deux produits, $P_1$ et $P_2$. Chaque tonne de produit nécessite des heures de travail sur trois machines :

| Produit | Machine A | Machine B | Machine C |
|---|---|---|---|
| $P_1$ | 3h | 1h | 2h |
| $P_2$ | 1h | 2h | 3h |

La machine A est disponible 8 heures, la machine B 6 et la machine C 8 heures par jour. Le profit unitaire est de 300€ pour tonne de $P_1$ et 400€ pour tonne de $P_2$.
**Objectif :** Déterminer combien de chaque produit fabriquer pour maximiser le profit.

# Organisation d'un programme de formation

Une université organise deux types de formations, $A$ et $B$, destinées à des professionnels. Chaque formation mobilise des ressources en temps d'enseignement et en budget.

| Formation | Temps enseignant (heures) | Budget (k€) |
|---|---|---|
| $A$ | 3 | 1 |
| $B$ | 2 | 2 |

Les contraintes globales sont :

- Le nombre total d'heures d'enseignement disponibles est limité à 12 heures
- Le budget total alloué est de 10 k€
- Au moins 2 formations de type $A$ doivent être proposées
- Le nombre de formations de type $B$ ne peut pas dépasser 3

Chaque formation génère un revenu : $A 4$ k€ et $B 5$ k€

**Objectif :** Déterminer le nombre de formations $A$ et $B$ à organiser afin de maximiser le revenu total (supposant de pouvoir le organiser des fractions de formation).